Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 январь–февраль Том 58 № 1

УДК 511.42

Н. В. БУДАРИНА[1], В. В. БЕРЕСНЕВИЧ[2], В. И. БЕРНИК[3]

СОВМЕСТНЫЕ ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ С НЕМОНОТОННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

(Представлена академиком Н. А. Изобовым)

[1]*Дублинский технологический институт, Ирландия*
[2]*Университет г. Йорка, Англия*
[3]*Институт математики НАН Беларуси, Минск*

Поступило 08.01.2014

Введение. В 1964 г. В. Г. Спринджук [1] доказал гипотезу Малера для действительных и комплексных чисел. Он показал, что неравенство

$$|P(x)| < H(P)^{-w},\ w > n, \tag{1}$$

имеет для почти всех $x \in \mathbb{R}$ (в смысле меры Лебега) лишь конечное число решений в полиномах $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P = n$, $H = H(P) = \max_{0 \le j \le n} |a_j|$ – высота P. Этот результат окончательный для степенных функций $\Psi(x) = x^{-w}$, так как с помощью принципа ящиков Дирихле при $w \le n$ можно доказать, что неравенство $|P(x)| < c(n)H(P)^{-w}$ выполняется бесконечно часто для всех $x \in \mathbb{R}$.

В работах [2; 3] было рассмотрено обобщение (1)

$$|P(x)| < \Psi(H(P)), \tag{2}$$

где $\Psi(x)$ – некоторая монотонно убывающая функция положительного аргумента x. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество точек интервала $I \subset \mathbb{R}$, для которых неравенство (2) имеет бесконечно много решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P \le n$, а через $\mu_k A$ меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^k$.

Т е о р е м а 1. *Для* $\mu\mathcal{L}_n(\Psi)$ *справедливо равенство*

$$\mu_1\mathcal{L}_n(\Psi) = \begin{cases} 0 & \sum\limits_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\Psi(H) < \infty, \\ \mu_1 I & \sum\limits_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\Psi(H) = \infty. \end{cases}$$

Для $n = 1$ теорема 1 известна как метрическая теорема Хинчина [4] о приближении действительных чисел рациональными числами. Заметим, что теорема Хинчина в случае сходимости справедлива без требования монотонности функции Ψ. В [5] доказано, что требование монотонности функции Ψ в теореме 1 можно опустить. Работа [5] была обобщена в [6].

После решения задачи (1) Спринджук выдвинул гипотезу [7] о разрешимости системы неравенств

$$\max_{1 \le i \le k} |P(x_i)| < H(P)^{-v},\ 2 \le k < n,\ v > n - k + 1,$$

при $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}$ для почти всех $\overline{x}$ (в смысле k-мерной меры Лебега). Гипотеза была доказана в [8], а затем обобщена на системы неравенств

$$\max_{1 \le i \le k} |P(x_i)| < \Psi(H(P)),\quad \sum_{H=1}^{\infty} \Psi^k(H) H^{n-k} < \infty. \tag{3}$$

Еще более общая, чем (3) система неравенств в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$ рассмотрена как в случае сходимости, так и в случае расходимости [9; 10].

В данной работе мы впервые решаем задачу для совместных приближений без требования монотонности функции Ψ в неравенстве (3) при $k = 2$. Далее через $c_1 = c_1(n), c_2, \ldots$ обозначим величины, зависящие от n и не зависящие от H. Обозначим через $\mathcal{L}_2(\Psi)$ множество $\overline{x}\in\mathbb{R}^2$ для которых система неравенств (3) имеет бесконечное число решений в полиномах $P\in\mathbb{Z}[x]$, $\deg P\le n$.

Т е о р е м а 2. *Пусть $n\ge 5$ и $\Psi(H)$ – функция (не обязательно монотонная) натурального аргумента H такая, что ряд $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi^2(H)H^{n-2}$ сходится. Тогда*

$$\mu_2\mathcal{L}_2(\Psi)=0.$$

Приближения нуля значениями аналитических функций

Пусть $n\ge 3$ и пусть $f_1,\ldots,f_n$ – действительные аналитические функции такие, что $1, f_1,\ldots,f_n$ – линейно независимы над $\mathbb{R}$. Далее, пусть

$$\mathcal{F}=\left\{F(x)=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i f_i(x):(a_0,\ldots,a_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}\setminus\{0\}\right\}.$$

В случае $f_i(x)=x^i$ множество $\mathcal{F}$ состоит из всех ненулевых целочисленных многочленов степени $\le n$. По аналогии с многочленами, определим высоту $F\in\mathcal{F}$ как

$$H(F)=\max_{0\le i\le n}|a_i|.$$

Т е о р е м а 3. *Пусть $v_1, v_2>0$ и $v_1', v_2'\ge -1$. Пусть выполняется неравенство*

$$v_1+v_2+v_1'+v_2'>n-3.$$

Тогда для почти всех $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ система неравенств

$$|F(x_i)|<H(F)^{-v_i},\ |F'(x_i)|<H(F)^{-v_i'}$$

имеет только конечное число решений $F\in\mathcal{F}$.

