УДК 517.948.32

І. Л. ВАСІЛЬЕЎ, Д. А. НАВІЧКОВА

ДЫСКРЭТНЫЯ РАЎНАННІ ПЕРШАГА ПАРАДКУ З МАТРЫЧНЫМІ ЗМЕННЫМІ НЕКАМУТАТЫЎНЫМІ КАЭФІЦЫЕНТАМІ

(Прадстаўлена членам-карэспандэнтам Я. В. Радына)

Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт, Мінск *Паступіла 20.11.2013*

Уводзіны. У [1] будуецца дыскрэтны аналаг аперацыйнага злічэння, з дапамогай якога развязваюцца некаторыя тыпы рознасных раўнанняў са зменнымі каэфіцыентамі. Там жа разглядаюцца алгебры паслядоўнасцей і гіперпаслядоўнасцей з множаннем у выглядзе дыскрэтных згортак Ляпляса і Фур'е адпаведна.

Для развязання дыскрэтных раўнанняў са зменнымі каэфіцыентамі вышэйшых парадкаў можна перайсці да сістэмы раўнанняў першага парадку, якую зручней уяўляць у матрычным выглядзе. Мэтай дадзенай работы з'яўляецца развязанне матрычных дыскрэтных раўнанняў першага парадку са зменнымі каэфіцыентамі. Для гэтага разглядаецца алгебра $K_0^{m\times m}$ матрычных паслядоўнасцей з множаннем у выглядзе дыскрэтнай згорткі Ляпляса і адпаведная алгебра матрычных гіперпаслядоўнасцей $K^{m\times m}$. Фактычна матрычную паслядоўнасць можна разумець як матрыцу, элементамі якой з'яўляюцца паслядоўнасці, разгледжаныя ў [1], $X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{x_{11,n}\}_{n=0}^{\infty} & \cdots & \{x_{1m,n}\}_{n=0}^{\infty} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \{x_{m1,n}\}_{n=0}^{\infty} & \cdots & \{x_{mm,n}\}_{n=0}^{\infty} \end{bmatrix}$, дзе $x_{ij,n} \in \mathbb{C}$, ці як паслядоўнасць, элементамі якой з'яўляюцца лікавыя матрыцы $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty} = \{X_0, \ldots, X_n, \ldots\}$. Гэтыя два ўяўленні даюць аднолькавыя вынікі. Аналагічным чынам разумеюцца і матрыцы-гіперпаслядоўнасці. Прычым кожная матрыца-гіперпаслядоўнасць можа быць запісана ў выглядзе $X = \sum\limits_{n=-r}^{\infty} X_n h^n$, дзе r – любы натуральны лік (свой для кожнай матрыцы-гіперпаслядоўнасці); $h = \{\ldots, 0, \ldots, \underline{0}, 1, 0, \ldots, 0, \ldots\}$. Падкрэслены элемент стаіць на месцы з нулявым нумарам, $s = h^{-1}$, $h^k = \{\ldots, 0, \ldots, 0, \underset{k\text{-е месца}}{1}, 0, \ldots, 0, \ldots\}$, $I = h^0$.

Аднароднае дыскрэтнае матрычнае раўнанне. Разгледзім матрычнае раўнанне

$$(An + B)X_{n+1} + (Mn + L)X_n = \mathrm{O}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

дзе $A, B, M, L \in \mathbb{C}^{m\times m}$ – зададзеныя сталыя матрыцы $(m \times m)$ над $\mathbb{C}$. Развязак $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ будзем шукаць у алгебры $K_0^{m\times m}$, улічваючы $X_0 = \mathrm{O}$. У алгебры $K^{m\times m}$ матрычных гіперпаслядоўнасцей раўнанню (1) паставім у адпаведнасць аднароднае алгебраічнае дыферэнцыяльнае раўнанне

$$(A + Mh)DX + ((B - A)s + L)X = \mathrm{O},$$

якое можна запісаць у стандартным выглядзе

$$DX = (A + Mh)^{-1}((A - B)s - L)X, \tag{2}$$

дзе D – аператар алгебраічнага дыферэнцавання [1], які дзейнічае па формуле $DX = s * \{nX_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Тут і надалей будзем мець на ўвазе абарачальнасць адпаведных матрыц. Праўдзяцца роўнасці

$$((A - B)s - L) = \frac{I}{h}((A - B) - Lh),$$

$$(A + Mh)^{-1} = (E + A^{-1}Mh)^{-1}A^{-1} = (E - (A^{-1}Mh) + (A^{-1}Mh)^2 + \cdots)A^{-1}.$$

