Доклады Национальной академии наук Беларуси
2014 март–апрель Том 58 № 2

УДК 517.983

П. П. ЗАБРЕЙКО, А. В. МИХАЙЛОВ

ОБ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ М. А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО НА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Белорусский государственный университет, Минск *Поступило 05.03.2014*

В работе М. А. Красносельского [1] (см. также [2]) было показано, что для уравнения

$$x = Ax + f \tag{1}$$

с самосопряженным оператором A в гильбертовом пространстве X, удовлетворяющим условию $\|A\| \le 1$ и не имеющим –1 собственным значением, последовательные приближения

$$x_{n+1} = Ax_n + f \quad (n = 1, 2, ...) \tag{2}$$

при любом начальном условии $x_0 \in X$ сходятся к одному из решений этого уравнения, если эти решения существуют. Представляет интерес вопрос о том, насколько предположение о самосопряженности оператора является существенным для этого утверждения.

Из равенств (1)–(2) немедленно следует $x_{n+1} - x_* = A(x_n - x_*)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ и поэтому

$$x_n - x_* = A^n(x_0 - x_*) \quad (n = 0, 1, 2, ...). \tag{3}$$

Тем самым, вопрос о справедливости утверждения теоремы М. А. Красносельского сводится к изучению поведения итераций A^n $(n = 0, 1, 2, ...)$ оператора A.

Цель работы – описать классы линейных операторов A в гильбертовом и банаховом пространствах X, для которых утверждения теоремы М. А. Красносельского верны. Естественно, представляет интерес только случай, когда $\|A\| \ge 1$ и $\rho(A) = 1$.

1. В первую очередь, естественно попытаться распространить утверждение теоремы М. А. Красносельского на нормальные операторы. При этом естественно ожидать, что вместо условия о том, что –1 не является собственным значением оператора A, предполагать что собственными значениями A не являются все отличные от 1 комплексные числа с абсолютной величиной 1. Однако уже среди унитарных операторов, являющихся, очевидно, нормальными и для которых утверждение теоремы М. А. Красносельского конечно не верно, есть операторы без собственных значений на единичной окружности. Простейшим примером такого оператора является оператор $Ax(t) = e^{it}x(t)$, действующий в пространстве $L_2(S)$ комплекснозначных функций, определенных на единичной окружности.

Напомним, что в гильбертовом пространстве X оператор A называется *нормальным*, если он коммутирует со своим сопряженным $A^*A = AA^*$; как нетрудно видеть, это эквивалентно тому, что коммутируют между собой самосопряженная и кососопряженная части A_s и A_a оператора

$$A_s = \frac{A + A^*}{2}, \quad A_a = \frac{A - A^*}{2}.$$

Основными результатами о нормальных операторах являются теорема о спектральном разложении нормальных операторов и теорема о полярном представлении нормальных операторов.

Первая из них (см. [3; 4]) формулируется следующим образом: для каждого линейного нормального оператора A существует определенная на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функция $P(\cdot)$ со значениями в пространстве самосопряженных операторов, обладающая свойствами *i*. При любых $x, y \in X$ скалярная мера $(P(\cdot)x, y)$ регулярна и счетно аддитивна;

ii. Мера $P(\cdot)$ коммутирует с операторами A и A^*;

iii. Для любой борелевской функции $f(\cdot)$, определенной на спектре $\mathrm{sp}A \cup \mathrm{sp}A^*$, справедливы равенства

$$f(A)x = \int_{\mathbb{C}} f(\lambda) dP(\lambda)x,$$

$$\|f(A)x\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 (dP(\lambda)x, x).$$

Вторая теорема (см. [3; 4]) формулируется следующим образом: каждый нормальный оператор представим единственным образом в виде

$$A = UB,$$

где B – неотрицательно определенный и самосопряженный, а U – унитарный оператор, коммутирующие между собой.

Пусть $\|A\| = 1$. Положим $X_0 = \mathrm{Fix}\ A$ (т. е. X_0 – подпространство X собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению 1) и $X^0 = (X_0)^{\perp}$.

