Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 март–апрель Том 58 № 2

УДК 517.5

Е. В. ГУБКИНА[1], К. В. ЗАБЕЛЛО[2], М. А. ПРОХОРОВИЧ[2], Е. М. РАДЫНО[2]

АППРОКСИМАЦИЯ ЛУЗИНА ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С УСЛОВИЕМ УДВОЕНИЯ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

[1]Белорусский национальный технический университет, Минск
[2]Белорусский государственный университет, Минск

Поступило 13.01.2014

Введение. Классическая теорема Н. Н. Лузина утверждает, что любая измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция f обладает C-свойством – она является непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры.

Как будет выглядеть этот результат при дополнительных условиях на функцию? В работе [1] рассматривался этот вопрос для функций из соболевских классов на произвольных метрических пространствах.

Для частного случая пространств p-адических векторов можно доказать более сильный результат (см. [2], полное доказательство приведено в [3]).

Нашей целью является распространение результатов из [2; 3] на более широкий класс ультраметрических пространств однородного типа. Перейдем к точным формулировкам.

Необходимые определения. Пусть (X, d, μ) – метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ. Тройку (X, d, μ) называют пространством однородного типа, если мера и метрика связаны условием удвоения (с некоторой постоянной $c > 0$)

$$\mu(B(x,R)) \le c\left(\frac{R}{r}\right)^{\gamma} \mu(B(x,r)), \quad x \in X, \quad 0 < r \le R, \tag{1}$$

где $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ – шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$. Параметр γ обычно называют doubling-размерностью – он играет роль размерности метрического пространства X.

Далее мы будем писать просто X, понимая под этим тройку (X, d, μ) с условием (1).

Через $L^p = L^p(X)$, $1 < p < +\infty$, обозначаем обычные лебеговы пространства, порожденные мерой μ. Рассмотрим максимальные функции

$$\mathcal{S}_\alpha f(x) = \sup_{B \ni x} r_B^{-\alpha} \fint_B | f - f_B | \, d\mu, \quad f_B = \fint_B f \, d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f \, d\mu,$$

где sup берется по всем шарам B радиуса $r_B \in (0,1)$, содержащим точку $x \in X$.

С помощью этих максимальных функций определим классы

$$C_\alpha^p(X) = \{f \in L^p : \; \|f\|_{C_\alpha^p} = \; \|f\|_{L^p} + \; \|\mathcal{S}_\alpha f\|_{L^p} < +\infty\}, \quad \alpha > 0, \quad 1 < p < +\infty. \tag{2}$$

Класс $C_1^p(X)$ совпадает с классом Хайлаша–Соболева [4] (см. также [5; 6]), а при $X = \mathbb{R}^n$ – с классическим пространством Соболева $W_1^p(\mathbb{R}^n)$ [4; 7].

Рассмотрим емкости, соответствующие классам $C_\alpha^p(X)$:

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf\{\|f\|^p_{C_\alpha^p(X)} : f \in C_\alpha^p(X), \quad f \ge 1 \text{ в окрестности } E\}. \tag{3}$$

При $\alpha = 1$ они были введены и изучены в [8], а в случае $0 < \alpha \le 1$ – в [9].

Напомним определение s-вместимости Хаусдорфа множества $E \subset X$

$$H_\infty^s(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty r_i^s : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i)\right\}.$$

Классы Гельдера вводятся обычным способом – если $E \subset X$, то

$$H^\beta(E) = \left\{ f : \|f\|_{H^\beta(E)} = \sup_{x \neq y, x, y \in E} [d(x,y)]^{-\beta} \,|\, f(x) - f(y) | < +\infty \right\}.$$

Мы будем иметь дело со свойствами функций, которые зависят от изменения их значений на множестве меры нуль. Поэтому условимся, что значение локально суммируемой функции в каждой точке определяется равенством

$$f(x) = \limsup_{r \to +0} \fint_{B(x,r)} f\,d\mu.$$

В [1; 10] изучался вопрос об аппроксимации Лузина функций из классов $C_\alpha^p(X)$ на пространствах однородного типа. Итоговый результат выглядит следующим образом:

Т е о р е м а 1. *Пусть* $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $1 < p < \gamma / \alpha$ *и задана функция* $f \in C_\alpha^p(X)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют функция g и открытое множество* $O \subset X$ *такие, что*

1) $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}(O) < \varepsilon$, $H_\infty^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(O) < \varepsilon$;

2) $f = g$ *на* $X \backslash O$;

3) $g \in C_\alpha^p(X)$ *и* $g \in H^\beta(B)$ *для любого шара* $B \subset X$;

4) $\|f - g\|_{C_\alpha^p(X)} < \varepsilon$.