Тады

$$(A+Mh)^{-1}((A-B)s-L)=\frac{I}{h}(E-(A^{-1}Mh)+(A^{-1}Mh)^2+\cdots)((E-A^{-1}B)-A^{-1}Lh)=P_{-1}\frac{I}{h}+\sum_{k=0}^{\infty}P_k h^k,$$

дзе $P_{-1}=E-A^{-1}B$,

$$\begin{cases} P_0=-A^{-1}(L+M(E-A^{-1}B)) \\ P_1=(A^{-1}M)A^{-1}(L+M(E-A^{-1}B)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_k=(-1)^{k+1}(A^{-1}M)^k A^{-1}(L+M(E-A^{-1}B)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}.$$

Пры гэтым раўнанне (2) прыме форму

$$DX=\left(P_{-1}\frac{I}{h}+\sum_{k=0}^{\infty}P_k h^k\right)X=P(h)X. \tag{3}$$

З дапамогай замены $X=V(h)Y$, дзе $V(h)=E+\sum_{k=1}^{\infty}V_k h^k$, раўнанне (3) прыводзіцца да выгляду

$$DY=P^*(h)Y, \tag{4}$$

дзе $P^*(h)=P_{-1}^*\frac{I}{h}+\sum_{k=0}^{\infty}P_k^* h^k$.

Пакажам, што матрыцы V_k пры некаторых умовах можна выбраць так, што ў (4) $P_k^*=\mathrm{O}$ $\forall k=0,1,2,\ldots$. З (3), (4) вынікае $DV(h)Y+V(h)DY=P(h)V(h)Y$, ці $DV(h)Y+V(h)P^*(h)Y=P(h)V(h)Y$. Адсюль

$$DV(h)=P(h)V(h)-V(h)P^*(h). \tag{5}$$

Дастасуем з неабходнымі зменамі стандартны прыём з тэорыі сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў [2, ст. 400]. Замяніўшы ў (5) $P(h)$, $P^*(h)$, $V(h)$ шэрагамі і прыраўняўшы адпаведныя каэфіцыенты пры ступенях h, атрымаем бясконцую сістэму матрычных раўнанняў для знаходжання $V_1, V_2, \ldots$

$$\begin{cases} P_{-1}=P_{-1}^* \\ P_{-1}V_1-V_1(P_{-1}+E)+P_0=P_0^* \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{-1}V_{k+1}-V_{k+1}(P_{-1}+(k+1)E)+(P_0V_k-V_kP_0^*)+(P_1V_{k-1}-V_{k-1}P_1^*)+\cdots+(P_{k-1}V_1-V_1P_{k-1}^*)+P_k=P_k^* \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}. \tag{6}$$

Разгледзім наступныя выпадкі.

Няхай $B=lA$, дзе $l\le 0$ – цэлы. Тады $A^{-1}B=A^{-1}lA=lE$ і $P_{-1}=E-A^{-1}B=(1-l)E=\lambda E$ – скалярная матрыца, $\lambda\ge 1$. Падставіўшы ў (6) і прыраўняўшы $P_k^*=\mathrm{O}$ $\forall k=0,1,2,\ldots$, для знаходжання $V_1, V_2, \ldots$ атрымаем роўнасці

$$\begin{cases} \lambda E=P_{-1}^* \\ \lambda EV_1-V_1(\lambda E+E)=-P_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda EV_{k+1}-V_{k+1}(\lambda E+(k+1)E)=-P_0V_k-P_1V_{k-1}-\cdots-P_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}.$$

Адсюль знаходзім

$$\begin{cases} V_1 = P_0 \\ V_2 = \dfrac{1}{2}(P_0 V_1 + P_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \\ V_{k+1} = \dfrac{1}{k+1}(P_0 V_k + P_1 V_{k-1} + \cdots + P_k) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Такім чынам, раўнанне (4) прымае форму раўнання тыпу Кашы

$$DY = \lambda E \frac{I}{h} Y,$$

агульны развязак якога мае выгляд

$$Y = h^{\lambda E} C = \mathrm{diag}\{h^{\lambda}, \cdots, h^{\lambda}\} C,$$

дзе $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ – адвольная матрыца.