Л е м м а 1. *Пусть A – нормальный оператор. Тогда подпространство X^0 инвариантно для оператора A.*

Действительно, по определению $X^0 = \{x : (x, h) = 0 (h = Ah)\}$. Но в силу нормальности A оказывается справедливым и равенство $X_0 = \mathrm{Fix}\ A$. В самом деле,

$$\|h - A^*h\|^2 = ((I - A^*)h, (I - A^*)h) = ((I - A)(I - A^*)h, h) = ((I - A - A^* + AA^*)h, h)$$

$$((I - A^* - A + A^*A)h, h) = ((I - A^*)(I - A)h, h) = ((I - A)h, (I - A)h) = \|h - Ah\|^2.$$

Теперь остается заметить, что из $x \in X^0$ при $h \in \mathrm{Fix}\ A^* = \mathrm{Fix}\ A$ следует $(Ax, h) = (x, A^*h) = (x, h) = 0$, т. е. $Ax \in X^0$.

Из проведенных рассуждений вытекает, что оператор A разлагается в ортогональную сумму $A_0 \oplus A^0$ операторов $A_0 = AP_0$ и $A^0 = P^0$, где P_0 и P^0, соответствующие разложению пространства X в ортогональную сумму $X = X_0 \oplus X^0$. Более того, по построению $A_0 = P_0$ и 1 не является собственным вектором оператора A^0. Поэтому справедливы равенства $A^n = P_0 + A^n P^0$ $(n = 0, 1, 2, ...)$, а отсюда, в свою очередь,

$$x_n - x_* = P_0(x_0 - x_*) + A^n P^0 (x_0 - x_*) \quad (n = 0, 1, 2, ...). \tag{4}$$

Из (4) вытекает, что

$$P_0(x_n - x_*) = P_0(x_0 - x_*), \quad P^0(x_n - x_*) = A^n P^0 (x_0 - x_*) \quad (n = 0, 1, 2, ...),$$

и поэтому

$$x_n - x_* = A^n P^0 (x_0 - x_*) \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Тем самым, вопрос о справедливости утверждения теоремы М. А. Красносельского сводится к утверждению о сильной сходимости к нулю последовательности операторов $A^n P^0$ или, иначе, сходимости к нулю сужений на подпространство X^0 итераций A^n оператора A.

В дальнейшем нам понадобится некоторое специальное аддитивное представление нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Следуя [5; 6], действующий в банаховом пространстве X оператор A будем называть *корректным*, если последовательность операторов A^n $(n = 1, 2, \ldots)$ сильно сходится к некоторому линейному оператору P; нетрудно видеть, что P является коммутирующим с A проектором пространства X на подпространство $X_0 = \mathrm{Fix}\ A$ неподвижных точек оператора A. В случае, если $P = 0$ оператор A будем называть нуль-корректным.

Л е м м а 2. *Пусть A – нормальный оператор. Тогда пространство X раскладывается в ортогональную сумму двух инвариантных для A подпространств $X = X_\omega \oplus X^\omega$ таким образом, что сужение A_ω оператора A является унитарным в X_ω оператором, а сужение A^ω оператора A на подпространство X^ω является нуль-корректным оператором.*

Для доказательства рассмотрим полярное представление $A = UB$ оператора A и применим к оператору B лемму 1. Иными словами, построим подпространства $X_\omega = \mathrm{Fix}\, B$ и $X^\omega = (X_\omega)^\perp$. Нетрудно видеть, что $X_\omega \supseteq X_0$, ортопроекторы P_ω и P^ω коммутируют с унитарным оператором U и, тем самым, оператор U оставляет инвариантным оба пространства X_ω и X^ω. Рассмотрим равенство

$$A = UBP_\omega + UBP^\omega = UP_\omega + UBP^\omega. \tag{5}$$

Это представление оператора A является его ортогональным разложением. Оператор $A_\omega = UP_\omega$ при этом очевидным образом является унитарным оператором в подпространстве X_ω. Так как из (5) следует $A^n = U^n P_\omega + (UB)^n P^\omega$, то оператор же $A^\omega = UBP^\omega$ при этом является нуль-корректным, так как при любом $x \in X^\omega$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|(A^\omega)^n x\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|(UB^\omega)^n x\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|U^n B^n x\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|B^n x\right\| = 0.$$

Последнее равенство справедливо, например, в силу той же теоремы М. А. Красносельского (оператор B положительно определенный и самосопряженный и не имеющий 1 собственным значением).