При $\beta = \alpha = 1$ подобный результат был ранее получен в [4], где вместо 1) утверждалось, что $\mu(O) < \varepsilon$, а в 3) было $g \in H^1(X)$. Случай $\beta \le \alpha = 1$ существенно сложнее, он был изучен в [10]. Общий вид теоремы 1 приведен в [1].

Основной результат. Условие $\alpha \le 1$ в теореме 1 существенно сужает множество рассматриваемых ситуаций. Дело в том, что есть случаи, когда классы Гельдера $H^\alpha(X)$ и Соболева $C_\alpha^p(X)$ нетривиальны при некоторых значениях $\alpha > 1$ (см., напр., [11]).

В случае пространств p-адических векторов удалось избавиться от ограничения $\alpha \le 1$ [2; 3]. Однако класс ультраметрических пространств с условием удвоения не ограничивается этим частным случаем – многочисленные примеры такого типа можно получить, взяв, например, пространства из [12, глава II, параграф 10] с дополнительным условием ограниченности фигурирующих там коэффициентов a_k.

Наш основной результат состоит в том, что теорему 1 можно перенести на любое ультраметрическое пространство для всех $\alpha > 0$, не используя специфику p-адических векторов.

Т е о р е м а 2. *Теорема 1 сохраняет силу для любого* $\alpha > 0$, *если метрика d является ультраметрикой, т. е. если дополнительно выполнено сильное неравенство треугольника*

$$d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(y,z)\} \quad \forall x, y, z \in X. \tag{4}$$

Конечно, классы $C_\alpha^p(X)$ и емкости $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$ вводятся так же, как и в общем случае – см. (2) и (3).

О доказательстве теоремы 2. Доказательство теоремы 2 в целом повторяет доказательство, приведенное в [3] (см. также [1]). Изменения, которые необходимо внести в доказательство, связаны с двумя существенными моментами:

1) Пусть Λ – множество точек, в которых не выполнено условие

$$f(x) = \lim_{r \to +0} \fint_{B(x,r)} f d\mu.$$

При доказательстве основного результата в [1; 3] использовались оценки $H_\infty^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(\Lambda) = 0$ и $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}(\Lambda) = 0$ (см. [1, неравенство 12]).

Оценка $H_\infty^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(\Lambda) = 0$ остается справедливой при $\alpha > 0$ на любом пространстве однородного типа – это следует из результатов [13].

Оценка же $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}(\Lambda) = 0$ в общем случае верна лишь для $\alpha \le 1$ [9], однако в случае ультраметрических пространств однородного типа она остается в силе при любом $\alpha > 0$ [14].

2) При доказательстве основной теоремы в [1; 3] существенно использовались разбиения единицы, для построения которых использовались довольно сложные покрытия (см., напр., [1, лемма 7].

Лемма о покрытиях. Доказательству леммы предпошлем одно вспомогательное утверждение, которое легко получить из (1) и (4) – *для любого фиксированного шара* $B \subset X$ *и любой пары* a *и* b $(0 < a < b < \infty)$ *существует лишь конечный набор чисел* $d_i \in (a, b)$ *такой, что если* $d(x, y) \in (a, b)$, *то* $d(x, y) = d_i$ *для некоторого* i. Данное свойство естественно назвать свойством дискретности расстояний.

Л е м м а. *Пусть* $O \subset X$ *– открытое ограниченное множество,* $O \neq X$ *и* $\mu(O) < +\infty$. *Тогда существует набор шаров* $\mathfrak{B} = \{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$, *такой, что:*

1) шары $B(x_i, r_i)$ *попарно не пересекаются;*

2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i) = O$;

3) $\operatorname{dist}(B(x_i, r_i), X \setminus O) = r_i$ *для любого* i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\mathfrak{B}$ будем строить по индукции. Прежде всего, отметим, что так как $\mu(O) < +\infty$, то в силу дискретности расстояний существует радиус $r_1 < +\infty$ такой, что для любого радиуса $R > r_1$ выполнено

$$\mu(B(x, r_1)) \leq \mu(O) < \mu(B(x, R)).$$

В силу свойства дискретности расстояний, мы можем построить убывающую последовательность $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ всех возможных расстояний в ультраметрике d, не превосходящих r_1.