Агульны развязак раўнання (3) у алгебры $K_0^{m\times m}$ запішацца ў форме

$$X = V(h) h^{\lambda E} C,$$

пры гэтым $X_0 = \mathrm{O}$.

1.2. Няхай $B = A\mathrm{diag}\{l_1, \cdots, l_m\}$, дзе $l_k \le 0$ – цэлыя (не абавязкова розныя) $\forall k = \overline{1, m}$. Тады $P_{-1} = E - A^{-1}B = \mathrm{diag}\{1 - l_1, \cdots, 1 - l_m\} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$. Не абмяжоўваючы агульнасці, можна лічыць $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_m \ge 1$.

Пазначэнні для элементаў матрыц: $P_k = \left[p_{ij}^k\right]$, $P_k^* = \left[p_{ij}^{*k}\right]$, $V_k = \left[v_{ij}^k\right]$, $i, j = \overline{1, m}$.

1) Для знаходжання V_1 выкарыстоўваем 2-е раўнанне ў (6). Гэта раўнанне заменім сістэмай m^2 скалярных раўнанняў $(\lambda_i - \lambda_j - 1)v_{ij}^1 = p_{ij}^{*0} - p_{ij}^0$.

Калі $\forall i, j \quad \lambda_i - \lambda_j \ne 1$, прыняўшы $p_{ij}^{*0} = 0$, знаходзім

$$v_{ij}^1 = \frac{-p_{ij}^0}{\lambda_i - \lambda_j - 1} \qquad i, j = \overline{1, m}.$$

Няхай пры некаторых $i < j$ выконваецца $\lambda_i - \lambda_j = 1$. Тады накладзем дадатковую ўмову $p_{ij}^0 = 0$, атрымаем $p_{ij}^{*0} = 0$. Пры гэтым v_{ij}^1 можна выбраць адвольныя. Матрыца V_1 выбрана так, што $P_0^* = \mathrm{O}$.

2) Для знаходжання V_2 выкарыстоўваем 3-е раўнанне ў (6) $(\lambda_i - \lambda_j - 2)v_{ij}^2 = p_{ij}^{*1} - p_{ij}^1 - (P_0 V_1)_{ij}$.

Калі $\forall i, j \quad \lambda_i - \lambda_j \ne 2$, прыняўшы $p_{ij}^{*1} = 0$, знаходзім

$$v_{ij}^2 = \frac{-(p_{ij}^1 + (P_0 V_1)_{ij})}{\lambda_i - \lambda_j - 2} \qquad i, j = \overline{1, m}.$$

Няхай пры некаторых $i < j$ выконваецца $\lambda_i - \lambda_j = 2$. Тады накладзем дадатковую ўмову $p_{ij}^1 + (P_0 V_1)_{ij} = 0$, атрымаем $p_{ij}^{*1} = 0$. Пры гэтым v_{ij}^2 можна выбраць адвольныя. Матрыца V_2 выбрана так, што $P_1^* = \mathrm{O}$ і г. д. Калі працягнем працэс далей і накладзем неабходныя дадатковыя ўмовы, паслядоўна азначаем $V_1, V_2, \ldots$ так, што $P_{-1}^* = P_{-1}$, $P_k^* = \mathrm{O}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Раўнанне (4) прымае форму раўнання тыпу Кашы

$$DY = P_{-1} \frac{I}{h} Y, \text{ дзе } P_{-1} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}, \text{ агульны развязак якога мае выгляд}$$

$$Y = h^{P_{-1}} C = \mathrm{diag}\{h^{\lambda_1}, \cdots, h^{\lambda_m}\} C,$$

дзе $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ – адвольная матрыца.

Агульны развязак раўнання (3) , якое адпавядае (1), запішацца ў форме

$$X = V(h) h^{P_{-1}} C = V(h) \mathrm{diag}\{h^{\lambda_1}, \cdots, h^{\lambda_m}\} C,$$

пры гэтым $X_0 = \mathrm{O}$.