Отметим также, что разложение (5) можно получить из спектрального разложения нормального оператора. Действительно, достаточно положить

$$A_\omega x = \int_S \lambda dP(\lambda)x, \quad A^\omega x = \int_{D\setminus S} \lambda dP(\lambda)x,$$

где S – единичная окружность; D – как и ранее, единичный круг комплексной плоскости. Отметим, что из этих представлений также вытекает равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|(A^\omega)^n x\right\| = 0$; достаточно заметить, что $\left\|(A^\omega)^n x\right\| = \int_{D\setminus S}|\lambda|^{2n}\, D(P(\lambda)x, x) \quad (x \in X^\omega)$ и воспользоваться леммой Б. Леви о предельном переходе под знаком интеграла для монотонных последовательностей.

Л е м м а 3. *Пусть A – нормальный оператор. Тогда пространство X раскладывается в ортогональную сумму $X = X_0 \oplus \widetilde{X} \oplus X^\omega$ трех инвариантных для A подпространств $X_0 = \mathrm{Fix}\, A$, $\widetilde{X} = X_\omega \setminus X_0$ и X_ω таким образом, что сужение A на X_0 является единичным оператором в X_0, сужение A на $\widetilde{X}$ является унитарным оператором, сужение A на X^ω – нуль-корректным оператором.*

Для доказательства достаточно показать инвариантность для оператора A подпространства X_0 и $X_\omega \setminus X_0$.

Инвариантность подпространства $X_0 = \mathrm{Fix}\, A$ очевидна. Инвариантность пространства $X_\varpi = \mathrm{Fix}\, B$ следует из перестановочности A и B, если $x \in \mathrm{Fix}\, B$, $x = Bx$, то $Ax = ABx = BAx$, т. е. $Ax \in \mathrm{Fix}\, B$. Если, кроме того, $x \in \mathrm{Fix}\, B$ и $x \perp \mathrm{Fix}\, A$, то, в силу леммы 1,

$$(Ax, h) = (x, A^* h) = (x, h) = 0 \quad (h \in \mathrm{Fix}\, B).$$

Лемма 3 позволяет описать класс нормальных корректных операторов.

Л е м м а 4. *Нормальный оператора A является корректным в том и только том случае, когда $\widetilde{X} = 0$.*

Из леммы 3 следует, что $X = X_0 \oplus \widetilde{X} \oplus X^\omega$, и поэтому последовательные приближения $A^n x$ при $x = x_0 + \tilde{x} + x^\omega \quad (x_0 \in X_0, \tilde{x} \in \widetilde{X}, x^\omega \in X^\omega)$ можно записать в виде

$$A^n x = A^n x_0 + A^n \tilde{x} + Ax^\omega \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Из леммы 3 следует существование пределов $\lim\limits_{n\to\infty} A^n x_0 = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} A^n x^\omega = 0$, поэтому существование предела $\lim\limits_{x\to\infty} A^n x$ эквивалентно существованию предела $\lim\limits_{n\to\infty} A^n \tilde{x}$.

Оператор A в подпространстве $\widetilde{X}$ является унитарным, в частности, изометрическим. Если существует предел последовательности $U^n \tilde{z}(\tilde{z} \in \widetilde{X})$, то $U^n \tilde{x} - U^{n+1}\tilde{x} \to 0$ при $n \to \infty$. Но

$$\left\|U^n \tilde{x} - U^{n+1}\tilde{x}\right\| = \left\|U^n(\tilde{x} - U\tilde{x})\right\| = \left\|\tilde{x} - U\tilde{x}\right\|;$$

отсюда $\tilde{x} = U\tilde{x}$. Таким образом, предел $\lim\limits_{n\to\infty} A^n \tilde{x}$, а значит, и предел $\lim\limits_{n\to\infty} A^n x$ существует лишь в том случае, когда $\widetilde{X} = 0$.

