Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 январь–февраль Том 58 № 1

*УДК 519.1*

*Ю. А. КАРТЫННИК, Ю. Л. ОРЛОВИЧ*

# ДОМИНАНТНО-ТРЕУГОЛЬНЫЕ ГРАФЫ И ГРАФЫ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ

*(Представлено академиком И. В. Гайшуном)*

*Белорусский государственный университет, Минск* *Поступило 11.12.2013*

**Введение.** В настоящей работе рассматриваются вопросы структурного описания и анализируется вычислительная сложность некоторых оптимизационных задач для графов, называемых далее доминантно-треугольными. Доминантно-треугольные графы образуют собственный подкласс класса треугольных графов [1] – графов, удовлетворяющих «треугольному свойству», введенному в [2] и в дальнейшем исследованному в [1; 3–8]. Напомним, что в работе [2] треугольное свойство было сформулировано в терминах максимальных независимых множеств графа. Естественное переопределение треугольного свойства в терминах минимальных доминирующих множеств позволило ввести в рассмотрение «доминантно-треугольное свойство» и класс доминантно-треугольных графов, которые обладают этим свойством. Последующая возможная трактовка треугольного свойства в терминах максимальных ирридантных множеств графа приводит к ирридантно-треугольным графам, класс которых, как выяснилось, в точности совпадает с классом доминантно-треугольных графов.

Среди других интересных собственных подклассов треугольных графов можно выделить классы эквистабильных [9; 10] и сильно эквистабильных [11] графов, а также класс общих графов разбиений [2], введенный в связи с изучением триангуляций планарных точечных множеств [12]. Известно [6; 11], что имеет место следующая последовательность включений: *общие графы разбиений* $\subseteq$ *сильно эквистабильные графы* $\subseteq$ *эквистабильные графы* $\subset$ *треугольные графы*. Отметим, что вопрос о сложности распознавания графов в каждом из четырех классов, указанных в этой последовательности, является открытым [4; 6]. В [10] сформулирована гипотеза о совпадении классов эквистабильных и сильно эквистабильных графов. Недавно [6] было высказано более сильное предположение о том, что классы эквистабильных графов и общих графов разбиений совпадают. К настоящему времени эти гипотезы нашли подтверждение лишь для некоторых специальных классов графов [6; 8]. В нашей работе уточняется положение доминантно-треугольных графов в упомянутой выше иерархии подклассов класса треугольных графов. А именно, показано, что доминантно-треугольные графы образуют собственный подкласс общих графов разбиений.

В работе также получен ряд характеризаций класса доминантно-треугольных графов, одна из которых указывает на его совпадение с классом графов верхних границ [13]. Тем самым установлено, что графы верхних границ образуют собственный подкласс класса общих графов разбиений и, как следствие, треугольных графов. Отметим, что, в отличие от других перечисленных подклассов треугольных графов, для графов верхних границ известен полиномиальный алгоритм распознавания [14] (хотя класс этих графов является достаточно содержательным в том смысле, что множество порожденных подграфов графов верхних границ есть множество всех графов). Более того, нами показано, что этот же класс графов совпадает с классом ирридантно-треугольных графов. Установленные свойства позволили перенести известные результаты о вычислительной сложности задач в классе графов верхних границ [15] на класс графов разбиений и, как следствие, треугольных графов. Также удалось получить ряд новых характеризаций класса графов верхних границ и установить в этом классе сложность аппроксимации некоторых теоретико-графовых параметров, родственных классическим числам независимости и доминирования.

**Основные понятия и известные результаты.** Стандартные понятия теории графов, не определяемые в работе, можно найти в [16]. Под *графом* $G=(V,E)$ всюду понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер с множеством вершин $V=V(G)$ и множеством ребер $E=E(G)$. Число $|V|$ вершин графа $G$ называется его *порядком* и обозначается через $|G|$. Подмножество всех вершин графа $G$, смежных с вершиной $u$, называется *окружением* вершины $u$ и обозначается через $N(u)$; *замкнутым окружением* вершины $u$ называется множество $N[u]=N(u)\cup\{u\}$. Число вершин в окружении вершины $u$ называется ее *степенью* и обозначается через $\deg u$. *Замкнутое собственное окружение* $PN[e]$ ребра $e=uv$ в графе $G$ определяется как пересечение замкнутых окружений концевых вершин $u$ и $v$ этого ребра. Другими словами, множество $PN[uv]=N[u]\cap N[v]$ состоит из вершин $u$ и $v$ и всех вершин графа $G$, которые одновременно смежны с $u$ и $v$. Для произвольного подмножества $X\subseteq V$ положим $N(X)=\bigcup\limits_{u\in X} N(u)\setminus X$ и $N[X]=N(X)\cup X$ – *окружение* и *замкнутое окружение* подмножества $X$ соответственно. Подграф графа $G$, порожденный множеством $X\subseteq V$, обозначается через $G(X)$; положим $G-X=G(V\setminus X)$. Простая цепь с $n$ вершинами ($n\geq 1$) и простой цикл длины $m$ ($m\geq 3$) обозначаются через $P_n$ и $C_m$ соответственно; граф $C_3$ называется *треугольником*. Термины «максимальное» («минимальное») и «наибольшее» («наименьшее») применительно к множествам с каким-либо свойством всюду в работе означают соответственно максимальное (минимальное) по включению и наибольшее (наименьшее) по мощности множества с этим свойством.