1.3. Няхай $P_{-1} = T^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}T$, дзе $T \in \mathbb{C}^{m\times m}$ і $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 1$. Увёўшы замену $Z = TX$, прывядзем (3) да ўжо разгледжанага выгляду $DZ = \Lambda Z$, дзе $\Lambda = \Lambda_{-1}\frac{I}{h} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\Lambda_k h^k$, $\Lambda_{-1} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$.

1.4. Калі матрыца P_{-1} не мае простай структуры, $h^{P_{-1}}$ не азначаецца ні ў $K_0^{m\times m}$, ні ў $K^{m\times m}$, бо ў гэтых алгебрах не азначаны $\ln h$. У гэтым выпадку раўнанне (1) не мае развязкаў у шуканым класе.

2. Неаднароднае дыскрэтнае матрычнае раўнанне.

Л е м а. *Няхай* $V(h) = E + \sum\limits_{k=1}^{\infty} V_k h^k \in K_0^{m\times m}$. *Тады* $\forall V_k \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *элемент* $V(h)$ *абарачальны ў* $K_0^{m\times m}$ *і яго адваротны мае выгляд* $V^{-1}(h) = E + \sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k h^k$, *дзе матрыцы* W_k *яўна выражаюцца праз* V_k.

Разгледзім неаднароднае матрычнае раўнанне

$$(An + B)X_{n+1} + (Mn + L)X_n = Y_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

з зададзенай пачатковай умовай X_0.

Яго ўяўленнем у алгебры $K^{m\times m}$ будзе

$$(A + Mh)DX + ((B - A)s + L)X = Y + (B - A)X_0 s,$$

што можна запісаць у стандартным выглядзе

$$DX = (A + Mh)^{-1}((A - B)s - L)X + (A + Mh)^{-1}(Y + (B - A)X_0 s)$$

ці

$$DX = P(h)X + F(h). \tag{8}$$

Будзем шукаць прыватны развязак раўнання (8) метадам варыяцыі адвольнай сталай, выкарыстоўваючы агульны развязак адпаведнага аднароднага раўнання.

Вылучаюцца наступныя выпадкі.

2.1. У выпадку $P(h) = \lambda E\frac{I}{h} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k h^k$ прыватны развязак будзем шукаць у выглядзе

$$X^* = V(h)h^{\lambda}C(h), \tag{9}$$

дзе $V(h)$ азначаны раней; $C(h)$ – шуканая матрычная гіперпаслядоўнасць. Падставіўшы (9) у (8), атрымаем

$$DV(h)h^{\lambda}C(h) + V(h)\lambda h^{\lambda-1}C(h) + V(h)h^{\lambda}DC(h) = P(h)V(h)h^{\lambda}C(h) + F(h). \tag{10}$$

Пакажам, што $\forall C(h)$ праўдзіцца $DV(h)h^{\lambda}C(h) + V(h)\lambda h^{\lambda-1}C(h) = P(h)V(h)h^{\lambda}C(h)$, што эквівалентна ланцужку раўнанняў:

$$DV(h)h^{\lambda} + V(h)\lambda h^{\lambda-1} = P(h)V(h)h\lambda \Leftrightarrow DV(h)h + V(h)\lambda = P(h)V(h)h \Leftrightarrow$$

$$D\left(E + \sum_{k=1}^{\infty} V_k h^k\right)h + \lambda E + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda V_k h^k = \left(\sum_{k=-1}^{\infty} P_k h^{k+1}\right)\left(E + \sum_{k=1}^{\infty} V_k h^k\right) \Leftrightarrow$$

$$\lambda E + \sum_{k=1}^{\infty}(k + \lambda)V_k h^k = (\lambda E + P_0 h + P_1 h^2 + \cdots)(E + V_1 h + V_2 h^2 + \cdots).$$

Прыраўняўшы каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях h, атрымаем сістэму матрычных раўнанняў

$$\begin{cases} V_1 = P_0 \\ 2V_2 = P_0 V_1 + P_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (k+1)V_{k+1} = P_0 V_k + P_1 V_{k-1} + \cdots + P_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases},$$