Из леммы 3 также вытекает

Т е о р е м а 1. *Пусть A нормальный оператор,* $\|A\|=1$, *и пусть оператор A является корректным. Пусть уравнение (1) имеет решение.*

Тогда последовательные приближения (2) при любом начальном условии x_0 *сходятся к некоторому решению* x_* *этого уравнения.*

Представляют интерес различные эквивалентные формулировки основного условия теоремы 1. Из проведенных выше рассуждений следует

Т е о р е м а 2. *Пусть A нормальный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) унитарная часть оператора A является ортопроектором;

б) справедливо равенство Fix A = Fix B, *или, иначе,* $X_\omega = X_0$;

в) равенство $\|Ax\|=\|x\|$ $(x\in X)$ *влечет равенство* $Ax = x$;

г) равенство $A^*Ax = x$ $(x\in X)$ *влечет равенство* $Ax = x$;

д) равенство $Bx = x$ $(x\in X)$ *влечет равенство* $Ax = x$;

е) спектральная мера $P(\cdot)$ *единичной окружности без точки* 1 *равна нулю:* $P(S\setminus\{1\})=0$;

ж) последовательность операторов A^n *сильно сходится.*

2. Анализ вышеприведенных рассуждений показывает, что их основная часть основана на свойстве перестановочности операторов U и B в полярном представлении $A = UB$ линейного оператора A. Такие операторы изучались в [7]; в [8] эти операторы названы *квазинормальными*. Отметим [8], что сопряженный A^* к квазинормальному оператору A не обязательно является квазинормальным. Однако для квазинормальных операторов справедливо равенство $\rho(A)=\|A\|$ (операторы, для которых справедливо последнее равенство, принято называть *нормалоидными* (см., напр., [8–10])). Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 2 сохраняется и для квазинормальных операторов; верна для них и часть утверждений теоремы 2.

3. Утверждения, установленные в предыдущих пунктах, для произвольных линейных операторов A с $\|A\|=1$ (или даже $\rho(A)=1$) не верны. В качестве примера рассмотрим в пространстве ℓ_2 операторы правого и левого сдвига:

$$S_+(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots)=(0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1},\dots),\quad S_-(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots)=(\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_{n+1},\dots)$$
$$(x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots)\in\ell_2);$$

очевидно, что $\|S_+\|=\|S_-\|=1$ и $\rho(S_+)=\rho(S_-)=1$. Оба оператора не являются нормальными. Оператор S_+ изометрический ($\|S_+x\|=\|x\|$ или, что то же самое, $S_+^*S_+=I$) и для него предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_+^nx$ существует только при $x = 0$. Так как $S_+^*S_+=I$, то он является квазинормальным. Второй оператор S_- не квазинормален, однако он оказывается нуль-корректным – для него, очевидно, при любом $x\in\ell_2$ предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_-^nx$ существует и равен нулю.

Для операторов взвешенного сдвига (их детальный анализ см., напр., [11; 12])

$$S(\lambda)_+x=(0,\lambda_1\xi_1,\dots,\lambda_{n-1}\xi_{n-1},\dots),\quad S(\lambda)_-x=(\lambda_1\xi_2,\lambda_2\xi_3,\dots,\lambda_n\xi_{n+1},\dots)$$
$$(x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots)\in\ell_2);$$

(здесь $\lambda=(\lambda_n)$ – ненулевая ограниченная последовательность комплексных чисел) ситуация является более сложной. Очевидно, что $S(\lambda)_+^*=S(\bar\lambda)_-$ и $S(\lambda)_-^*=S(\bar\lambda)_+$ откуда, как нетрудно видеть, вытекает, что оба оператора не являются нормальными. Несложный подсчет показывает, что неравенство

$$\sup_{k\to1,2,\dots}\ \sup_{n\to1,2,\dots}\{|\lambda_1\cdots\lambda_k|,\dots,|\lambda_n\cdots\lambda_{n+k-1}|,\dots\}<\infty, \tag{6}$$