Подмножество $X\subseteq V$ вершин графа $G$ называется *независимым*, если никакие две вершины из этого множества не смежны, т. е. если подграф $G(X)$ является пустым. Число вершин в наибольшем независимом множестве графа $G$ называется *числом независимости* этого графа и обозначается через $\alpha(G)$. Произвольный полный подграф графа называется *кликой*. Множество вершин клики также называется *кликой*; из контекста должно быть ясно, о чем идет речь. Конечное семейство клик графа $G$ называется *покрытием кликами*, если $G$ является объединением этих клик (сами клики называются *компонентами* покрытия). Вершина графа называется *симплициальной*, если ее окружение – клика. Клика, порожденная замкнутым окружением симплициальной вершины, – *симплициальная клика*.

Будем говорить, что множество $Y\subseteq V$ *доминируется* множеством $X\subseteq V$, если $Y\subseteq N[X]$. Подмножество $X\subseteq V$ вершин графа $G$ называется *доминирующим*, если $V$ доминируется множеством $X$, т. е. если $N[X]=V$. Число вершин в наименьшем доминирующем множестве графа $G$ называется *нижним числом доминирования* этого графа и обозначается через $\gamma(G)$. *Верхнее число доминирования* (обозначается $\Gamma(G)$) – это число вершин в наибольшем минимальном доминирующем множестве графа $G$. Подмножество вершин графа называется *независимым доминирующим*, если оно является одновременно как независимым, так и доминирующим множеством. Известно [17], что независимое множество является максимальным тогда и только тогда, когда оно доминирующее. Таким образом, независимые доминирующие множества вершин графа – это его максимальные независимые множества вершин. Число вершин в наименьшем независимом доминирующем множестве графа $G$ называется *числом независимого доминирования* этого графа и обозначается через $i(G)$.

Пусть $G$ – граф и $X\subseteq V$. Для вершины $u\in X$ множество $pn[u,X]=N[u]\setminus N[X\setminus\{u\}]$ называется *X-приватной окрестностью* вершины $u$ в графе $G$, а элементы этого множества – *X-приватными соседями* вершины $u$. Заметим, что вершина $u$ принадлежит своей $X$-приватной окрестности тогда и только тогда, когда $u$ является изолированной в графе $G(X)$. Если вершина $u$ не принадлежит своей $X$-приватной окрестности, то все $X$-приватные соседи вершины $u$ лежат в $V\setminus X$. Подмножество вершин $X$ называется *ирридантным* (или *неизбыточным*) в графе $G$, если каждая вершина $u\in X$ имеет по крайней мере одного $X$-приватного соседа. Известно, что доминирующее множество является минимальным тогда и только тогда, когда это множество ирридантное. Кроме того [18], каждое минимальное доминирующее множество является максимальным ирридантным множеством. Эти факты послужили основой для введения и изучения понятия ирридантности в графах. Число вершин в наименьшем (соответственно, наибольшем) максимальном иррадантном множестве графа $G$ называется *нижним* (соответственно, *верхним*) *числом иррадантности* этого графа и обозначается через $\mathrm{ir}(G)$ (соответственно, $\mathrm{IR}(G)$).

Для любого графа $G$ нижнее и верхнее числа иррадантности, нижнее и верхнее числа доминирования, число независимого доминирования и число независимости связаны известными соотношениями [19] $\mathrm{ir}(G) \le \gamma(G) \le i(G) \le \alpha(G) \le \Gamma(G) \le \mathrm{IR}(G)$.

Подмножество $X \subseteq V$ вершин графа $G$ называется *окрестностным* [20], если граф $G$ является объединением подграфов, порожденных замкнутыми окружениями вершин из $X$, т. е. $G = \bigcup_{u \in X} G(N[u])$. Заметим, что каждое окрестностное множество является доминирующим и, в частности, содержит все изолированные вершины графа. С другой стороны, доминирующее множество не обязательно является окрестностным. Число вершин в наименьшем окрестностном множестве графа $G$ обозначим через $\hat{n}(G)$, а в наибольшем минимальном окрестностном множестве – через $\widehat{N}(G)$. Таким образом, для любого графа $G$ верны неравенства $\gamma(G) \le \hat{n}(G) \le \widehat{N}(G) \le \Gamma(G)$.

Подмножество вершин графа, являющееся как независимым, так и окрестностным, называется *независимым окрестностным* [21]. Ясно, что каждое независимое окрестностное множество является независимым доминирующим, но обратное, вообще говоря, неверно. Заметим также, что не каждый граф обладает независимым окрестностным множеством. Например, простой цикл нечетной длины не содержит независимых окрестностных множеств. Число вершин в наименьшем независимом окрестностном множестве графа $G$ обозначим через $n_i(G)$, а в наибольшем – через $N_i(G)$. Таким образом, для любого графа $G$, содержащего независимое окрестностное множество, верны неравенства $i(G) \le n_i(G) \le N_i(G) \le \alpha(G)$.

Введем еще одно понятие, тесно связанное с понятием окрестностного множества. Подмножество вершин $X \subseteq V$ назовем *треугольным покрытием* графа $G$, если для любого ребра $uv$ этого графа, обе концевые вершины $u$ и $v$ которого не лежат в $X$, найдется вершина $w \in X$, одновременно смежная с $u$ и $v$, т. е. множество $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе $G$. Как легко видеть, каждое окрестностное множество является треугольным покрытием. С другой стороны, каждое треугольное покрытие, содержащее все изолированные вершины графа, является окрестностным множеством. Таким образом, подмножество $X \subseteq V$ в графе $G$, не содержащем изолированных вершин, является (минимальным) треугольным покрытием графа $G$ тогда и только тогда, когда $X$ – (минимальное) окрестностное множество. В дальнейшем различие между окрестностными множествами и треугольными покрытиями, выраженное в изолированных вершинах, будет для нас несущественным.

