**Доклады Национальной академии наук Беларуси**

**2014** **март–апрель** **Том 58 № 2**

## *МАТЕМАТИКА*

*УДК 519.1*

*О. И. ДУГИНОВ*

# ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ СЛУЧАИ ЗАДАЧИ О НАИМЕНЬШЕМ ПОКРЫТИИ ВЕРШИН ГРАФА БИКЛИКАМИ

*(Представлено академиком И. В. Гайшуном)*

*Институт математики НАН Беларуси, Минск* *Поступило 05.03.2014*

**Введение**. *Бикликой* в обыкновенном графе называется подграф, изоморфный некоторому связному полному двудольному графу. *Бикликовым покрытием вершин* графа называется множество $S$ биклик этого графа такое, что каждая вершина графа содержится хотя бы в одной биклике из $S$. Если при этом любые две биклики из $S$ не имеют общих вершин, то $S$ называется *бикликовым разбиением вершин* графа $G$. Известно [1], что любое бикликовое покрытие вершин графа $G$ можно преобразовать за полиномиальное время в бикликовое разбиение вершин графа $G$ без увеличения количества биклик.

Л е м м а 1 ([1]). *Для любого графа $G$ следующие два утверждения равносильны*:

*1. Существует бикликовое покрытие вершин графа $G$, состоящее из не более чем $k$ биклик*;

*2. Существует бикликовое разбиение вершин графа $G$, состоящее из не более чем $k$ биклик*.

Бикликовое покрытие (разбиение) вершин графа $G$ называется *наименьшим*, если оно содержит наименьшее число биклик. Количество биклик в наименьшем бикликовом покрытии вершин графа $G$ называется *числом бикликового покрытия вершин* графа $G$ и обозначается через $b(G)$. Из леммы 1 следует, что количество биклик в наименьшем бикликовом разбиении вершин графа $G$ равно $b(G)$.

Задача нахождения наименьшего бикликового разбиения вершин графа находит применение в области биологии, управлении сетями, при анализе данных и электронной торговле [1–5]. Эта задача полиномиально эквивалентна задаче нахождения наименьшего бикликового покрытия вершин графа [1]. Известно, что последняя задача является NP-трудной в классе двудольных графов [1; 2].

В данной работе рассматривается задача нахождения наименьшего бикликового покрытия вершин графа в классе двудольных графов, которые не содержат порожденных подграфов, изоморфных простому циклу на шести вершинах. Мы покажем, что данная задача в классе $C_6$-свободных двудольных графов тесно связана с задачами вершинных раскрасок графа. На основе этой связи мы построим полиномиальный алгоритм, который решает рассматриваемую графовую задачу в двух подклассах хордальных двудольных графов – двудольные перестановочные графы и двудольные дистанционно-наследуемые графы.

**Основные определения и предварительные сведения**. Рассматриваются только конечные неориентированные графы $G = (V, E)$ без кратных ребер и петель с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$. Используется стандартная теоретико-графовая терминология (см., напр., [6; 7]). Множество вершин графа $G$, смежных с вершиной $v \in V$, называется *окружением* вершины $v$ в графе $G$ и обозначается как $N_G(v)$. Расстояние между двумя вершинами $u$, $v$ в графе $G$ будем обозначать как $d_G(u, v)$. Пусть $v$ – вершина и $S \subseteq V \setminus \{v\}$ – непустое подмножество вершин графа $G$. Тогда тот факт, что в графе $G$ вершина $v$ смежна с каждой вершиной из множества $S$ будем обозначать как $v \sim S$. Подграф графа $G$, порожденный подмножеством вершин $S \subseteq V$, обозначается как $G[S]$. Множество $S$ клик графа $G$ называется *кликовым покрытием вершин* графа $G$, если каждая вершина $G$ содержится хотя бы в одной клике из $S$. Наименьшее число клик в кликовом покрытии вершин графа $G$ будем обозначать как $\Theta(G)$. Хорошо известно, что $\Theta(G) = \chi(\overline{G})$, где $\chi(\overline{G})$ – хроматическое число дополнения графа $G$.

