Доклады Национальной академии наук Беларуси
2014 январь–февраль Том 58 № 1

УДК 517.9

Академик И. В. ГАЙШУН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НАД КОЛЬЦОМ ФУНКЦИЙ НА МНОЖЕСТВЕ ГОМОМОРФИЗМОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО КОЛЬЦА В КОЛЬЦО КОНСТАНТ

Институт математики НАН Беларуси, Минск *Поступило 22.01.2014*

Введение. Наличие операции дифференцирования в кольце [1; 2] дает возможность ввести в рассмотрение достаточно общее понятие дифференциального уравнения [2–5]. Однако в таких уравнениях отсутствует независимая переменная («время»), что не позволяет корректно сформулировать многие задачи, хорошо известные в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящем сообщении предлагается один вариант дифференциальных уравнений над кольцом с дифференцированием, в которых роль независимой переменной играют гомоморфизмы в кольцо констант.

1. Основные понятия. Пусть K – ассоциативное кольцо с единицей e и P – его подкольцо с той же единицей. Предположим, что задано нетривиальное дифференцирование [1; 2] $D : P \to K$, т. е. отображение, удовлетворяющее требованиям $D(x + y) = Dx + Dy$, $D(xy) = (Dx)y + xDy$. Элемент Dx называется производной элемента x. Элементы $c \in P$, для которых $Dc = 0$, образуют кольцо $C \subset P$ констант.

Операция нахождения элемента по его производной называется интегрированием. Если для $f \in K$ существует такое $F \in P$, что $DF = f$, то элемент F есть (неопределенный) интеграл или первообразная элемента f; он обозначается

$$F = \int f.$$

Ясно, что первообразная существует тогда и только тогда, когда $f \in \mathrm{Im}D = \{y : y = Dx,\ x \in P\}$. Если F – первообразная элемента f, то первообразной будет и любая сумма $f + c$, при этом такими суммами исчерпываются все первообразные.

2. Кольцо функций на множестве гомоморфизмов в кольцо констант. Пусть T – некоторое множество гомоморфизмов $t : K \to C$, не изменяющих константы, т. е. $tc = c$ $(c \in C)$; оно называется достаточным, если для любых различных элементов $x, y \in K$ найдется такое $t \in T$, что $tx \neq ty$. Заметим, что достаточное множество гомоморфизмов существует не для всякого кольца с дифференцированием.

Пусть множество T достаточно. Обозначим через K' совокупность функций $\varphi : T \to C$, для каждой из которых найдется такое $x \in K$, что $\varphi(t) = tx$. Если на множестве K' определить операции $(\varphi + \psi)(t) = t(x + y)$, $(\varphi + \psi)(t) = t(xy)$ (x и y – элементы из K, задающие функции φ и ψ), то K' превратится в кольцо с единицей $\varepsilon : \varepsilon(t) = te = e$. Кольца K и K' изоморфизмы; изоморфизм осуществляет отображение $x \to \varphi$, где $\varphi(t) = tx$. Совокупность функций $\varphi \in K'$, порожденных элементами $x \in P$, образует подкольцо $P' \subset K'$.

Рассмотрим кольцо $K = C[a, b]$ непрерывных вещественных на отрезке $[a, b]$ функций с обычным дифференцированием и его подкольцо $P = C^1[a, b]$, состоящее из непрерывно дифференцируемых элементов. Кольцо констант в данном случае – это поле $\mathbf{R}$ действительных чисел. Возьмем в качестве T совокупность отображений $C[a, b] \ni \gamma \to \gamma(t) \in \mathbf{R}$ $(t \in [a, b])$. Отображения множества T очевидным образом можно отождествить с независимой переменной $t \in [a, b]$. Это дает основание и в общем случае гомоморфизмы t трактовать как независимую переменную, о которой говорилось во введении.

3. Дифференцирование и интегрирование в кольце K'. Исходя из дифференцирования D, зададим дифференцирование $\delta : P' \to K'$ следующим образом:

$$(\delta\varphi)(t) = t(Dx),$$

где $x \in P$ – элемент, порождающий функцию φ. Кольцо C' констант дифференцирования δ состоит из функций, определяемых элементами $c \in C$. Очевидно, кольца C и C' изоморфны.

