Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 март–апрель Том 58 № 2

УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

А. В. АСТАФЬЕВА, А. П. СТАРОВОЙТОВ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины *Поступило 10.03.2014*

Введение. Диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде I типа (Latin type) и $(n-1)$-го порядка для набора экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^{k}$ называют $k+1$ многочлен $A_0(z), A_1(z), ..., A_k(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$\sum_{p=0}^{k} A_p(z)e^{pz} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \to 0, \tag{1}$$

где предполагается, что хотя бы один многочлен $A_p(z)$ тождественно не равен нулю.

Такие аппроксимации ввел в рассмотрение Эрмит [1] в 1883 г. Еще раньше в своей известной работе, посвященной доказательству трансцендентности числа e, Эрмит [2] определил $k+1$ многочлен $Q_{kn}(z), P_{kn}^1(z), ..., P_{kn}^k(z)$ степени не выше kn, для которых

$$R_n^j(z) := Q_{kn}(z)e^{jz} - P_{kn}^j(z) = O(z^{kn+n+1}), \quad z \to 0. \tag{2}$$

Набор рациональных функций $\pi_{kn,kn}^j(z; e^{j\xi}) = P_{kn}^j(z) / Q_{kn}(z)$, $j = 1, 2, ..., k$, принято называть диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде II типа (German type) n-го порядка (по поводу терминологии см. [3]). В [4] показано, что с помощью аппроксимаций Эрмита–Паде I типа также можно доказать трансцендентность числа e.

В одномерном случае ($k=1$) общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1), (2), принадлежит Паде, а построенные в обоих случаях многочлены совпадают. В многомерном случае ($k \geq 2$) систематическое изучение аппроксимаций Эрмита–Паде I и II типов связано с появлением работы К. Малера [4] (об участии других авторов в создании формальной теории см. [5]). Оба типа аппроксимаций Эрмита–Паде, явно различные в многомерном случае, имеют множество приложений (см. [5; 6]).

При $k=1$ приходим к классическим аппроксимациям Паде. В этом случае $A_0(z) = -P_{n-1}^1(z)$, $A_1(z) = Q_{n-1}(z)$, и, хорошо известно, что аппроксимации Паде $\pi_{n,n}(z; e^{\xi}) = P_n^1(z) / Q_n(z)$ обладают рядом экстремальных свойств, в частности, они являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями e^z.

В данном сообщении рассматриваются диагональные аппроксимации Эрмита–Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ с произвольными различными комплексными показателями λ_p, $p = 0, 1, ..., k$. Для многочленов $A_n^o(z), A_n^1(z), ..., A_n^k(z)$ степени не выше $n-1$, удовлетворяющих условиям

$$R_n(z) = \sum_{p=0}^{k} A_n^p(z)e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \to 0,$$

найдена асимптотика остаточного члена $R_n(z)$ и установлено, что для действительных $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_k$ нормированные и преобразованные соответствующим образом многочлены $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^{k}$ являются решением следующей экстремальной задачи:

при заданном n найти многочлены $a_n^p(z)$, $p = 0, 1, ..., k$, степени не выше n, со старшим коэффициентом многочлена $a_n^k(z)$, равным 1, *реализующие минимум в следующем равенстве:*

$$E_n = E_n(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k; \rho) = \min_{\{a_n^p(z)\}_{p=0}^k} \left\| \sum_{p=0}^{k} a_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right\|_\rho ,$$

где $\|h\|_\rho = \max\{|h(z)| : z \in D_\rho\}$, *а* $D_\rho = \{z : |z| \le \rho\} \subset \mathbb{C}$.

Поскольку найти точные значения E_n не представляется возможным, то конечной целью в задаче является нахождение асимптотики убывания последовательности $\{E_n\}_{n=1}^\infty$.