На первом шаге индукции построим разбиение $\{B(x_i, r_1)\}_{i=1}^{\infty}$ пространства X непересекающимися шарами радиуса r_1 и выберем из него шары, целиком лежащие в O. Из них составим множество

$$\mathfrak{B}_1 = \{B(x_i, r_1) : B(x_i, r_1) \subset O\}.$$

На втором шаге построим новое разбиение $\{B(x_i, r_2)\}_{i=1}^{\infty}$ пространства X непересекающимися шарами радиуса r_2 (отметим, что набор x_i центров шаров свой для каждого шага). Из разбиения $\{B(x_i, r_2)\}_{i=1}^{\infty}$ выберем шары, целиком лежащие в $O \setminus \mathfrak{B}_1$, и составим из них множество

$$\mathfrak{B}_2 = \{B(x_i, r_2) : B(x_i, r_2) \subset O \setminus \mathfrak{B}_1\}.$$

На j-м шаге пространство X разбивается шарами радиуса r_j и строится множество

$$\mathfrak{B}_j = \left\{B(x_i, r_j) : B(x_i, r_j) \subset O \setminus \bigcup_{n=1}^{j-1} \mathfrak{B}_n\right\}.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что шары из множества $\mathfrak{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}_i$ удовлетворяют всем условиям леммы.

Необходимые разбиения единицы (см. (4) и (5) в [2]) легко получаются из леммы 1, так как в рассматриваемой нами ситуации характеристические функции шаров являются гельдеровскими функциями с любым показателем $\alpha > 0$.

М. А. Прохорович выполнял работу при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13М-036).

Литература

1. *Кротов В. Г., Прохорович М. А.* // Изв. вузов. Математика. 2008. № 5. С. 55–66.
2. *Губкина Е. В., Олешкевич Д. Н., Прохорович М. А., Радыно Е. М.* // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 3. С. 16–18.
3. *Губкина Е. В., Забелло К. В., Прохорович М. А., Радыно Е. М.* // Проблемы физики, математики и техники. 2013. № 2 (15). С. 58–65.
4. *Hajlasz P.* // Potential Analysis. 1996. Vol. 5, N 4. P. 403–415.
5. *Yang D.* // Science in China (series A). 2003. Vol. 46, N 5. P. 675–689.
6. *Иванишко И. А.* // Математ. заметки. 2005. Т. 77, № 6. С. 937–940.
7. *Calderon A. P.* // Studia Mathematica. 1972. Vol. 44. P. 561–582.
8. *Kinnunen J., Martio O.* // Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica. 1996. Vol. 21. P. 367–382.

9. *Прохорович М. А.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 1. С. 19–23.
10. *Hajlasz P., Kinnunen J.* // Revista Matemática Iberoamericana. 1998. Vol. 14, N 3. P. 601–622.
11. *Jonsson A.* // J. of mathematical analysis and applications. 2004. Vol. 290, N 1. P. 86–104.
12. *Hewitt E., Ross K. A.* Abstract harmonic analysis. Vol 1. Springer, 1979. – 269 p.
13. *Прохорович М. А.* // Математ. заметки. 2009. Т. 85, № 4. С. 616–621.
14. *Губкина Е. В., Прохорович М. А., Радыно Е. М.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 2. С. 17–19.

E. V. GUBKINA, K. V. ZABELA, M. A. PROKHOROVICH, Ya. M. RADYNA

helenvl@bk.ru; k.v.zabello@gmail.com; prohorovich@mail.ru; yauhen.radyna@gmail.com

LUZIN-TYPE APPROXIMATION OF THE FUNCTIONS IN THE SOBOLEV CLASSES ON ULTRAMETRIC SPACES WITH THE DOUBLING CONDITION

Summary

In this article, we consider an analog of the Luzin theorem on the correction for Sobolev-type spaces on ultrametric spaces with a doubling condition. The correcting function belongs to the Hölder class and approximates a given function in the metrics of the initial space. Dimensions of exceptional sets are evaluated in terms of capacities and Hausdorff volumes. This result was previously obtained for the special case of the p-adic vector space.