Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 март–апрель Том 58 № 2

ФИЗИКА

УДК 539.12

О. В. ВЕКО, К. В. КАЗМЕРЧУК, Е. М. ОВСИЮК

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ ДЕ СИТТЕРА

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина *Поступило 17.02.2014*

Пространства де Ситтера и анти де Ситтера привлекают постоянное внимание в контексте развития квантовой теории в искривленном пространстве-времени. Долгую историю имеет вопрос об описании частиц с разными спинами на фоне этих геометрических моделей, и, в частности, задача нахождения точных решений этих уравнений [1–13]. Этот пример пространственно-временной геометрии интересен с теоретической точки зрения, поскольку в силу его высокой симметрии много задач классической и квантовой теории поля могут быть доведены до их полных и точных аналитических решений: например, анализ эффекта Хокинга в пространстве де Ситтера. Эта модель пространства интересна и с точки зрения квантовой механики: например, в квантово-механической теории атома водорода на фоне геометрии де Ситтера принципиально невозможно существование стационарных состояний; такое влияние геометрии де Ситтера универсально и проявляется аналогичным образом для всех квантово-механических систем.

Разделение переменных в уравнении Дирака. Рассмотрим общековариантное уравнение Дирака

$$\{i\gamma^k (e^{\alpha}_{(k)}\partial_\alpha + B_k) - m\}\Psi = 0, \;\; B_k(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\sqrt{-g}\,e^{\alpha}_{(k)} \tag{1}$$

в нестатических координатах пространства-времени де Ситтера $x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$

$$dS^2 = dt^2 - \cosh^2 t[dr^2 + \sin^2 r(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)],$$

используя тетраду

$$e^{\alpha}_{(0)} = (1, 0, 0, 0), \quad e^{\alpha}_{(1)} = (0, 0, \frac{1}{\cosh t \sin r}, 0),$$

$$e^{\alpha}_{(2)} = (0, 0, 0, \frac{1}{\cosh t \sin r \sin\theta}), \qquad e^{\alpha}_{(3)} = (0, \frac{1}{\cosh t}, 0, 0).$$

Уравнение (1) примет вид (в волновой функции удобно выделить специальный множитель)

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sin r}\frac{1}{\sinh^{3/2} t}\varphi(x), \;\; \left[i\gamma^0 \cosh t\partial_t + i\gamma^3\partial_r + \frac{1}{\sin r}\Sigma_{\theta\phi} - m\cosh t\right]\varphi = 0,$$

$$\Sigma_{\theta,\phi} = i\gamma^1\partial_\theta + \gamma^2\frac{i\partial_\phi + i\sigma^{12}\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Выбираем следующую подстановку для электронной волновой функции [14] (вигнеровские функции обозначаем посредством $D^{j}_{-m,\sigma}(\phi, \theta, 0) \equiv D_\sigma$):

$$\varphi_{jm}(x) = \begin{vmatrix} f_1(t,r)D_{-1/2} \\ f_2(t,r)D_{+1/2} \\ f_3(t,r)D_{-1/2} \\ f_4(t,r)D_{+1/2} \end{vmatrix}.$$

Используя рекуррентные соотношения [15]

$$\partial_\theta D_{+1/2} = aD_{-1/2} - bD_{+3/2}, \quad \frac{-m - 1/2\cos\theta}{\sin\theta} D_{+1/2} = -aD_{-1/2} - bD_{+3/2},$$
$$\partial_\theta D_{-1/2} = bD_{-3/2} - aD_{+1/2}, \quad \frac{-m + 1/2\cos\theta}{\sin\theta} D_{-1/2} = -bD_{-3/2} - aD_{+1/2},$$
$$a = \frac{j+1/2}{2}, \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{(j-1/2)(j+3/2)},$$

приходим к радиальным уравнениям

$$\begin{aligned}
&i\cosh t \frac{\partial}{\partial t} f_3 - i\frac{\partial}{\partial r} f_3 - i\frac{\nu}{\sin r} f_4 - m\cosh t f_1 = 0,\\
&i\cosh t \frac{\partial}{\partial t} f_4 + i\frac{\partial}{\partial r} f_4 + i\frac{\nu}{\sin r} f_3 - m\cosh t f_2 = 0,\\
&i\cosh t \frac{\partial}{\partial t} f_1 + i\frac{\partial}{\partial r} f_1 + i\frac{\nu}{\sin r} f_2 - m\cosh t f_3 = 0,\\
&i\cosh t \frac{\partial}{\partial t} f_2 - i\frac{\partial}{\partial r} f_2 - i\frac{\nu}{\sin r} f_1 - m\cosh t f_4 = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\nu = j + 1/2$.
Диагонализируя оператор пространственного отражения $\widehat{\Pi}_{sph}\Psi_{jm} = \Pi\Psi_{jm}$, получаем [14]

$$\Pi = \delta(-1)^{j+1}, \ \delta = \pm 1, \quad f_4 = \delta f_1, \quad f_3 = \delta f_2;$$