Граф называется *треугольным* [1], если каждое его максимальное независимое множество является треугольным покрытием. Другими словами, $G$ – треугольный граф, если он удовлетворяет следующему *треугольному свойству*: для любого максимального независимого множества $I \subseteq V$ и любых смежных вершин $u$ и $v$, не входящих в $I$, найдется такая вершина $w \in I$, что тройка вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе $G$. Поскольку каждое максимальное независимое множество содержит все изолированные вершины графа, треугольный граф можно эквивалентно определить как граф, в котором каждое максимальное независимое множество является окрестностным. В частности, это означает, что для треугольного графа понятия максимального независимого множества и независимого окрестностного множества совпадают. Таким образом, для любого треугольного графа $G$ верны следующие соотношения [1; 7]: $i(G) = n_i(G) \le N_i(G) = \alpha(G)$.

Известный подкласс класса треугольных графов составляют общие графы разбиений [2; 6]. Граф $G$ называется *общим графом разбиений*, если существует такое множество $S$, что каждой вершине $u$ графа $G$ можно поставить в соответствие непустое подмножество $S_u \subseteq S$ таким образом, что

1) $uv \in E(G)$ тогда и только тогда, когда $S_u \cap S_v \ne \varnothing$;

2) $S = \bigcup_{u \in V(G)} S_u$;

3) для каждого максимального независимого множества $I$ вершин графа $G$ набор подмножеств $\{S_u : u \in I\}$ является разбиением множества $S$.

По аналогии с треугольным графом, граф назовем *доминантно-треугольным*, если каждое его минимальное доминирующее множество является окрестностным. Другими словами, $G$ –

доминантно-треугольный граф, если он удовлетворяет следующему *доминантно-треугольному свойству*: для любого минимального доминирующего множества $D \subseteq V$ и любых смежных вершин $u$ и $v$, не входящих в $D$, найдется такая вершина $w \in D$, что тройка вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе $G$. Как нетрудно убедиться, в определении доминантно-треугольного графа требование минимальности доминирующего множества $D$ можно снять без ограничения общности. Поскольку каждое максимальное независимое множество является доминирующим, доминантно-треугольные графы образуют подкласс класса треугольных графов. Заметим, что для доминантно-треугольного графа понятия доминирующего множества и окрестностного множества совпадают. Таким образом, для любого доминантно-треугольного графа $G$ верны соотношения $\gamma(G) = \hat{n}(G) \le \hat{N}(G) = \Gamma(G)$.

Пусть $P = (A, <)$ – конечное *частично упорядоченное множество*, т. е. произвольное конечное множество $A$ с заданным на нем антирефлексивным и транзитивным бинарным отношением $<$. Граф $UB(P)$, ассоциированный с $P$, определяется следующими условиями: множество его вершин совпадает с $A$ и две различные вершины $u$ и $v$ смежны в $UB(P)$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $a \in A$, что $u \le a$ и $v \le a$, т. е. $u$ и $v$ имеют *общую верхнюю границу* $a$ в $A$. (Здесь запись $x \le y$ означает, что $x < y$ или $x = y$.) Если для некоторого графа $G$ существует такое частично упорядоченное множество $P$, что $G$ изоморфен графу $UB(P)$, то граф $G$ называется *графом верхних границ*. Известно [22], что класс графов верхних границ совпадает с классом *реберно-симплициальных графов*, т. е. графов, каждое ребро которых принадлежит некоторой симплициальной клике. Такие симплициальные клики образуют множества вершин с общей верхней границей в частично упорядоченном множестве.

В [15] приведен обзор известных результатов по вычислительной сложности задач нахождения некоторых числовых теоретико-графовых параметров для графов верхних границ. В частности, отмечено, что вычисление каждого из параметров ir, $\gamma$ и $i$ для графов из данного класса является NP-трудной задачей, в то время как каждый из параметров $\alpha$, $\Gamma$ и IR для таких графов допускает полиномиальный алгоритм вычисления, основанный на эффективном перечислении симплициальных клик.

**Характеризации доминантно-треугольных графов.** Следующая теорема по сути является критерием доминантной треугольности графа.

Т е о р е м а 1. *Для графа G следующие утверждения эквивалентны:*

*1) G – доминантно-треугольный;*

*2) для любого ребра* $e \in E(G)$ *найдется такая вершина* $w \in PN[e]$, *что* $N[w] \subseteq PN[e]$ *(вершину w, удовлетворяющую указанному свойству, будем называть опорной для ребра e);*

*3) каждое ребро* $e \in E(G)$ *содержится в некоторой симплициальной клике (симплициальную вершину этой клики будем называть главной опорной вершиной для ребра e).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) => 2). Пусть $G$ – доминантно-треугольный граф и пусть для ребра $e$ графа $G$ не существует опорной вершины. Это означает, что для каждой вершины $x \in PN[e]$ множество $N[x] \setminus PN[e]$ непусто. Но тогда множество $D = V(G) \setminus PN[e]$ является доминирующим в графе $G$ и при этом все треугольники графа, содержащие ребро $e$, не пересекаются с $D$ по вершинам. Противоречие с тем, что $G$ – доминантно-треугольный граф.