што супадае з той, з якой раней былі знойдзены каэфіцыенты $V_1, \ldots, V_k, \ldots$. Такім чынам, (10) зводзіцца да раўнання

$$DC(h) = h^{-\lambda} V^{-1}(h) F(h).$$

Адкуль $C(h) = \int h^{-\lambda} V^{-1}(h) F(h)$. Тады з (9) знаходзім прыватны развязак раўнання (8)

$$X^* = V(h) h^{\lambda} \int h^{-\lambda} V^{-1}(h) F(h), \tag{11}$$

дзе $\int$ – аператар алгебраічнага інтэгравання [1], які азначаны толькі для матрыц-гіперпаслядоўнасцей X, у якіх $X_{-1} = O$, і дзейнічае па формуле $\int X = h * \left\{ \frac{1}{n+1} X_n \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Высветлім, пры якіх умовах (11) дае шуканы развязак у $K_0^{m\times m}$. З нагоды лемы $V^{-1}(h) = E + \sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k h^k$. Для $F(h)$ атрымаем уяўленне

$$F(h) = (A + Mh)^{-1}(Yh + (B - A)X_0)\frac{I}{h} =$$
$$(E - (A^{-1}Mh) + (A^{-1}Mh)^2 + \cdots) A^{-1}(Yh + (B - A)X_0)\frac{I}{h} =$$
$$(E - (A^{-1}Mh) + (A^{-1}Mh)^2 + \cdots)(A^{-1}Yh + (A^{-1}B - E)X_0)\frac{I}{h} =$$
$$(E - (A^{-1}Mh) + (A^{-1}Mh)^2 + \cdots)(A^{-1}Yh - \lambda X_0)\frac{I}{h}.$$

Тады

$$V^{-1}(h)F(h)h^{-\lambda} = \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} W_k h^k \right)\left(E - (A^{-1}Mh) + (A^{-1}Mh)^2 + \cdots \right)(A^{-1}Yh - \lambda X_0)\frac{I}{h^{\lambda+1}} =$$
$$-\lambda X_0 \frac{I}{h^{\lambda+1}} + G_1 \frac{I}{h^{\lambda}} + G_2 \frac{I}{h^{\lambda-1}} + \cdots + G_{\lambda}\frac{I}{h} + G_{\lambda+1} + G_{\lambda+2}h + \cdots.$$

Для існавання інтэграла ў (11) неабходна, каб $G_{\lambda} = O$, што эквівалентна

$$\lambda \sum_{k=0}^{\lambda} W_k (-A^{-1}M)^{\lambda-k} X_0 = \sum_{k=0}^{\lambda-1} W_k (-A^{-1}M)^{\lambda-1-k} A^{-1}Y. \tag{12}$$

Пры выкананні дадзенай умовы з (11) атрымаем

$$X^* = \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} V_k h^k \right)\left(X_0 + \frac{1}{1-\lambda} G_1 h + \frac{1}{2-\lambda} G_2 h^2 + \cdots + \frac{1}{-1} G_{\lambda-1} h^{\lambda-1} + \frac{1}{1} G_{\lambda+1} h^{\lambda+1} + \cdots + \frac{1}{k-\lambda} G_k h^k + \cdots \right),$$

адкуль бачна, што знойдзены прыватны развязак задавальняе пачатковай умове.

Агульны развязак раўнання (7) у гэтым выпадку

$$X = V(h) h^{\lambda} C + X^*, \tag{13}$$

дзе $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ – адвольная матрыца.

2.2. У выпадку $P_{-1} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}, \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_m \ge 1$, паўтарыўшы з неабходнымі зменамі папярэднія разважанні, атрымаем прыватны развязак раўнання (8) у выглядзе

$$X^* = V(h)\mathrm{diag}\{h^{\lambda_1}, \cdots, h^{\lambda_m}\}\int \mathrm{diag}\{h^{-\lambda_1}, \cdots, h^{-\lambda_m}\} V^{-1}(h)F(h). \tag{14}$$

Высветлім умовы, пры якіх (14) дае развязак у алгебры $K_0^{m\times m}$. Маем

$$\mathrm{diag}\{h^{-\lambda_1}, \cdots, h^{-\lambda_m}\} V^{-1}(h)F(h) =$$
$$\mathrm{diag}\{h^{-\lambda_1}, \cdots, h^{-\lambda_m}\}\left(E + \sum_{k=1}^{\infty} W_k h^k \right)(E - (A^{-1}Mh) + (A^{-1}Mh)^2 + \cdots)(A^{-1}Yh - P_{-1}X_0) = \tag{15}$$
$$-\mathrm{diag}\{h^{-\lambda_1 - 1}, \cdots, h^{-\lambda_m - 1}\} P_{-1} X_0 + \mathrm{diag}\{h^{-\lambda_1 - 1}, \cdots, h^{-\lambda_m - 1}\}\sum_{k=1}^{\infty} H_k h^k,$$