Пусть $F$ – это семейство графов. Тогда граф называется *$F$-свободным*, если он не содержит порожденных подграфов, изоморфных графам из $F$. Как обычно, полный граф, простая цепь и простой цикл на $n$ вершинах обозначаются как $K_n$, $P_n$, $C_n$ соответственно. *Хордальным двудольным графом* называется двудольный граф, который не содержит простых циклов длины не меньше 6 в качестве порожденных подграфов. (*Двудольным*) *перестановочным графом* называется (двудольный) граф $G$ такой, что существует две перестановки $P$, $Q$ множества его вершин $V(G)$ такие, что $uv \in E(G)$ тогда и только тогда, когда в $P$ вершина $u$ предшествует вершине $v$, а в $Q$ вершина $v$ предшествует вершине $u$. (*Двудольным*) *дистанционно-наследуемым графом* называется (двудольный) граф $G$ такой, что для каждого связного порожденного подграфа $H$ графа $G$ выполняется $d_H(u, v) = d_G(u, v)$ для любых двух вершин $u, v \in V(H)$. Класс двудольных перестановочных графов и класс двудольных дистанционно-наследуемых графов содержатся в классе хордальных двудольных графов [7].

Приведем вспомогательное утверждение, которое потребуется далее.

Л е м м а 2. *Пусть граф $G = (V, E)$ является $K_3$-свободным и $S \subseteq V$ – независимое множество в графе $G$, которое удовлетворяет следующим условиям*:

*1.* $|S| \geq 3$;

*2.* $d_G(u, v) = 2$ *для любых двух различных вершин* $u, v \in S$;

*3.* $\bigcap_{u \in S} N_G(u) = \varnothing$, *т. е. в графе $G$ не существует вершины $w \in V \setminus S$ такой, что $w \sim S$.*

*Тогда существуют три различные вершины $x, y, z \in S$, которые содержатся в некотором порожденном подграфе графа $G$, изоморфном $C_6$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем по индукции по числу вершин в независимом множестве $S$ графа $G$, не содержащего $K_3$ в качестве порожденного подграфа.

Пусть $|S| = 3$ и $S = \{x, y, z\}$ – независимое множество в графе $G$. Покажем, что существует порожденный подграф графа $G$, изоморфный $C_6$, который содержит вершины $x$, $y$, $z$. По условию $d_G(x, y) = 2$, $d_G(y, z) = 2$, $d_G(x, z) = 2$ и не существует вершины графа $G$, смежной одновременно с каждой вершиной $x$, $y$, $z$. Тогда существуют три попарно различные вершины $w_1, w_2, w_3 \in V \setminus S$ такие, что $w_1 \sim \{x, y\}$, $w_2 \sim \{y, z\}$ и $w_3 \sim \{x, z\}$ (рис. 1). Вершины $w_1$, $w_2$, $w_3$ попарно несмежны в графе $G$, поскольку в противном случае граф $G$ содержит подграф, изоморфный $K_3$. Следовательно, подграф графа $G$, порожденный множеством вершин $\{x, y, z, w_1, w_2, w_3\}$, изоморфен $C_6$ и содержит вершины $x$, $y$, $z$.

Пусть $k > 3$ – натуральное число. Рассмотрим произвольное $k$-вершинное независимое множество $S$ графа $G$, которое удовлетворяет всем условиям леммы. Покажем, что и в этом случае существуют три различные вершины $x, y, z \in S$, которые содержатся в некотором порожденном подграфе графа $G$, изоморфном $C_6$. Возможны только следующие два случая:

*i*) существует множество $S' \subset S$ такое, что $|S'| = |S| - 1$ и $\bigcap_{u \in S'} N_G(u) = \varnothing$;

*ii*) для любого множества $S' \subset S$ такого, что $|S'| = |S| - 1$ справедливо $\bigcap_{u \in S'} N_G(u) \neq \varnothing$.

В случае *i*) множество вершин $S'$ является независимым в графе $G$ и удовлетворяет всем условиям леммы. По индуктивному предположению, в множестве вершин $S'$ (а значит и в множестве вершин $S$) существуют три различные вершины $x$, $y$ и $z$, которые содержатся в некотором порожденном подграфе графа $G$, изоморфном $C_6$.