2) => 3). Рассмотрим произвольное ребро $e \in E(G)$ и выберем в $PN[e]$ опорную вершину $w$ минимальной степени. Будем считать $\deg w \ge 2$, поскольку при $\deg w = 1$ само ребро $e$ является симплициальной кликой. Покажем, что любые две вершины $a, b \in N(w)$ являются смежными в графе $G$. Пусть $x$ – опорная вершина для ребра $aw$. Тогда $N[x] \subseteq PN[aw] \subseteq N[w] \subseteq PN[e]$ и, следовательно, $x$ также является опорной вершиной для ребра $e$. Ввиду минимальности степени вершины $w$ имеем $|N[x]| \ge |N[w]|$. Отсюда и из включения $N[x] \subseteq N[w]$ получаем, что $N[x] = N[w]$. Учитывая теперь соотношения $b \in N[w] = N[x] \subseteq PN[aw] \subseteq N[a]$, приходим к заключению, что вершины $a$ и $b$ смежны. Таким образом, $N[w]$ и $w$ есть соответственно требуемые в утверждении 3) симплициальная клика и главная опорная вершина для ребра $e$.

3) => 1). Рассмотрим в графе $G$ произвольное доминирующее множество $D$ и какое-либо ребро $uv$, концевые вершины которого не принадлежат $D$. Пусть $w$ – главная опорная вершина для этого ребра, т. е. $N[w] \subseteq PN[uv]$ и $N[w]$ – клика. Поскольку $D$ – доминирующее множество, в гра-

фе $G$ найдется вершина $d \in D \cap N[w]$. Но тогда $d \in PN[uv]$ и, следовательно, $G(\{u, v, d\})$ – треугольник в графе $G$ с $d \in D$, что и требовалось доказать.

Заметим, что формулировка утверждения 3) теоремы 1 совпадает в точности с определением реберно-симплициального графа. Поэтому верно

С л е д с т в и е 1. *Класс доминантно-треугольных графов совпадает с классом графов верхних границ (реберно-симплициальных графов).*

Таким образом, утверждение 2) теоремы 1, а также приводимые ниже характеризации класса доминантно-треугольных графов являются новыми характеризациями класса графов верхних границ. Поскольку в настоящей работе исследование данного класса графов проводится с позиции понятий независимости и доминирования, а сам класс рассматривается в контексте подклассов класса треугольных графов, далее в основном используется название «доминантно-треугольные графы». Название «графы верхних границ» будет упоминаться только для перечисления уже известных результатов, относящихся к этому классу графов. В частности, следующая характеризация графов верхних границ в терминах «упорядоченных» покрытий кликами является в силу сказанного одной из характеризаций класса доминантно-треугольных графов.

У т в е р ж д е н и е 1 ([23]). *Граф является графом верхних границ тогда и только тогда, когда существуют упорядочение $v_1, v_2, ..., v_n$ множества его вершин и покрытие кликами $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, такие что:*

*1) $v_i \in Q_i$ для каждого $i$, $1 \le i \le n$;*

*2) если $v_i \in Q_j$, то $i \le j$ и $Q_i \subseteq Q_j$.*

Как уже отмечалось, вопрос о сложности задачи распознавания треугольного графа является открытым. Предполагается [4], что эта задача co-NP-полна. Напротив, как, в частности, следует из теоремы 1, задача распознавания доминантно-треугольного графа полиномиально разрешима.

Известно, что граф $G$ является общим графом разбиений тогда и только тогда, когда существует его покрытие кликами, каждая компонента которого пересекается с каждым максимальным независимым множеством этого графа (см. свойство I в [2]). Для доминантно-треугольного графа таким покрытием будет покрытие симплициальными кликами. Действительно, если некоторая симплициальная клика не содержит вершин какого-либо независимого множества, то это множество можно расширить за счет добавления к нему соответствующей симплициальной вершины. Таким образом, класс доминантно-треугольных графов содержится в классе общих графов разбиений. Как нетрудно проверить, простой цикл $C_4$ является общим графом разбиений, но не доминантно-треугольным графом. Следовательно, класс всех доминантно-треугольных графов у́же класса общих графов разбиений.

Класс доминантно-треугольных графов не является наследственным (т. е. не замкнут относительно операции удаления вершины). Более того, как нетрудно видеть, для произвольного графа $H$ граф $\mathrm{Tri}(H)$, который получается из графа $H$ добавлением для каждого ребра $uv \in E(H)$ новой вершины $x_{uv}$ и пары ребер $ux_{uv}$ и $vx_{uv}$, является доминантно-треугольным и содержит $H$ в качестве порожденного подграфа. Тем не менее, этому классу графов присуще одно интересное «псевдонаследственное» свойство. Для изложения этого свойства полезно ввести в рассмотрение *нуль-граф*, т. е. «граф», который не имеет ни вершин, ни ребер, и считать нуль-граф доминантно-треугольным.

Т е о р е м а 2. *Класс доминантно-треугольных графов замкнут относительно удаления замкнутого окружения произвольного подмножества вершин (это свойство назовем окрестностной наследственностью).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G$ – доминантно-треугольный граф. Предположим, что граф $G' = G - N[X]$, полученный из $G$ удалением замкнутого окружения подмножества $X \subseteq V(G)$, не является доминантно-треугольным. Это означает, что в $G'$ существуют доминирующее множество $D'$ и ребро $e$ такие, что $PN[e] \cap D' = \varnothing$. Но тогда множество $D = D' \cup X$ является доминирующим в графе $G$ и $PN[e] \cap D = \varnothing$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