Пусть элемент $f \in K$ интегрируем и F – его первообразная. Легко убедиться, что функция $\varphi \in K'$, $\varphi(t) = tF$, интегрируема и ее интеграл равен

$$(\int\varphi)(t) = tF.$$

Выберем какие-либо гомоморфизмы t_0, $t \in T$. Элемент кольца C

$$\int_{t_0}^{t} \varphi = tF - t_0 F \qquad (1)$$

назовем определенным интегралом от t_0 до t функции φ. Если интеграл (1) рассматривать как функцию переменной $t \in T$, то он принадлежит кольцу P' и справедливо равенство

$$\delta\left(\int_{t_0}^{t} \varphi\right) = \varphi(t).$$

4. Дифференциальные уравнения над кольцом K'. Пусть $A(t)$ – $(n \times n)$-матрица с элементами из кольца K' и $\psi(t)$ – некоторый элемент из множества $(K')^n$. Системой линейных дифференциальных уравнений над кольцом K' называется соотношение

$$(\delta\varphi)(t) = A(t)\varphi(t) + \psi(t), \qquad (2)$$

связывающее неизвестную функцию $\varphi \in P'$ и ее производную $\delta\varphi$. Сопоставим системе (2) дифференциальное уравнение

$$(\delta\Phi)(t) = A(t)\Phi(t)$$

над кольцом $(n \times n)$-матриц. Обратимое решение этого уравнения называется фундаментальной матрицей системы (2). Отметим, что фундаментальная матрица существует не всегда; более того, может оказаться, что для некоторого кольца K' нет ни одной системы (2), обладающей фундаментальной матрицей. Для наличия таких систем необходимо и достаточно существование обратимых $(n \times n)$-матриц над кольцом P'.

Задача нахождения решения $\varphi(t)$ системы (2), удовлетворяющего начальному условию $\varphi(t_0) = \varphi_0$, называется задачей Коши. Для разрешимости такой задачи при любом $\varphi_0 \in C^n$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi(t)^{-1}\psi(t)$ была интегрируемой. В этом случае соответствующее решение определяется формулой

$$\varphi(t) = \varphi(t, t_0, \varphi_0) = \Phi(t)\left(\Phi(t_0)^{-1}\varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)^{-1}\varphi(t)\right).$$

Если $\psi(t) \in (C')^n$ и $A(t)$ – матрица над кольцом C', то система (2) называется стационарной. Пусть $\alpha : K \to K$ – дифференциальный автоморфизм (т. е. $\alpha(Dx) = D(\alpha x)$), для которого $\alpha P \subseteq P$ и $\alpha c = c$ ($c \in C$). Тогда отображение α', ставящее в соответствие функции $\varphi(t) = tx$ функцию $\gamma(t) = t(\alpha x)$, есть дифференциальный автоморфизм кольца K'. Легко убедиться, что если $\varphi(t)$ – решение стационарной системы (2), то решением является и функция $(\alpha'\varphi)(t)$.

5. Наблюдаемость дифференциальных систем. Продемонстрируем целесообразность предложенной трактовки дифференциальных уравнений над кольцом на примере задачи наблюдаемости. Предположим, что в системе (2) $\psi(t) = 0$ и задан выходной вектор

$$y(t) = L(t)\varphi(t), \qquad (3)$$

где $L(t)$ – матрица размеров $m \times n$ над кольцом K'. Система (2) называется наблюдаемой по выходу (3) на множестве наблюдений $T_0 \subset T$, если при различных $\varphi_0, \varphi_0^* \in C^n$ функции $y(t, \varphi_0)$, $y(t, \varphi_0^*)$

отличаются хотя бы в одной точке множества T_0; здесь $y(t, \varphi_0) = L(t)\varphi(t, \varphi_0)$ – выход, порожденный начальным условием $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Заметим, что в отличие от понятия наблюдаемости, изученного в [4; 5], здесь явным образом фигурирует множество наблюдений T_0, которое всегда присутствует в случае обыкновенных дифференциальных уравнений [6].

Если существует фундаментальная матрица $\Phi(t)$, то справедливо следующее утверждение: наблюдаемость на множестве T_0 имеет место тогда и только тогда, когда для любого ненулевого $q \in C^n$ найдется такая точка $\tau = \tau(q) \in T_0$, что

$$L(\tau)\Phi(\tau)q \neq 0.$$

Сформулированный критерий есть обобщение хорошо известного неявного критерия наблюдаемости линейных обыкновенных дифференциальных систем (см., напр., [6]).

Литература

1. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. М., 1973.
2. *Капланский И.* Введение в дифференциальную алгебру. М., 1959.
3. *Гайшун И. В.* // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1463–1471.
4. *Гайшун И. В.* // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 6. С. 33–35.
5. *Гайшун И. В.* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 665–672.
6. *Гайшун И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск, 1999.

I. V. GAISHUN

math@im.bas-net.by

DIFFERENTIAL EQUATIONS OVER THE RING OF FUNCTIONS ON A SET OF HOMOMORPHISMS OF THE DIFFERENTIAL RING TO THE RING OF CONSTANTS

Summary

Let (K, D) be a differential ring and T be some set of homomorphism $t : K \to C$ (C be ring constants) that for $x, y \in K$, $x \neq y$, there exists $t \in T$, $tx \neq ty$. Denote the ring K' of the functions $\varphi : t \to tx$ ($x \in K$) and let $(\delta\varphi)(t) = t(Dx)$. Some properties of the linear differential equation $(\delta\varphi)(t) = A(t)\varphi(t) + \psi(t)$ over the ring K' are obtained.