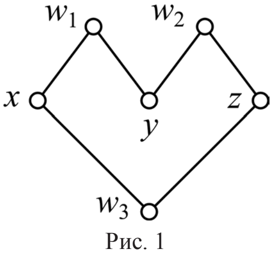

Рис. 1

Рассмотрим случай *ii*). Пусть $x$, $y$, $z$ – это три произвольные различные вершины, принадлежащие независимому множеству $S$. Тогда в графе $G$ существуют вершины $w_1$, $w_2$ и $w_3$ такие, что

$$w_1 \in \bigcap_{u \in S \setminus \{z\}} N_G(u), \;\; w_2 \in \bigcap_{u \in S \setminus \{x\}} N_G(u), \;\; w_3 \in \bigcap_{u \in S \setminus \{y\}} N_G(u).$$

Заметим, что в графе $G$ вершины $w_1$, $w_2$, $w_3$ являются попарно различными и вершина $w_1$ несмежна с вершиной $z$, вершина $w_2$ несмежна с вершиной $x$ и вершина $w_3$ несмежна с вершиной $y$, так как в противном случае нарушается условие $\bigcap_{u \in S} N_G(u) = \varnothing$ (рис. 2). Более того, в графе $G$ вершины $w_1$, $w_2$ и $w_3$ попарно несмежны (в противном случае граф $G$ содержал бы подграф, изоморфный $K_3$, что невозможно, так как по условию граф $G$ является $K_3$-свободным). Следовательно, подграф графа $G$, порожденный множеством вершин $\{x, y, z, w_1, w_2, w_3\}$, изоморфен $C_6$ и содержит вершины $x, y, z$. Лемма доказана.

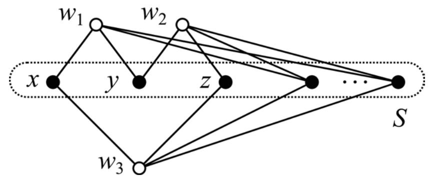

Рис. 2

**Характеризация бикликового покрытия вершин графа в терминах вершинной раскраски графа**. В этом разделе дадим новые свойства биклик графа, на основе которых построим характеризацию бикликового покрытия вершин $(K_3, C_5, C_6)$-свободного графа в терминах вершинных раскрасок графа.

Т е о р е м а 1. *Пусть граф* $G = (V, E)$ *является* $(K_3, C_5)$-*свободным. Если подмножество вершин* $S \subseteq V$ *такое, что для любых двух вершин* $u, v \in S$ *выполняется* $d_G(u, v) \le 2$ *и порожденный подграф* $G[S]$ *графа* $G$ *содержит хотя бы одно ребро, то* $G[S]$ *является бикликой графа* $G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G = (V, E)$ – это $(K_3, C_5)$-свободный граф и подмножество вершин $S \subseteq V$ такое, что $d_G(u, v) \le 2$ для любых двух вершин $u, v \in S$ и граф $G[S]$ содержит ребро $e = ab$.

Методом от противного покажем, что $G[S]$ является связным графом. Пусть граф $G[S]$ несвязен, т. е. существует вершина $w \in S$ такая, что в графе $G[S]$ нет $(a, w)$-цепей и $(b, w)$-цепей. Так как $d_G(a, w) \le 2$ и $d_G(b, w) \le 2$, то в графе $G$ существует $(a, w)$-цепь и $(b, w)$-цепь, длины которых равны 2. Возможны только следующие два случая:

*а*) $(a, w)$-цепь и $(b, w)$-цепь имеют две общие вершины;

*б*) $(a, w)$-цепь и $(b, w)$-цепь имеют ровно одну общую вершину (рис. 3). Нетрудно видеть, что в обоих случаях граф $G$ содержит $C_5$ или $K_3$ в качестве порожденных подграфов, что невозможно, поскольку по условию граф $G = (V, E)$ является $(K_3, C_5)$-свободным. Следовательно, граф $G[S]$ является связным.