Если $X \subseteq V$, то подграф $G - N[X]$ графа $G$ назовем *ко-окрестностным*. Обозначим через $\mathrm{NSub}(G)$ множество всех ко-окрестностных подграфов графа $G$. Класс графов $M$ назовем *окрестностно наследственным*, если $\mathrm{NSub}(G) \subseteq M$ для любого $G \in M$. Теорема 2 влечет возможность характеризации класса доминантно-треугольных графов в терминах запрещенных ко-окрестностных подграфов. Более точно, класс графов $M$ является окрестностно наследственным тогда и только тогда, когда $M = \{G : \mathrm{NSub}(G) \cap Z = \varnothing\}$ для некоторого множества графов $Z$. (Здесь $Z$ – множество *запрещенных ко-окрестносных подграфов* для класса $M$.) Частным случаем окрестностной наследственности является *конаследственность*, присущая и треугольным графам [1; 5; 7], – свойство замкнутости класса графов относительно операции удаления произвольного (возможно, пустого) независимого множества вершин вместе с их окружениями. Получающиеся в результате такой операции подграфы называются *костабильными*. Можно показать, что характеризация доминантно-треугольных графов как в терминах минимального множества запрещенных костабильных подграфов, так и в терминах минимального множества запрещенных ко-окрестностных подграфов, содержит бесконечное число графов. В частности, в нее входит бесконечная серия графов, предложенная в [7] для класса треугольных графов.

Для треугольных графов известна следующая характеризация [6]: граф $G$ является треугольным тогда и только тогда, когда он не содержит порожденной простой цепи $P_4 = (a, b, c, d)$, концевые вершины $a$ и $d$ которой принадлежат некоторому максимальному независимому множеству $I$ графа $G$, а внутренние вершины $b$ и $c$ не смежны одновременно ни с одной вершиной из $I$. Порожденный подграф $P_4 = (a, b, c, d)$ (соответственно, $C_4 = (a, b, c, d, a)$) графа $G$ назовем *плохим*, если в этом графе существует такое доминирующее множество $D$, что вершины $a$ и $d$ принадлежат $D$, а вершины $b$ и $c$ не принадлежат $D$ и не смежны одновременно ни с одной вершиной из $D$. Доминантно-треугольные графы допускают следующую характеризацию в терминах плохих порожденных подграфов $P_4$ и $C_4$.

Т е о р е м а 3. *Граф является доминантно-треугольным тогда и только тогда, когда он не содержит плохих порожденных подграфов* $P_4$ и $C_4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость очевидна – наличие в графе плохого порожденного подграфа $P_4 = (a, b, c, d)$ или $C_4 = (a, b, c, d, a)$ влечет нарушение доминантно-треугольного свойства графа на ребре $bc$. Обратно, если граф $G$ не является доминантно-треугольным, то в нем существуют доминирующее множество $D$ и ребро $bc$, такие что вершины $b$ и $c$ не принадлежат замкнутому окружению любой вершины из $D$. Поскольку $D$ – доминирующее множество, для вершины $b$ найдется смежная с ней вершина $a \in D$, а для вершины $c$ – смежная с ней вершина $d \in D$, причем $a \neq d$ и $ac \notin E(G)$, $bd \notin E(G)$. Но тогда $G(\{a, b, c, d\})$ – плохой порожденный подграф графа $G$ (в зависимости от смежности вершин $a$ и $d$ это либо цепь $P_4$, либо цикл $C_4$). Теорема доказана.

Заметим, что в общем случае существование в графе плохого порожденного подграфа $P_4$ не влечет существования в этом графе «плохого $P_4$» в смысле [6]. Контрпримером может служить тот из четырех графов со степенной последовательностью (4, 3, 3, 3, 2, 1), который является треугольным.

На основе теоремы 1 (см. п. 2) нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

У т в е р ж д е н и е 2. *Если доминантно-треугольный граф содержит простой цикл* $C_m$, $m \geq 4$, *в качестве порожденного подграфа, то в этом графе также имеется порожденный подграф* $\mathrm{Tri}(C_m)$.

Напомним, что граф называется *расщепляемым*, если существует разбиение множества его вершин на клику и независимое множество. Хорошо известно, что граф расщепляем тогда и только тогда, когда ни один из трех графов $2K_2$, $C_4$ и $C_5$ не является его порожденным подграфом (см., напр., [16]). Поскольку для каждого $m \geq 4$ граф $\mathrm{Tri}(C_m)$ содержит порожденный подграф $2K_2$, отсюда с учетом утверждения 2 получаем

С л е д с т в и е 2. *Для доминантно-треугольного графа G следующие утверждения эквивалентны:*

*1) граф G является расщепляемым;*

*2) граф G не содержит порожденных подграфов вида* $2K_2$.

Среди расщепляемых графов важный класс составляют *пороговые графы* – класс графов, который характеризуется запрещенными порожденными подграфами вида $2K_2$, $P_4$ и $C_4$. Известно [24], что граф верхних границ является пороговым, если и только если он не содержит порожденных подграфов $2K_2$ и *Bull*, где *Bull* – униграф со степенной последовательностью (3, 3, 2, 1, 1).

Обратимся еще к одному классу графов, замкнутому относительно операций объединения и соединения графов, – классу *кографов*. Хорошо известно, что граф является кографом, если и только если он не содержит порожденного подграфа $P_4$. Поскольку граф $\mathrm{Tri}(C_m)$ содержит порожденный подграф $P_4$, отсюда на основе утверждения 2 нетрудно получить

С л е д с т в и е 3. *Для графа G следующие утверждения эквивалентны:*

*1) граф G является доминантно-треугольным кографом;*

*2) граф G не содержит порожденных подграфов вида $P_4$ и $C_4$;*

*3) любой порожденный подграф графа G является доминантно-треугольным.*

Наряду с понятиями треугольного и доминантно-треугольного графов можно ввести в рассмотрение *ирридантно-треугольный граф* как граф, в котором каждое максимальное ирридантное множество является окрестностным. Поскольку в любом графе каждое минимальное доминирующее множество является максимальным ирридантным множеством, ирридантно-треугольные графы образуют подкласс класса доминантно-треугольных графов. На самом деле, как будет видно из доказательства теоремы 4, эти классы совпадают. Для доказательства теоремы потребуется следующее утверждение, касающееся максимальных ирридантных множеств.