В случае, когда $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, ..., k$, при $k = 2$ и $\rho = 1$ данная задача была поставлена и решена П. Борвейном [7]. Ф. Вилонский [8] исследовал случай, когда $k \ge 2$ и $\rho < \pi / k$. Ранее при $k = 1$ решения близких по содержанию задач для круга и отрезка получены Л. Трефезеном [9] и Д. Браессом [10].

Сформулируем основной результат.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_k$ − *произвольные действительные числа. Тогда при* $\rho < \pi / (\lambda_k - \lambda_0)$ *и* $n \to \infty$

$$E_n \sim \frac{n! \lambda^{n+1}}{(kn + n + k)!} \rho^{kn+n+k},$$

где $\lambda = \prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p)$.

Теорема 1 является обобщением теорем П. Борвейна [7] и Ф. Вилонского [8]. Она получена в результате исследования асимптотических свойств интегральных представлений остаточного члена $R_n(z)$ и многочленов $A_n^p(z)$. Асимптотические свойства остаточных членов $R_n^j(z)$ аппроксимаций Эрмита–Паде II типа с помощью метода Лапласа описаны в [11]. В данном случае метод Лапласа применяется в сочетании с методом перевала, а технология их применения является результатом синтеза методов работ [8; 11].

Предварительные результаты. В этом и следующем разделах λ_p − произвольные различные комплексные числа, занумерованные так, что $|\lambda_0| \le |\lambda_1| \le ... \le |\lambda_k|$.

Полиномы $A_n^0(z), A_n^1(z), ..., A_n^k(z)$, удовлетворяющие равенствам (3), могут быть получены решением линейной системы $kn + n - 1$ однородных уравнений с $kn + n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p − граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга, а C_∞ − граница круга с центром в нуле столь большого радиуса, что все числа λ_j, $j = 0, 1, ..., k$, принадлежат его внутренности. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \ 0 \le p \le k, \tag{4}$$

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \tag{5}$$

где $\varphi(\xi) = (\xi - \lambda_0)(\xi - \lambda_1) \times ... \times (\xi - \lambda_k)$, удовлетворяют (3) и всем другим условиям.

Далее будем рассматривать нормированную функцию $R_n(z)$, полученную делением $R_n(z)$ на старший коэффициент многочлена $A_n^k(z)$. Чтобы найти его численное значение, продифференцируем $n - 1$ раз равенство (4) при $p = k$. В результате получим, что значение старшего коэффициента $A_n^k(z)$ совпадает со значением интеграла

$$\frac{1}{2\pi i (n-1)!} \int_{C_k} \frac{d\xi}{(\xi - \lambda_k)(\xi - \lambda_0)^n (\xi - \lambda_1)^n \times ... \times (\xi - \lambda_{k-1})^n},$$

который вычисляется по интегральной формуле Коши, и равно $\lambda^{-n} / (n-1)!$.

Для нахождения асимптотики интеграла в (5) будем использовать известные методы комплексного анализа. Приведем без доказательств в удобном для нас виде необходимые утверждения [12, с. 398, 415].

У т в е р ж д е н и е 1 (метод Лапласа). *Пусть* $f(x), S(x)$ *непрерывные на отрезке* $[a,b]$ *функции, при этом* $S(x)$ *принимает только действительные значения, а* $f(x)$ *может быть комплексно-значной. Полагаем*

$$I_n = \int_a^b f(x) e^{nS(x)} dx.$$

Предполагаем, что $S(x)$ *в точке* $x_0 \in (a,b)$ *имеет абсолютный максимум на отрезке* $[a,b]$, *т. е.* $S(x) < S(x_0)$, $x \neq x_0$, $S''(x_0) \neq 0$ *и функции* $f(x)$, $S(x)$ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0. *Тогда при* $n \to +\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$I_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{nS(x_0)} (f(x_0) + O(1/n)).$$