Известно [8, с. 129], что связный граф является полным двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит $K_3$ и $P_4$ в качестве порожденных подграфов. Таким образом, для того чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно показать, что граф $G[S]$ является $(K_3, P_4)$-свободным. Так как граф $G$ не содержит $K_3$ в качестве порожденного подграфа, то граф $G[S]$ также не содержит $K_3$ в качестве порожденного подграфа. Предположим, что в графе $G[S]$ существует порожденный подграф, изоморфный $P_4$, т. е. существует подмножество $S' \subseteq S$ такое, что $S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и граф $G[S']$ изоморфен $P_4$. Не теряя общности, пусть множество ребер графа $G[S']$ состоит из ребер $x_1x_2$, $x_2x_3$ и $x_3x_4$. Так как $d_G(x_1, x_4) \le 2$, то существует вершина $y$ графа $G$, которая смежна с обеими вершинами $x_1$ и $x_4$. Нетрудно видеть, что граф $G[S' \cup \{y\}]$ или изоморфен $C_5$, или содержит $K_3$ в качестве порожденного подграфа, что невозможно, так как граф $G$ является $(K_3, C_5)$-свободным. Поэтому, граф $G[S]$ не содержит $P_4$ в качестве порожденного подграфа. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть граф* $G = (V, E)$ *является* $(K_3, C_5, C_6)$-*свободным и* $S \subseteq V$ – *непустое подмножество вершин графа* $G$ *такое, что для любых двух вершин* $u, v \in S$ *выполняется* $d_G(u, v) \le 2$. *Тогда порожденный подграф* $G[S]$ *графа* $G$ *является или бикликой графа* $G$, *или пустым графом таким, что существует вершина* $w \in V \setminus S$ *такая, что* $w \sim S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G = (V, E)$ – это $(K_3, C_5, C_6)$-свободный граф и $S \subseteq V$ – непустое подмножество вершин графа $G$ такое, что $d_G(u, v) \le 2$ для любых $u, v \in S$.

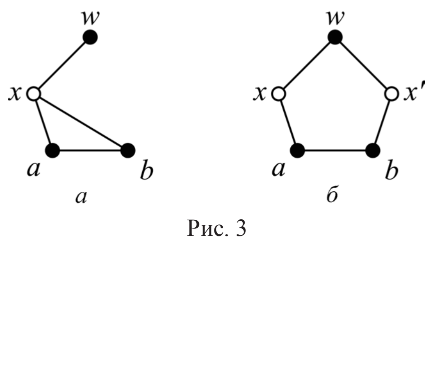

Рис. 3

Если $|S| = 1$, то, по определению, $G[S]$ является бикликой графа $G$.

Пусть $|S| \ge 2$. Если граф $G[S]$ содержит хотя бы одно ребро, то $G[S]$ является бикликой графа $G$. Это непосредственно следует из теоремы 1. Пусть теперь $G[S]$ – пустой граф, т. е. $S$ является независимым множеством в графе $G$. Покажем, что в этом случае существует вершина $w \in V \setminus S$ такая, что $w \sim S$. Для этого рассмотрим два случая: $|S| = 2$ и $|S| \geq 3$. Пусть $|S| = 2$ и $S = \{x, y\}$. Так как $G[S]$ является пустым графом и $d_G(x, y) \leq 2$, то в графе $G$ существует $(x, y)$-цепь длины два. Следовательно, существует вершина $w \in V \setminus \{x, y\}$ смежная в графе $G$ с вершиной $x$ и с вершиной $y$. Пусть теперь $|S| \geq 3$ и не существует вершины $w \in V \setminus S$ такой, что $w \sim S$, т. е. $\bigcap_{u \in S} N_G(u) = \varnothing$. В этом случае, согласно лемме 2, в графе $G$ существует порожденный подграф, изоморфный $C_6$, что невозможно, поскольку $C_6$ является одним из запрещенных порожденных подграфов для графа $G$. Следовательно, существует вершина $w \in V \setminus S$ такая, что $w \sim S$. Теорема доказана.

Теорема 2 дает возможность охарактеризовать бикликовое покрытие вершин $(K_3, C_5, C_6)$-свободного графа в терминах вершинной раскраски графа.

О п р е д е л е н и е. Пусть $G = (V, E)$ – граф и $k$ – натуральное число. Функция $c: V \to \{1, 2, ..., k\}$ называется *гипердистанционной раскраской* графа $G$ (в $k$ цветов), если $c(u) \neq c(v)$ для любых двух вершин $u, v \in V$ таких, что $d_G(u, v) > 2$. Наименьшее число $k$, при котором для графа $G$ существует гипердистанционная раскраска в $k$ цветов будем называть *гиперхроматическим числом* графа $G$ и обозначать как $\chi_H(G)$.