У т в е р ж д е н и е 3 ([18]). *Пусть вершина z не доминируется максимальным ирридантным множеством X. Тогда для некоторой вершины $x \in X$ выполнено $pn[x, X] \subseteq N(z)$.*

Т е о р е м а 4. *В произвольном доминантно-треугольном графе каждое максимальное ирридантное множество является минимальным доминирующим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в доминантно-треугольном графе каждое максимальное ирридантное множество является доминирующим. Пусть *G* – доминантно-треугольный граф. Предположим от противного, что *G* содержит максимальное ирридантное множество *X*, которое не является доминирующим в этом графе, т. е. $Z = V(G) \setminus N[X] \neq \varnothing$. Зафиксируем некоторую вершину $z \in Z$. В силу утверждения 3 найдется такая вершина $x \in X$, что $pn[x, X] \subseteq N(z)$, т. е. $z$ смежна со всеми *X*-приватными соседями вершины *x*. Так как *z* не смежна с *x*, то $x \notin pn[x, X]$, и, значит, $x \in N[X \setminus \{x\}]$. Теперь легко убедиться, что $D = (X \setminus \{x\}) \cup Z$ – доминирующее множество графа *G*. Действительно, как уже показано, вершина *x* доминируется некоторой вершиной из $X \setminus \{x\}$. Кроме вершины *x* множеству *D* не принадлежат лишь вершины из *N*(*X*). Однако те из них, которые содержатся в $pn[x, X]$, доминируются вершиной $z \in Z$, а остальные – множеством $X \setminus \{x\}$. Таким образом, *D* – доминирующее множество графа *G*.

Введем в рассмотрение произвольную вершину $y \in pn[x, X]$ и ребро $xy$. Вершина *x* не смежна ни с одной вершиной из *Z*, а вершина *y* не смежна с вершинами из $X \setminus \{x\}$. Но тогда $PN[xy] \cap D = \varnothing$. Получили противоречие с тем, что *G* – доминантно-треугольный граф. Теорема 4 доказана.

В качестве простых следствий из теоремы 4 получаются следующие утверждения.

С л е д с т в и е 2. *Класс ирридантно-треугольных графов совпадает с классом доминантно-треугольных графов (графов верхних границ, реберно-симплициальных графов).*

С л е д с т в и е 3. *Для любого доминантно-треугольного графа G имеют место равенства* $\mathrm{ir}(G) = \gamma(G)$ *и* $\Gamma(G) = \mathrm{IR}(G)$.

Следствие 3 обобщает результат работы [19], где доказано равенство параметров ir и $\gamma$ в классе реберных графов наследственных гиперграфов, который является специальным собственным подклассом графов верхних границ. Отметим также, что в [25] впервые доказано равенство параметров $\Gamma$ и IR для произвольного графа верхних границ.

**Сложность задач в классе доминантно-треугольных графов.** В настоящем разделе представлены результаты о вычислительной сложности и сложности аппроксимации некоторых теоретико-графовых задач в классе доминантно-треугольных графов. Отметим, что важным мотивом в этом исследовании были обнаруженные связи между числами доминирования, ирридантности и окрестностными числами названных графов, что позволило подойти с единых позиций к изучению сложностного статуса рассматриваемых задач.

Сформулируем следующие пять задач распознавания.

***Доминирующее множество (Независимое доминирующее множество)***

*Условие*: Задан граф $G$ и натуральное число $k \le |G|$. *Вопрос*: Существует ли в графе $G$ доминирующее (независимое доминирующее) множество $D$ такое, что $|D| \le k$?

***Окрестностное множество (Независимое окрестностное множество)***

*Условие*: Задан граф $G$ и натуральное число $k \le |G|$. *Вопрос*: Существует ли в графе $G$ окрестностное (независимое окрестностное) множество $S$ такое, что $|S| \le k$?

***Максимальное ирридантное множество***

*Условие*: Задан граф $G$ и натуральное число $k \le |G|$. *Вопрос*: Существует ли в графе $G$ максимальное ирридантное множество $X$ такое, что $|X| \le k$?

Под оптимизационной версией каждой из пяти перечисленных задач распознавания будем понимать задачу нахождения в графе наименьшего множества вершин с указанным в названии задачи свойством. Например, оптимизационная версия задачи ***доминирующее множество*** состоит в нахождении наименьшего доминирующего множества вершин. При этом для обозначения оптимизационных версий задач будем использовать те же названия, что и для их распознавательных версий; из контекста должно быть ясно, о какой версии задачи идет речь.

Из определения доминантно-треугольного графа $G$ следует, что $\gamma(G) = \hat{n}(G)$ и $\widehat{N}(G) = \Gamma(G)$. Известно [15], что для любого графа $G$ верхних границ верно равенство $\alpha(G) = \Gamma(G)$. В то же время для треугольного, а значит, и доминантно-треугольного графа $G$ верны равенства $i(G) = n_i(G)$ [1; 5] и $\alpha(G) = N_i(G)$ [7]. Отсюда с учетом следствия 3 получаем, что для любого доминантно-треугольного графа $G$ верны равенства $\mathrm{ir}(G) = \gamma(G) = \hat{n}(G)$, $i(G) = n_i(G)$ и $N_i(G) = \alpha(G) = \Gamma(G) = \widehat{N}(G) = \mathrm{IR}(G)$, причем последний набор совпадающих параметров вычисляется за полиномиальное время путем подсчета числа симплициальных клик графа $G$ [15]. Отметим, что наряду с перечисленными в [15] параметрами в указанные нами наборы совпадающих значений вошли также и окрестностные числа.