У т в е р ж д е н и е 2 (метод перевала). *Пусть функции* $f(z)$ *и* $S(z)$ *регулярны в некоторой области* G, *содержащей кусочно гладкую кривую* γ *и*

$$F_n = \int_\gamma f(\xi) e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Предположим, что $\max_\gamma \operatorname{Re} S(\xi)$ *достигается только в точке* z_0, *которая является внутренней точкой контура и простой точкой перевала, т. е.* $S'(z_0) = 0, S''(z_0) \neq 0$. *Считаем также, что в окрестности* z_0 *контур* γ *проходит через оба сектора [12, с. 414], в которых* $\operatorname{Re} S(\xi) < \operatorname{Re} S(z_0)$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}} e^{nS(z_0)} (f(z_0) + O(1/n)). \tag{6}$$

Выбор ветви корня в (6) определяется из условий

$$\arg \sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

где φ_0 – *угол между касательной к кривой* l *в точке* z_0 *и положительным направлением действительной оси, а* l – *линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку* z_0, *т. е. для* l *в окрестности* z_0 *выполняются условия:* $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ *при* $z \in l$; $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$ *при* $z \in l$, $z \neq z_0$.

Асимптотика остаточного члена $R_n(z)$.

Т е о р е м а 2. *При* $n \to \infty$ *равномерно по* z *на компактах в* $\mathbb{C}$

$$R_n(z) \sim \frac{e^{\frac{\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_k}{k+1} z}}{(kn+n-1)!} z^{kn+n-1}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_j\}_{j=0}^k$ и некотором $w \in \mathbb{C}$ рассмотрим функцию

$$S(\xi) = w\xi - \ln \varphi(\xi),$$

где $\ln \varphi(\xi) = \ln|\varphi(\xi)| + i \arg_0 \varphi(\xi)$ – главная ветвь логарифма, т. е. $\arg_0 \varphi(\xi) \in (-\pi, \pi]$. В области ее определения

$$S'(\xi) = w - \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = w - \frac{1}{\xi - \lambda_0} - \frac{1}{\xi - \lambda_1} - \ldots - \frac{1}{\xi - \lambda_k},$$

$$S''(\xi) = \frac{1}{(\xi - \lambda_0)^2} + \frac{1}{(\xi - \lambda_1)^2} + \ldots + \frac{1}{(\xi - \lambda_k)^2}.$$

Возьмем произвольное $z \in \mathbb{C}$ и представим $R_n(z)$ в виде

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} e^{\xi z - n \ln \varphi(\xi)} d\xi.$$

В этом равенстве сделаем замену $z = nw$. Тогда

$$R_n(nw) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} e^{nS(\xi)} d\xi. \tag{8}$$

Будем искать критические точки функции $S(\xi)$, т. е. нули $S'(\xi)$. Они являются корнями уравнения

$$w\varphi(\xi)=\varphi'(\xi),$$

которое можно записать в виде

$$w=\frac{1}{\xi-\lambda_0}+\frac{1}{\xi-\lambda_1}+\ldots+\frac{1}{\xi-\lambda_k}. \tag{9}$$

Поскольку контур C_∞ должен охватывать все точки λ_p, то будем искать критическую точку, достаточно удаленную от нуля. В этом случае, сделав замену $\zeta=1/\xi$, представим правую часть равенства (9) в виде степенного ряда. Обращая полученный ряд с использованием формул Бурмана–Лагранжа [12, с. 266], получим зависимость поведения критической точки ξ_0 от значений w, которые с учетом замены $z=nw$ находятся в достаточно малой окрестности нуля:

$$\xi_0=\frac{k+1}{w}+\frac{\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_k}{k+1}+O(w). \tag{10}$$