Л е м м а 3. *Для любого графа G выполняется* $\chi_H(G) \leq b(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{B_1, B_2, \ldots, B_r\}$ – бикликовое покрытие вершин графа $G$. Рассмотрим функцию $c: V(G) \to \{1, 2, ..., r\}$, которая определяется так: для каждой вершины $u \in V(G)$ положим $c(u)$ равным наименьшему $i$, для которого биклика $B_i$ содержит вершину $u$. Функция $c$ является гипердистанционной раскраской графа $G$. Это следует из следующего факта: любые две вершины, принадлежащие одной биклике графа, в этом графе находятся на расстоянии не более 2. Действительно, если $c(u) = c(v)$, то существует биклика графа $G$, которая содержит вершины $u$ и $v$ и, как следствие этого, $d_G(u, v) \leq 2$. Если $r = b(G)$, то существует гипердистанционная раскраска $c$ графа $G$ в не более чем $b(G)$ цветов. Следовательно, $\chi_H(G) \leq b(G)$. Лемма доказана.

Отметим, что существуют графы, для которых неравенство из леммы 3 является строгим. Например, $\chi_H(C_5) = 1$, $b(C_5) = 2$ и следовательно, $\chi_H(C_5) < b(C_5)$; $\chi_H(\overline{P}_5) = 1$, $b(\overline{P}_5) = 2$ и, таким образом $\chi_H(\overline{P}_5) < b(\overline{P}_5)$. На рис. 4 изображен двудольный граф $G^*$, для которого $\chi_H(G^*) < b(G^*)$. Несложно видеть, что $\chi_H(G^*) = 2$ (гипердистанционная раскраска графа $G^*$ в два цвета определяется так: «черным» вершинам поставим в соответствие 1, а «белым» вершинам – 2) и $b(G^*) = 3$. Следующая теорема указывает класс графов такой, что равенство $\chi_H(G) = b(G)$ справедливо для любого графа $G$ из этого класса графов.

Т е о р е м а 3. *Для любого* $(K_3, C_5, C_6)$*-свободного графа G выполняется* $\chi_H(G) = b(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство $\chi_H(G) \leq b(G)$ следует из леммы 3. Для того чтобы доказать неравенство в другую сторону, рассмотрим гипердистанционную раскраску $c: V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$ для $(K_3, C_5, C_6)$-свободного графа $G$. Пусть $V_i = \{u \in V(G) : c(u) = i\}$, где $i = 1, 2, \ldots, k$. Без потери общности можно предполагать, что $V_i \neq \varnothing$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$.

Согласно теореме 2, порожденный подграф $G[V_i]$ графа $G$ является или бикликой графа $G$, или пустым графом, который удовлетворяет следующему условию: существует вершина $w_i \in V(G) \setminus V_i$ такая, что $w_i \sim V_i$ в графе $G$. В первом случае все вершины из множества $V_i$ содержатся в биклике $G[V_i]$ графа $G$, которую обозначим $B_i$. Во втором случае все вершины из множества $V_i$ содержатся в биклике $B_i = G[V_i \cup \{w_i\}]$. Таким образом, для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ существует биклика $B_i$, которая содержит все вершины из множества $V_i$. Следовательно, множество биклик $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ является бикликовым покрытием вершин графа $G$. Положив $k = \chi_H(G)$, приходим к существованию бикликового покрытия вершин графа $G$, которое состоит из $\chi_H(G)$ биклик. Поэтому, $b(G) \leq \chi_H(G)$. Теорема доказана.

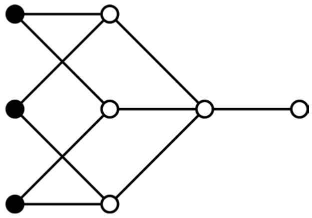

Рис. 4

Для графа $G = (V, E)$ всегда можно построить граф $G' = (V, E')$ такой, что $uv \in E'$ тогда и только тогда, когда $d_G(u, v) > 2$. Отметим, что граф $G'$ изоморфен графу $G^2$ (дополнение квадрата графа $G$). Непосредственно из определений следует, что $\chi_H(G) = \chi(G')$, где $\chi(G')$ –

хроматическое число графа $G'$. Следующие два утверждения непосредственно следуют из теоремы 3.