Как отмечалось выше, задачи ***доминирующее множество*** и ***максимальное ирридантное множество*** являются NP-полными в классе графов верхних границ. Далее в теореме 5 будет установлен результат о сложности аппроксимации этих задач в подклассе графов верхних границ – классе расщепляемых доминантно-треугольных графов.

Напомним, что алгоритм решения задачи минимизации называется $f(n)$-*приближенным*, если для любого примера $x$ размера $n$ этой задачи алгоритм находит такое допустимое решение $y$ со значением $m(x, y)$, что $m(x, y) / \mathrm{opt}(x) \le f(n)$, где $\mathrm{opt}(x)$ – значение оптимального решения для $x$. Если $f(n)$ – константа, то получаем *алгоритм с константным приближением*. Если для оптимизационной задачи существует полиномиальный $f(n)$-приближенный алгоритм решения, то говорят, что задача *аппроксимируется за полиномиальное время с точностью до* $f(n)$.

Классическая оптимизационная задача о наименьшем покрытии множества (или просто *задача о покрытии*) состоит в следующем. Даны множество $S = \{1, 2, \ldots, s\}$ и набор $C = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ непустых его подмножеств такие, что $\cup S_i = S$, где объединение берется по всем $i = 1, 2, \ldots, m$. Совокупность подмножеств $S_j$, $j \in J \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$, называется *покрытием* множества $S$, если $\bigcup_{j \in J} S_j = S$. Требуется найти *наименьшее покрытие*, т. е. покрытие множества $S$ наименьшим числом подмножеств из $C$. Известно [26], что существование полиномиального $(c \ln s)$-приближенного алгоритма для задачи о покрытии, где $c > 0$ – некоторая константа, влечет равенство P = NP, причем этот результат остается верным даже при выполнении ограничения $m \le p(s)$, где $p(s)$ – некоторый фиксированный полином от $s = |S|$.

Т е о р е м а 5. *В предположении* P ≠ NP *для оптимизационной версии каждой из задач* ***доминирующее множество, окрестностное множество*** *и* ***максимальное ирридантное множество*** *не существует полиномиального* $(k \ln n)$*-приближенного алгоритма в классе расщепляемых доминантно-треугольных графов порядка n, где* $k > 0$ *– некоторая фиксированная константа.*

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Задача о покрытии с ограничением $m \le p(s)$ сводится к задаче ***доминирующее множество*** в классе расщепляемых доминантно-треугольных графов (отметим, что графовая конструкция в похожем сведении из [27] (см. также [28]) не обладает доминантно-треугольным свойством). Пусть на вход задачи о покрытии даны множество $S = \{1, 2, \ldots, s\}$

и набор $C = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ его подмножеств, где $m \le p(s)$. К каждому из подмножеств $S_i \in C$, а также к самому множеству $S$ добавим новый элемент $x$, отличный от всех остальных элементов $S$ (это не влияет на размер и состав оптимальных покрытий). Положив $S_i' = S_i \cup \{x\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, построим граф $G$ пересечений системы подмножеств $\{S_i' : i = 1, 2, \ldots, m\} \cup \{\{a\} : a \in S'\}$ множества $S' = S \cup \{x\}$. Нетрудно проверить, что $G$ имеет порядок $n = s + m + 1 \le s + p(s) + 1$ и является расщепляемым доминантно-треугольным графом, причем для некоторого фиксированного $q$ и достаточно больших $s$ будет выполнено соотношение $n \le s^q$. Можно показать, что каждому (в том числе и наименьшему) доминирующему множеству $D$ в графе $G$ соответствует некоторое покрытие множества $S'$ подмножествами, число которых не превышает $|D|$. Обратно, наименьшему покрытию $C'$ множества $S'$ соответствует некоторое доминирующее множество в графе $G$, мощность которого ограничена сверху числом $|C'|$. Следовательно, значения оптимальных решений рассматриваемых задач совпадают.

Зафиксируем $k = c / q$, где $c$ – константа из [26]. Предположим, что существует полиномиальный $(k \ln n)$-приближенный алгоритм для задачи ***доминирующее множество*** в классе расщепляемых доминантно-треугольных графов порядка $n$. С помощью этого алгоритма построим в графе $G$ доминирующее множество $\tilde{D}$, которое отличается по мощности от наименьшего доминирующего множества этого графа не более чем в $k \ln n$ раз. Множеству $\tilde{D}$ будет соответствовать покрытие множества $S'$ подмножествами, отличающееся от наименьшего покрытия не более чем в $k \ln s^q = kq \ln s = c \ln s$ раз. Получили противоречие с тем, что при условии $\mathrm{P} \ne \mathrm{NP}$ не существует полиномиального $(c \ln s)$-приближенного алгоритма для задачи о покрытии, которое и завершает доказательство.

Заметим, что нам неизвестны какие-либо результаты о сложности аппроксимации задач ***окрестностное множество*** и ***максимальное ирридантное множество***, предшествующие теореме 5.