дзе $H_k = -\sum\limits_{j=0}^{k} W_j (-A^{-1}M)^{k-j} P_{-1} X_0 + \sum\limits_{j=0}^{k-1} W_j (-A^{-1}M)^{k-1-j} A^{-1}Y, \; W_0 = E.$

Для існавання інтэграла ў (14) павінна выконвацца m^2 скалярных роўнасцей:

$$(H_{\lambda_1})_{1i} = \mathrm{O}, \ldots, (H_{\lambda_m})_{mi} = \mathrm{O}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{16}$$

Тады, падставіўшы (15) у (14), атрымаем

$$X^* = \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} V_k h^k\right) \mathrm{diag}\{h^{\lambda_1}, \cdots, h^{\lambda_m}\} \times$$

$$\int \left(-\mathrm{diag}\{\lambda_1 h^{-\lambda_1 - 1}, \cdots, \lambda_m h^{-\lambda_m - 1}\} X_0 + \mathrm{diag}\{h^{-\lambda_1 - 1}, \cdots, h^{-\lambda_m - 1}\} \sum_{k=1}^{\infty} H_k h^k\right) =$$

$$\left(E + \sum_{k=1}^{\infty} V_k h^k\right)\left(X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{k - \lambda_1}, \ldots, \frac{1}{k - \lambda_m}\right\} H_k h^k\right),$$

дзе пад знакам сумы для $k = \lambda_j$ адпаведныя значэнні $\dfrac{1}{k - \lambda_j}$ неабходна замяніць нулём. Відавочна, $X_0^* = X_0$.

Агульны развязак (7) у дадзеным выпадку будзе

$$X = V(h)\mathrm{diag}\{h^{\lambda_1}, \cdots, h^{\lambda_m}\} C + X^*, \tag{17}$$

дзе $C \in \mathbb{C}^{m \times m}$ – адвольная матрыца.

2.3. Няхай $P_{-1} = T^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}T$, дзе $T \in \mathbb{C}^{m\times m}$ і $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 1$. Увёўшы замену $Z = TX$, прывядзем (8) да ўжо разгледжанага выгляду $DZ = \Lambda Z + TF$, дзе $\Lambda = \Lambda_{-1}\dfrac{I}{h} + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k h^k$, $\Lambda_{-1} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$.

Такім чынам, развязальнасць раўнання (7) з пачатковай умовай X_0 у алгебры $K_0^{m\times m}$ апісвае

Т э а р э м а.

1) Няхай $E - A^{-1}B = \lambda E$, $\lambda \geq 1$, – цэлы. Тады агульны развязак раўнання (7) пры выкананні ўмоў (12) мае выгляд (13);

2) Няхай $E - A^{-1}B = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 1$ – цэлыя. Агульны развязак (7) пры выкананні ўмоў (16) запісваецца ў выглядзе (17);

3) Выпадак $E - A^{-1}B = T^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}T$, дзе $T \in \mathbb{C}^{m\times m}$ і $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 1$ – цэлыя, пераўтварэннем падабенства прыводзіцца да папярэдняга;

4) У астатніх выпадках раўнанне (7) не мае развязкаў у алгебры $K_0^{m\times m}$.

Літаратура

1. *Васільеў І. Л., Навічкова Д. А.* // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2010. № 3. С. 114–119.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1954. – 492 с.

I. L. VASILIEV, D. A. NAVICHKOVA

navdasha@tut.by

FIRST-ORDER DISCRETE EQUATIONS
WITH MATRIX VARIABLE NONCOMMUTATIVE COEFFICIENTS

Summary

We consider the first-order matrix difference equation with variable noncommutative coefficients. In the algebra of matrix hypersequences, this equation corresponds to the first-order matrix algebraic differential equation with a regular singular point. It is proved that there exists a supstitution, which can reduce the equation under consideration to the Cauchy-type equation. This substitution can be found explicitly as the solution of some infinite system of matrix algebraic equations. The general solution of the equation is obtained in the algebra of matrix sequences.