У т в е р ж д е н и е 1. *Для любого* ($K_3$, $C_5$, $C_6$)*-свободного графа G выполняется*

$$b(G) = \chi(\overline{G^2}).$$

У т в е р ж д е н и е 2. *Для любого* ($K_3$, $C_5$, $C_6$)*-свободного графа G выполняется*

$$b(G) = \Theta(G^2).$$

**Полиномиальная разрешимость задачи в классе двудольных перестановочных графов и двудольных дистанционно-наследуемых графов**. Из утверждения 1 следует, что вычисление значения параметра $b(G)$ для $C_6$-свободного двудольного графа $G$ равносильно вычислению хроматического числа $\chi(\overline{G^2})$. Если значение параметра $\chi(\overline{G^2})$ может быть найдено за полиномиальное время, то значение параметра $b(G)$ также может быть вычислено за полиномиальное время. Более того, по правильной раскраске графа $\overline{G^2}$ в $\chi(\overline{G^2})$ цветов за полиномиальное время можно восстановить наименьшее бикликовое покрытие вершин графа $G$. Это следует из доказательства теоремы 3.

Т е о р е м а 4. *Задача нахождения наименьшего бикликового покрытия вершин графа решается за полиномиальное время в классе двудольных перестановочных графов и в классе двудольных дистанционно-наследуемых графов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Двудольные перестановочные графы и двудольные дистанционно-наследуемые графы являются $C_6$-свободными двудольными графа. Это означает, что нахождение наименьшего бикликового покрытия вершин графа $G$ в случае, когда граф $G$ является двудольным перестановочным или двудольным дистанционно-наследуемым сводится к нахождению правильной раскраски графа $\overline{G^2}$ в наименьшее число цветов или кликового покрытия вершин графа $G^2$, которое содержит наименьшее число клик.

1. Пусть $G = (V, E)$ – произвольный двудольный перестановочный граф. Тогда граф $G$ является двудольным графом косравнимости [7, с. 93]. Дамашке в работе [9] доказал, что класс графов косравнимости замкнут относительно графовой операции возведения в степень. Поэтому $G^2$ является графом косравнимости и $\overline{G^2}$ – соответственно, графом сравнимости, для которого хроматическое число (вместе с оптимальной правильной раскраской) может быть найдено за линейное время, при условии, что граф задан в виде списков смежности [10].

2. Пусть теперь $G = (V, E)$ – произвольный двудольный дистанционно-наследуемый граф. Известно [7, с. 164], что четная степень любого дистанционно-наследуемого графа является хордальным графом. Таким образом, $G^2$ – хордальный граф. Известно, что задача нахождения наименьшего (по мощности) кликового покрытия вершин хордального графа разрешима за линейное время [11]. Теорема доказана.

**Заключение**. В работе рассмотрена задача нахождения наименьшего бикликового покрытия вершин графа. Доказано, что эта задача решается за полиномиальное время в классе двудольных перестановочных графов и в классе двудольных дистанционно-наследуемых графов. Открытым вопросом остается сложностной статус данной графовой задачи в классе хордальных двудольных графов.

## Литература


1. *Fleischner H., Mujuni E., Paulusma D., Szeider S.* // Theoretical Computer Science. 2009. Vol. 410. P. 2045–2053.
2. *Heydari M. H., Morales L., Shields C. O. jr., Sudborough I. H.* // Proceedings of 40th Annual Hawaii International Conference on System Sciences. 2007. P. 270.
3. *Bein D., Morales D., Bein W.* et al. // Proceedings of 41th Hawaii International Conference on System Sciences. 2008. P. 475.
4. *Zhilin Z., Wang P.* // Applied Mechanics and Materials. 2010. Vol. 40–41. P. 189–194.
5. *Zhao M. T.* // Advanced Materials Research. 2013. Vol. 710. P. 687–691.
6. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М., 2008.

7. *Brandstädt A., Le V. B., Spinrad J.* Graph classes: a survey. SIAM. 1999.
8. *Fishburn P., Hammer P.* // Discrete Mathematics. 1996. Vol. 160. P. 127–148.
9. *Damaschke P.* // Discrete Applied Mathematics. 1992. Vol. 35. P. 67–72.
10. *McConnel R., Spinrad J.* // Proceedings of the eight annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms. 1997. P. 19–25.
11. *Gavril F.* // SIAM J. on Computing. 1972. Vol. 1. P. 180–187.

*O. I. DUGINOV*

oduginov@gmail.com

**POLYNOMIALLY SOLVABLE CASES OF THE MINIMUM BICLIQUE VERTEX-COVER PROBLEM**

## Summary

The problem of covering the vertex set of a simple graph with a minimum number of complete bipartite subgraphs is studied. It is well known that this problem is NP-complete even for bipartite graphs. This article gives a polynomial time algorithm for solving the considered graph problem when the graph is bipartite permutation or bipartite distance-hereditary.