С л е д с т в и е 4. *Задачи* ***доминирующее множество, окрестностное множество*** *и* ***максимальное ирридантное множество*** *являются* NP-*полными в классе расщепляемых доминантно-треугольных графов.*

В [5] установлено, что в предположении $\mathrm{P} \ne \mathrm{NP}$ обе задачи ***независимое доминирующее множество*** и ***независимое окрестностное множество*** одинаково трудны с точки зрения приближенного решения с заданной точностью в классе треугольных графов. Следующая теорема показывает, что найденное ограничение на точность приближенных полиномиальных алгоритмов для этих задач сохраняется и в более узком классе доминантно-треугольных графов.

Т е о р е м а 6. *Задачи независимое* ***доминирующее множество*** *и* ***независимое окрестностное множество*** *являются* NP-*полными в классе доминантно-треугольных графов. В предположении* $\mathrm{P} \ne \mathrm{NP}$ *оптимизационные версии этих задач не могут быть аппроксимированы за полиномиальное время с точностью до* $n^{1-\varepsilon}$ *в классе доминантно-треугольных графов порядка n для любого* $\varepsilon > 0$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф13К-078).

## Литература

1. *Orlovich Y., Zverovich I.* // Electronic Notes in Discrete Math. 2007. Vol. 28. P. 341–348.
2. *McAvaney K., Robertson J., De Temple D.* // Discrete Math. 1993. Vol. 113, N 1–3. P. 131–142.
3. *Anbeek C., De Temple D., McAvaney K., Robertson J.* // Australas. J. Comb. 1997. Vol. 16. P. 285–293.
4. *Kloks T., Lee C.-M., Liu J., Müller H.* // Lect. Notes Comput. Sci. 2003. Vol. 2880. P. 273–283.
5. *Орлович Ю. Л., Гордон В. С., Блажевич Я.* и др. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 1. С. 39–44.
6. *Miklavič Š., Milanič M.* // Discrete Appl. Math. 2011. Vol. 159, N 11. P. 1148–1159.
7. *Orlovich Y., Blazewicz J., Dolgui A.* et al. // Discrete Math. 2011. Vol. 311, N 16. P. 1670–1680.
8. *Levit V. E., Milanič M.* // Discrete Appl. Math. 2014. Vol. 165. P. 205–212.
9. *Payan C.* // Discrete Math. 1980. Vol. 29, N 1. P. 47–52.
10. *Mahadev N. V. R., Peled U. N., Sun F.* // J. Graph Theory. 1994. Vol. 18, N 3. P. 281–299.
11. *Mahadev N. V. R., Peled U. N.* Threshold graphs and related topics. Amsterdam: Elsevier, 1995.
12. *De Temple D., Robertson J. M.* // J. Aust. Math. Soc., Ser. A. 1989. Vol. 47, N 3. P. 391–398.
13. *McMorris F. R., Zaslavsky T.* // J. Combin. Inform. System Sci. 1982. Vol. 7, N 2. P. 134–138.
14. *Skowrońsk M., Sysło M.* // Discrete Appl. Math. 1984. Vol. 7. P. 201–208.

15. *Cheston G. A., Jap T. S.* // J. Graph Algorithms Appl. 2006. Vol. 10, N 2. P. 159–190.
16. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М., 1990.
17. *Berge C.* Graphs and hypergraphs. New York: American Elsevier Publishing Company, 1976.
18. *Bollobás B., Cockayne E. J.* // J. Graph Theory. 1979. Vol. 3, N 3. P. 241–250.
19. *Cockayne E. J., Hedetniemi S. T., Miller D. J.* // Canad. Math. Bull. 1978. Vol. 21. P. 461–468.
20. *Sampathkumar E., Neeralagi P. S.* // Indian J. Pure Appl. Math. 1985. Vol. 16. P. 126–132.
21. *Sampathkumar E., Neeralagi P. S.* // J. Combin. Inf. Syst. Sci. 1994. Vol. 19. P. 139–145.
22. *Cheston G. A., Hare E. O., Hedetniemi S. T., Laskar R. C.* // Congr. Numer. 1988. Vol. 67. P. 105–113.
23. *Lundgren J. R., Maybee J. S.* // Congr. Numer. 1983. Vol. 40. P. 189–193.
24. *Ogawa K., Tagusari S., Tsuchiya M.* // Discrete Math. 2009. Vol. 309. P. 3659–3663.
25. *Cheston G. A., Fricke G.* // Discrete Appl. Math. 1994. Vol. 55. P. 241–258.
26. *Raz R., Safra S.* // Proc. of the 29th annual ACM symp. on theory of computing. New York: ACM Press, 1997. P. 475–484.
27. *Paz A., Moran S.* // Theor. Comput. Sci. 1981. Vol. 15. P. 251–277.
28. *Kann V.* On the approximability of NP-complete optimization problems: Ph. D. thesis / Royal Institute of Technology. Stockholm, 1992.

*Yu. A. KARTYNNIK, Yu. L. ORLOVICH*

kartynnik@gmail.com, orlovich@bsu.by

**DOMINATION TRIANGLE GRAPHS AND UPPER BOUND GRAPHS**

## Summary

In this article we introduce and study a proper subclass of triangle graphs, namely, the domination triangle graphs. A graph $G$ is called a domination triangle graph if for every minimal dominating set $D$ of $G$ and any adjacent vertices $u$ and $v$ not contained in $D$, there exists a vertex $w \in D$ such that the set $\{u, v, w\}$ induces a triangle in $G$. We propose a number of characterizations of domination triangle graphs which show in particular that this class of graphs coincides with a well-known class of upper bound graphs and a class of irredundance triangle graphs. We establish the computational complexity and the complexity of approximation for some independence and domination-related graph-theoretical parameters within domination triangle graphs.