Доказательство теоремы 3 получается путем обобщения основного результата работы [11].

Доказательство теоремы 2. Случай большой производной

Обозначим через $P_n(H)$ множество целочисленных многочленов P, удовлетворяющих условиям $H(P)=H$ и $\deg P\le n$. Пусть $P_n=\cup_H P_n(H)$. Далее будем полагать, что координата H стоит на j-м месте, где $2\le j\le n$. Поскольку при $n\ge 3$ и $0\le j\le 1$ можем перейти от многочлена P к многочлену $Q(t)=t^nP(1/t)$, где $H(P)=H(Q)$. Такое преобразование сохраняет меру множества точек t, удовлетворяющих неравенству $|P(t)|<\Psi(H(P))$, с точностью до константы $c(n)$. Поэтому, если H – один из коэффициентов a_0 или a_1 многочлена P, то H будет один из коэффициентов $(a_n,\ldots,a_2)$ многочлена Q.

Будем считать, что $\overline{x}=(x_1,x_2)\in\Pi_1=I_1\times I_2\subset\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Тогда в системе неравенств (3) верно неравенство $|P'(x_i)|<2nH,\ i=1,2$. При достаточно малом $\delta>0$ из Π_1 удалим полосу

$$|x_1-x_2|<\delta.$$

Пусть $x\in\mathbb{R}$ и α – ближайший к x корень $P\in P_n$.

Л е м м а [1]. *Справедливы неравенства*

$$|x-\alpha|<n|P(x)||P'(x)|^{-1},\ |x-\alpha|\le 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha)|^{-1},$$

для $P'(x)\ne 0$ и $P'(\alpha)\ne 0$ соответственно.

Из сходимости ряда $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi^2(H)H^{n-2}$ следует, что $\Psi^2(H)=o(H^{-(n-2)})$ и

$$\Psi(H)\ll H^{-(n-2)/2}. \tag{4}$$

Если функция $\Psi(H)$ монотонна, то известно, что $\Psi^2(H)H^{n-2}\ll H^{-1}$ и (4) можно записать в виде $\Psi(H)=o(H^{-(n-1)/2})$. Воспользовавшись такой оценкой, можно доказать теорему 2 при условии

$n \geq 3$. При оценке (4) для $n = 3$ и $n = 4$ нельзя доказать, что порядки значений полинома $P(t)$ в точках x_i и α_i совпадают. В работе [12] применен иной метод для решения метрической задачи для комплексных чисел с немонотонной правой частью. Возможно, его можно использовать при доказательстве теоремы 2 с условием $n \geq 3$, однако это привело бы к значительному техническому усложнению доказательства. Мы решили остановиться на условии $n \geq 5$.

Добавим к (3) условие

$$\min_{1 \leq i \leq 2} |P'(x_i)| \leq H^{-\gamma}, \gamma > 0, \tag{5}$$

которое означает, что одна из производных в (5), например, $P'(x_1)$ не превосходит по модулю $H^{-\gamma}$. Для другой производной $P'(x_2)$ будем использовать тривиальную оценку $|P'(x_2)| < 2nH$. Воспользуемся теоремой 3 при

$$v_1 = v_2 = (n-2)/2, \;\; v_1' = \gamma, \;\; v_2' = -1.$$

Получим неравенство

$$v_1 + v_2 + v_1' + v_2' = n - 3 + \gamma > n - 3.$$

Теперь из теоремы 3 следует, что система неравенств (3) вместе с условием (5) выполняется бесконечно часто только для множества нулевой меры. Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно тривиальное неравенство $|P'(x_1)| < 2nH$ довести до неравенства (5). Сделаем это за несколько шагов.