является необходимым и достаточным условием ограниченности последовательности норм итераций операторов $S(\lambda)_+$ и $S(\lambda)_-$. Из (6) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sup_{n\to1,2,\dots}\{|\lambda_1\cdots\lambda_k|,\dots,|\lambda_n\cdots\lambda_{n+k-1}|,\dots\}}\le1.$$

Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sup_{n\to1,2,\dots}\{|\lambda_1\cdots\lambda_k|,\dots,|\lambda_n\cdots\lambda_{n+k-1}|,\dots\}}=1$$

(случай, когда этот предел строго меньше 1 здесь не представляет интереса). Повторяя рассуждения, проведенные для операторов правого сдвига, получаем, что оператор $S(\lambda)_+$ не является квазинормальным, при этом он является нуль-корректным в том и только том случае, когда справедливо неравенство (6). Аналогично, повторяя рассуждения, проведенные для оператора левого сдвига, получаем, что оператор S(λ)_ не является нуль-корректным. Однако в случае, когда равны $|\lambda_n|$, он является квазинормальным.

Заметим еще, что основная идея доказательства теорем 1, 2 основана на том факте, что нормальные операторы обладают спектральным разложением. Естественно рассмотреть класс операторов, для которых такие спектральные разложения существуют. Наиболее широким известным классом операторов, для которых спектральное разложение существует, являются введенные Н. Данфордом спектральные операторы; их теория детально изложена в [13].

4. Приведем еще один результат, относящийся к линейным операторам в банаховом пространстве (см., напр., [14]), описывающий класс линейных операторов, для которых справедливо утверждение теоремы М. А. Красносельского (ряд близких утверждений был установлен в [9; 10; 15]).

Т е о р е м а 3. *Пусть A – непрерывный линейный оператор в банаховом пространстве X,* $\rho(A) = 1$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) оператор A корректный;

б) пространство X разлагается в прямую сумму инвариантных для A подпространств $X_0 = \mathrm{Fix}\ A$ и $X^\omega = \{x : \lim\limits_{n\to\infty} A^n x = 0\}$;

в) последовательность норм $\|A^n\|$ ограничена, подпространства $X_0 = \mathrm{Fix}\ A$ и $X^\omega = \{x : \lim\limits_{n\to\infty} A^n x = 0\}$ замкнуты и их сумма плотна в P;

г) для оператора A справедливо утверждение теоремы М. А. Красносельского.

Пусть A – корректный оператор, т. е. для каждого $x \in X$ существует предел $Px = \lim\limits_{n\to\infty} A^n x$. В силу теоремы Банаха–Штейнгауза, P является непрерывным линейным оператором в пространстве X. При каждом $x \in X$ для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что при $p, q > N$ справедливо неравенство $\|A^{p+q}x - Px\| < \varepsilon$. Устремляя p к бесконечности при фиксированном p, получаем, что $\|A^p Px - Px\| \le \varepsilon$. Устремляя теперь к бесконечности q, получаем, что $\|P^2 x - Px\| \le \varepsilon$, откуда, в силу произвольности ε, $P^2 = P$. Таким образом, оператор P является проектором. Из равенств

$$Px = \lim_{n\to\infty} A^n x = \lim_{n\to\infty} A^{n+1} x = \lim_{n\to\infty} A^n (Ax) = PAx,$$

$$Px = \lim_{n\to\infty} A^n x = \lim_{n\to\infty} A^{n+1} x = A(\lim_{n\to\infty} A^n x) = APx$$

вытекает, что $AP = PA = P$. Иными словами, оператор P коммутирует с A и, более того, сужение A на подпространство $X_0 = PX$ совпадает с единичным оператором. На подпространстве $X^\omega = (I - P)X$, также инвариантном для оператора A, оператор P равен нулю, т. е. на этом подпространстве оператор P равен нулю, или, другими словами, $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0\ (x \in X^\omega)$. Но это означает, что сужение A^ω на X^ω оператора A является нуль-корректным. Тем самым показано свойство б). Обратное утверждение, что из б) вытекает а) очевидно.