Для применения метода перевала необходимо так определить контур C_∞, проходящий через ξ_0, чтобы он охватывал все точки $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ и функция $\operatorname{Re}S(\xi)$ достигала на C_∞ своего наибольшего значения в единственной точке ξ_0. С этой целью рассмотрим линии уровня функций $\varphi(\xi)$ и $e^{-w\xi}$, проходящие через точку ξ_0:

$$L=\{\xi\in\mathbb{C}:|\varphi(\xi)|=|\varphi(\xi_0)|\},$$

$$L_1=\{\xi\in\mathbb{C}:\left|e^{-w\xi}\right|=\left|e^{-w\xi_0}\right|\}.$$

L является лемнискатой, а L_1 − прямой, проходящей через ξ_0. Можно показать, что из равенства $\varphi'(\xi)=w\varphi(\xi_0)$ следует, что L_1 является касательной к L в точке ξ_0 и образует с положительным направлением оси абсцисс угол, равный $\arg(i/w)$.

При достаточно малых $|w|$ лемниската L является жордановой аналитической кривой и охватывает все нули $\varphi(\xi)$, а прямая L_1 разбивает плоскость на две полуплоскости, одна из которых (полуплоскость Ω) содержит L. В полуплоскости Ω модуль $e^{-w\xi}$ больше модуля $e^{-w\xi_0}$, и значит $\operatorname{Re}(w\xi)<\operatorname{Re}(w\xi_0)$ при $\xi\in\Omega$. Кроме этого, лемниската L разбивает плоскость на две связные области − внутреннюю и внешнюю. Если ξ принадлежит внешней области, то $|\varphi(\xi)|>|\varphi(\xi_0)|$, т. е. $-\ln|\varphi(\xi)|<-\ln|\varphi(\xi_0)|$.

Для построения искомого контура C_∞ возьмем отрезок с центром в точке ξ_0, принадлежащий L_1 и соединим его концы жордановой кривой, которая лежит в полуплоскости Ω и охватывает L. Построенный контур C_∞ соответствует всем необходимым требованиям. В таком случае к интегралу (8) можно применить утверждение 2. В результате получим

$$R_n(nw)=\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(\xi_0)}}e^{nS(\xi_0)}(1+O(1/n)). \tag{11}$$

Из (10) следует, что

$$e^{nS(\xi_0)}=e^{(k+1)n}\left(\frac{w}{k+1}\right)^{(k+1)n}e^{\frac{\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_k}{k+1}nw}(1+O(w^2)), \tag{12}$$

$$S''(\xi_0)=\frac{w^2}{k+1}(1+O(w)).$$

Если учесть, что для контура C_∞ угол $\varphi_0=\arg(i/w)$, то из последнего соотношения находим

$$\sqrt{\frac{-1}{S''(\xi_0)}}=\sqrt{k+1}\,\frac{i}{w}(1+O(w)). \tag{13}$$

Из (11), (12) и (13) с учетом замены $z=nw$ окончательно получаем, что

$$R_n(z)=\sqrt{\frac{(k+1)n}{2\pi}}\left(\frac{e}{(k+1)n}\right)^{(k+1)n}e^{\frac{\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_k}{k+1}z}z^{kn+n-1}(1+O(1/n)).$$

Отсюда и из формулы Стирлинга вытекает справедливость асимптотического равенства (7) для любого комплексного числа z.

Равномерность асимптотики в (7) следует из теоремы Витали и того, что последовательность функций

$$(kn+n-1)!e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_k)z/(k+1)}R_n(z)/z^{kn+n-1}$$

равномерно ограничена по модулю на компактах в $\mathbb{C}$. Действительно,

$$\left|R_n(nw)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} e^{n\operatorname{Re}S(\zeta(t))}\left|\zeta'(t)\right|dt, \tag{14}$$

где контур интегрирования C_∞ прежний и параметризуется вещественным параметром $t\in[\alpha,\beta]$. Для нахождения асимптотики интеграла в (14) применим утверждение 1. Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{n\operatorname{Re}S(\zeta(t))}\left|\zeta'(t)\right|dt = \sqrt{\frac{-2\pi}{n[\operatorname{Re}S(\zeta(t))]''_{t=t_0}}}e^{nS(\xi_0)}\left|\zeta'(t_0)\right|(1+O(1/n)),$$

где t_0 выбрано так, что $\zeta(t_0)=\xi_0$.