П р е д л о ж е н и е 1. *Обозначим через* $\mathcal{L}_3(\Psi)$ *множество* $\overline{x} \in \Pi_1$, *для которых система неравенств*

$$\max_{1 \leq i \leq 2} |P(x_i)| < \Psi(H), \;\; H^{1/2} < |P'(x_i)| < 2nH, i = 1, 2, \tag{6}$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[t]$. *Тогда* $\mu_2 \mathcal{L}_3(\Psi) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим $|x_1 - \alpha_1|$ и $|x_2 - \beta_1|$, где α_1 – ближайший корень полинома $P \in P_n(H)$ к x_1, а β_1 – ближайший корень полинома P к x_2. По лемме и (6) имеем

$$|x_1 - \alpha_1| < n|P(x_1)||P'(x_1)|^{-1} < n\Psi(H)H^{-1/2}, \;\; |x_2 - \beta_1| < n\Psi(H)H^{-1/2}. \tag{7}$$

Используем оценки (7) и для многочленов $R(t) = P_2(t) - P_1(t)$ с одинаковыми коэффициентами $\overline{b_1} = (a_n, \ldots, H, \ldots, a_2)$ у P_1, P_2, получим

$$|ax_1 + b| < 4c_5, \;\; |ax_2 + b| < 4c_5, \;\; a \in \mathbb{Z}, a \neq 0,$$

откуда простым подсчетом мер следует предложение 1.

Существенные и несущественные прямоугольники

Обозначим через $\mathcal{L}_{4,\alpha_1}(\Psi)$ множество $\overline{x} \in \Pi_1$, для которых система неравенств

$$\max(|P(x_1)|, |P(x_2)|) < \Psi(H), \;\; H^{5/32} < |P'(\alpha_1)| < 1/2H^{1/2}$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[t]$. Аналогично определим множество $\mathcal{L}_{4,\beta_1}(\Psi)$. Проведем доказательство для множества $\mathcal{L}_{4,\alpha_1}(\Psi)$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Верно равенство*

$$\mu_2 \mathcal{L}_{4,\alpha_1}(\Psi) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Наряду с прямоугольником $\sigma(P)$, определенным в (7), введем прямоугольник $\sigma_2(P)$:

$$|x_1 - \alpha_1| < c_6 H^{-1/2} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \;\; |x_2 - \beta_1| < c_6 H^{-1/2} |P'(\beta_1)|^{-1}.$$

Ясно, что при подходящем $c_6 > 0$ и $n \geq 3$ имеем $\sigma(P) \subset \sigma_2(P)$ и

$$\mu_2 \sigma(P) < c_4^2 c_6^{-2} \Psi^2(H) H \mu_2 \sigma_2(P).$$

Введем вектор $\overline{b_2} = (a_n, \ldots, a_{s_1 - 1}, a_{s_1 + 1}, \ldots, H, \ldots, a_{s_2 - 1}, a_{s_2 + 1}, \ldots, a_1)$, где координата H стоит на j-м месте, $1 \leq j \leq n$. Множество многочленов P с одним и тем же вектором $\overline{b_2}$ объединим в класс

$T_2(\overline{b}_2)$. Ясно, что $\#T_2(\overline{b}_2) < 2^n H^{n-3}$. Прямоугольник $\sigma_2(P_1)$ будем называть существенным, если для любого другого прямоугольника $\sigma_2(P_2)$, $P_2 \neq P_1$, $P_2 \in T_2(\overline{b}_2)$, выполняется неравенство

$$\mu_2(\sigma_2(P_1) \cap \sigma_2(P_2)) < 1/2\mu_2\sigma_2(P_1).$$

Если же найдется полином $P_2 \in T_2(\overline{b}_2)$ такой, что

$$\mu_2(\sigma_2(P_1) \cap \sigma_2(P_2)) \geq 1/2\mu_2\sigma_2(P_1),$$

то прямоугольник $\sigma_2(P_1)$ назовем несущественным.

В случае существенных прямоугольников получаем

$$\sum_{\overline{b}_2} \sum_{P_1 \in T_2(\overline{b}_2)} \mu_2(\sigma(P_1) \ll H\Psi^2(H)H^{n-3} \asymp H^{n-2}\Psi^2(H). \tag{8}$$

Ряд с общим членом (8) сходится, поэтому по лемме Бореля–Кантелли $\mu_2\mathcal{L}_{4,\,\alpha_1}(\Psi) = 0$, если $\overline{x}$ принадлежит бесконечному числу существенных областей.

В случае несущественных прямоугольников на пересечении $\sigma_2(P_1) \cap \sigma_2(P_2)$ разложим многочлены P, P' по формуле Лагранжа и оценим $|P(t)|$, $|P'(t)|$, а затем и $R(t) = P_2(t) - P_1(t) = a_{s_1}t^{s_1} + a_{s_2}t^{s_2} + a_0$ сверху:

$$\max(|R(x_1)|, |R(x_2)|) \ll H^{-5/16}, \ |R'(x_1)| \ll H^{1/2}, \ |R'(x_2)| \ll H.$$

Применим к многочленам R теорему 3. Здесь

$$v_1 = v_2 = 5/16, \ v_1' = -1/2, \ v_2' = -1, \ n = 2, \ d = 2.$$

Из того, что

$$5/8 - 1/2 - 1 = 1/8 - 1 > -1$$

заключаем, что множество $\overline{x} \in \Pi_1$, попадающих в бесконечное число несущественных прямоугольников, имеет нулевую меру.