Для доказательства эквивалентности утверждений б) и в), в силу снова теоремы Банаха–Штейнгауза, достаточно доказать, что подпространство X^ω замкнуто (замкнутость подпространства X^0 очевидна). Пусть последовательность $x_j \in X^\omega$ сходится к некоторому $x \in X$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и при некотором достаточно большом j справедливы неравенства

$$\|A^n x\| \le \|A^n x_j\| + \|A^n (x - x_j)\| \le \|A^n x_j\| + \|x - x_j\| \le \|A^n x_j\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, для этих ε и j при больших n $\|A^n x_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тем самым, при таких n $\|A^n x\| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n x\| = 0$. Отметим, что подпространства X_0 и X^ω пересекаются по нулевому подпространству $O = \{0\} : X_0 \cap X^\omega = O$.

Остается показать, что свойства а) и г) эквиваленты. Уравнение (1) при $f = 0$ разрешимо. Поэтому, если для оператора A справедливо утверждение теоремы М. А. Красносельского, то последовательные приближения (2) ($f = 0$) должны сходиться при любом начальном условии x_0. При произвольном $x_0 \in X$ элемент $x_0 - x_*$ является произвольным элементом пространства X. Но это и означает, что последовательность операторов (A^n) сильно сходится, т. е. что оператор A корректен. Обратно, если оператор A корректен и уравнение (1) разрешимо, то из равенства (3) вытекает, что последовательность $(x_n - x_*)$ сходится к $P(x_0 - x_*)$ или, что то же самое, последовательность (x_n) сходится к $x^* + P(x_0 - x_*)$. Остается заметить, что этот предел также является решением уравнения (1), так как, очевидно, $P(x_0 - x_*) = AP(x_0 - x_*)$.

Литература

1. *Красносельский М. А.* // Успехи мат. наук. 1960. Вып. 3 (93). С. 161–165.
2. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П.* и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969.
3. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* // Лекции по функциональному анализу. М., 1979. С. 587.
4. *Данфорд Н., Шварц Д. Т.* // Линейные операторы. Спектральная теория. М., 1966. С. 1064.
5. *Ляшко С. И., Номировский Д. Ф., Петунин Ю. И., Семенов В. В.* Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. М.; СПб.; Киев, 2009. С. 185.
6. *Klyushin D. A., Lyashko S. I., Nomirovskii D. A.* et al. Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements. Springer, 2012. P. 1–202.
7. *Brown A.* // Proc. Amar. Math. Soc. 1953. Vol. 4. P. 723–728.
8. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М., 1970. С. 352.
9. *Забрейко П. П.* // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 3. С. 201–204.
10. *Zabrejko P. P.* // Numerical Functional Analysis and Applications. 1990. Vol. 11, N 7–8. P. 823–838.
11. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. М., 1988. С. 232.
12. *Антоневич А. Б., Ахматова А. А.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 1. С. 14–21.
13. *Данфорд Н., Шварц Д. Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы. М., 1974. С. 664.
14. *Данфорд Н., Шварц Д. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., 1962. С. 896.
15. *Koliha J. J.* Power convergence and pseudoinverses of operators in Banach spaces. D. of M. U. of M., 1974.

P. P. ZABREIKO, A. V. MIKHAILOV

zabreiko@mail.ru; artostby@mail.ru

M. A. KRASNOSELSKY'S THEOREM GENERALIZATION TO NON SELF-CONJUGATE OPERATORS

Summary

The article deals with linear operators A with a spectral radius equal 1 in Hilbert and Banach spaces, for which the successive approximations $x_{n+1} = Ax_n + f$ with an arbitrarily initial approximation x_0 converge to one of the solutions of the equation $x = Ax + f$ (under the condition that these solutions exist).