Отсюда и из предыдущих равенств вытекает необходимое неравенство

$$\left|R_n(z)\right| \le \frac{\left|z\right|^{kn+n-1}}{(kn+n-1)!}\left|e^{\frac{\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_k}{k+1}z}\right|(1+O(1/n)).$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Далее считаем, что $\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_k$ − произвольные действительные числа. Вслед за Д. Браессом [10] рассмотрим сдвиг аппроксимаций Эрмита–Паде n-го порядка. Пусть

$$\tilde{a}_n^p(z) = n!\lambda^{n+1}A_{n+1}^p(z-z_n), \quad 0\le p\le k,$$

$$\tilde{R}_n(z) = n!\lambda^{n+1}R_{n+1}(z-z_n), \quad E_n^* = \left\|\tilde{R}_n\right\|_\rho,$$

где

$$z_n = \frac{\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_k}{k+1}\,\frac{\rho^2}{kn+n+k},$$

а множитель $n!\lambda^{n+1}$ в приведенных выше формулах нормализует многочлен $\tilde{a}_n^k(z)$ так, что его старший коэффициент равен 1.

Справедливость теоремы 1 вытекает из следующих лемм.

Л е м м а 1. *При* $n\to\infty$

$$E_n^* \sim \frac{n!\lambda^{n+1}}{(kn+n+k)!}\rho^{kn+n+k}. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 2 и эквивалентности

$$(z-z_n)^{kn+n+k} \sim z^{kn+n+k}e^{-\frac{\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_k}{k+1}\frac{\rho^2}{z}}$$

следует, что при $n\to\infty$ для $|z|=\rho$

$$R_{n+1}(z-z_n) \sim \frac{\rho^{kn+n+k}}{(kn+n+k)!}.$$

Отсюда и из определения E_n^* следует (15). Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Если* $\rho<\pi/(\lambda_k-\lambda_0)$, *а* n *достаточно большое, то* $E_n=E_n^*$.

Лемма 2 доказывается с помощью теоремы Руше методом работы [7] (см. также работу [8]).

Литература

1. *Hermite C.* // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A 1883. Vol. 21. P. 289–308.
2. *Hermite C.* // C. R. Akad. Sci. (Paris) 1873. Vol. 77. P. 18–293.
3. *Mahler K.* // Comp. Math. 1968. Vol. 19. P. 95–166.
4. *Mahler K.* // J. Reine Angew. Math. 1931. Vol. 166. P. 118–150.
5. *Aptekarev A. I., Stahl H.* Progress in Approximation Theory. New York; Berlin, 1992. P. 127–167.
6. *Chudnovsky G. V.* Lecture Notes in Math. New York; Berlin, 1982. Vol. 925. P. 299–322.
7. *Borwein P. B.* // Const. Approx. 1986. Vol. 62. P. 291–302.
8. *Wielonsky F.* // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90, N 2. P. 283–298.
9. *Trefethen L. N.* // J. Approx. Theory. 1984. Vol. 40, N 4. P. 380–384.
10. *Braess D.* // J. Approx. Theory. 1984. Vol. 40, N 4. P. 375–379.
11. *Старовойтов А. П.* // Проблемы физики, математики и техники. 2013. № 1(14). С. 81–87.
12. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М., 1989.

A. V. ASTAFYEVA, A. P. STAROVOITOV

svoitov@gsu.by

EXTREMAL PROPERTIES OF DIAGONAL HERMITE–PADE APPROXIMANTS OF EXPONENTIAL FUNCTIONS

Summary

The paper deals with extremal properties of diagonal Hermite-Pad'e approximants of type I for exponential system $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ with arbitrary $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k$. Proved theorems complement known results of P. Borwein, F. Wielonsky.