Малые значения производной и окончание доказательства

Обозначим через $\mathcal{L}_{5,\,\alpha_1,\,\beta_1}(\Psi)$ множество $\overline{x} \in \Pi_1$, для которых система неравенств

$$\max(|P(x_1)|, |P(x_2)|) < \Psi(H),$$

$$H^{-1/6} < |P'(\alpha_1)| \leq H^{5/32}, \ H^{-1/6} < |P'(\beta_1)| < 4nH$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[t]$. Аналогично определим множество $\mathcal{L}_{5,\,\beta_1,\,\alpha_1}(\Psi)$. Проведем доказательство для множества $\mathcal{L}_{5,\,\alpha_1,\,\beta_1}(\Psi)$.

П р е д л о ж е н и е 3. *Справедливо равенство*

$$\mu_2\mathcal{L}_{5,\,\alpha_1,\,\beta_1}(\Psi) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем вектор

$$\overline{b}_3 = (a_n, \ldots, a_{s_1-1}, a_{s_1+1}, \ldots, H, \ldots, a_{s_2-1}, a_{s_2+1}, \ldots, a_{s_3-1}, a_{s_3+1}, \ldots, a_1)$$

и класс векторов с одним и тем же вектором $\overline{b}_3$ обозначим $T_3(\overline{b}_3)$. Ясно, что

$$\#T_3(\overline{b}_3) < 2^n H^{n-4}.$$

Наряду с прямоугольником $\sigma(P)$ рассмотрим прямоугольник $\sigma_3(P)$:

$$|x_1 - \alpha_1| < c_7 H^{-1} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \ |x_2 - \beta_1| < c_7 H^{-1} |P'(\beta_1)|^{-1}.$$

При подходящем c_7 и $n \geq 4$ имеем $\sigma(P) \subset \sigma_3(P)$ и

$$\mu_2\sigma(P) \ll \Psi^2(H)H^2\mu_2\sigma_3(P).$$

При $P \in T_3(\overline{b}_3)$ поделим прямоугольники $\sigma_3(P)$ на существенные и несущественные, и проведем аналогичные как в предложении 2 рассуждения.

Остался случай $|P'(\alpha_1)| \leq H^{-1/6}$. Нетрудно показать, что $|P'(x_1)| < H^{-1/7}$. Это означает, что получили неравенство (5) с $\gamma = -1/7$. Доказательство этого случая проведено после (5). Аналогично рассматривается случай $|P'(\beta_1)| \leq H^{-1/6}$, и поэтому теорема 2 доказана.

Литература

1. *Спринджук В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.
2. *Beresnevich V. V.* // Acta Arith. 1999. Vol. 90. P. 97–112.
3. *Bernik V. I.* // Acta Arith. 1989. Vol. 53. P. 17–28.
4. *Khintchine A. Ya.* // Math. Ann. 1924. Vol. 92. P. 115–125.
5. *Beresnevich V. V.* // Acta Arith. 2005. Vol. 117. P. 71–80.
6. *Budarina N.* // Доклады Академии наук. 2011. Т. 437, № 4. С. 441–443.
7. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. М., 1977.
8. *Берник В. И.* // Изв. Акад. наук СССР, сер. мат. 1980. Т. 44, № 1. С. 24–45.
9. *Bernik V. I., Budarina N. V., Dickinson D.* // Lith. Math. J. 2008. Vol. 48, N 2. P. 158–173.
10. *Bernik V. I., Budarina N. V., Dickinson D.* // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2010. Vol. 149, N 2. P. 193–216.
11. *Beresnevich V. V.* // Ann. of Math. 2012. Vol. 175, N 1. P. 187–235.
12. *Бударина Н.* // Матем. заметки. 2013. Т. 93, вып. 6. С. 812–820.

N. V. BUDARINA, V. V. BERESNEVICH, V. I. BERNIK

buda77@mail.ru; victor.beresnevich@york.ac.uk; bernik@im.bas-net.by

SIMULTANEOUS DIOPHANTINE APPROXIMATIONS WITH THE NON-MONOTONIC RIGHT-HAND SIDE

Summary

In the article it is proved that the analogue of the Khinchine theorem for simultaneous approximations of the points on the plane by algebraic conjugate numbers holds without the monotonicity of the approximation function.