таким образом,

$$\varphi(x)_{jm\delta} = \begin{vmatrix} f_1(t,r)D_{-1/2} \\ f_2(t,r)D_{+1/2} \\ \delta f_2(t,r)D_{-1/2} \\ \delta f_1(t,r)D_{+1/2} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Учитывая (3), упрощаем систему уравнений (2):

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\nu}{\sin r}\right) f + \left(i\cosh t \frac{\partial}{\partial t} + \delta m\cosh t\right) g = 0,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu}{\sin r}\right) g - \left(i\cosh t \frac{\partial}{\partial t} - \delta m\cosh t\right) f = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где вместо $f_1(t,r)$ и $f_2(t,r)$ используем их линейные комбинации $f(t,r) = (f_1 + f_2)/\sqrt{2}$, $g(t,r) = (f_1 - f_2)/i\sqrt{2}$. В системе уравнений (4) можно разделить переменные, если ввести подстановки

$$f(t,r) = f(t)f(r), \quad g(t,r) = g(t)g(r),$$
$$\frac{1}{g(r)}\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{\sin r}\right) f(r) = -\frac{1}{f(t)}\left(i\cosh t \frac{d}{dt} + \delta m\cosh t\right) g(t) = \lambda,$$
$$\frac{1}{f(r)}\left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{\sin r}\right) g(r) = \frac{1}{g(t)}\left(i\cosh t \frac{dl}{dt} - \delta m\cosh t\right) f(t) = \mu.$$

В результате приходим к двум системам уравнений по разным переменным:

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{\sin r}\right)f(r)=\lambda g(r), \quad \left(\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{\sin r}\right)g(r)=\mu f(r); \tag{5}$$

$$\left(i\cosh t\frac{d}{dt}+\delta m\cosh t\right)g(t)=-\lambda f(t), \quad \left(i\cosh t\frac{d}{dt}-\delta m\cosh t\right)f(t)=\mu g(t). \tag{6}$$

Дальше в системе (6) для определенности будем рассматривать случай $\delta=+1$:

$$\left(i\cosh t\frac{d}{dt}+m\cosh t\right)g(t)=-\lambda f(t), \quad \left(i\cosh t\frac{d}{ddt}-m\cosh t\right)f(t)=\mu g(t); \tag{7}$$

вариант с $\delta=-1$ будет следовать из (7) при выполнении формальной замены $m\Rightarrow -m$.

Из (5) получаем уравнения для $f(r)$ и $g(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\nu\frac{\cos r}{\sin^2 r}-\frac{\nu^2}{\sin^2 r}-\lambda\mu\right)f(r)=0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\nu\frac{\cos r}{\sin^2 r}-\frac{\nu^2}{\sin^2 r}-\lambda\mu\right)g(r)=0.$$

Отмечаем симметрию между уравнениями второго порядка: они получаются друг из друга заменой $\nu\Rightarrow-\nu$; фактически это избавляет нас от необходимости рассматривать оба случая, достаточно исследовать один и ответ для второго случая можно получить формальной заменой.

Из системы уравнений (7) получаем

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\sinh t}{\cosh t}\frac{d}{dt}+m^2-im\frac{\sinh t}{\cosh t}-\frac{\lambda\mu}{\cosh^2}\right)g(t)=0, \tag{9}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\sinh t}{\cosh t}\frac{d}{dt}+m^2+im\frac{\sinh t}{\cosh t}-\frac{\lambda\mu}{\cosh^2}\right)f(t)=0.$$

Решение уравнений по радиальной переменной. Исследуем уравнение (8). Перейдем к новой переменной $y=(1-\cos r)/2$:

$$y(1-y)\frac{d^2}{dy^2}+(\frac{1}{2}-y)\frac{d}{dy}-\left[\frac{\nu}{4y}-\frac{\nu}{4(1-y)}+\frac{\nu^2}{4}\frac{1}{y}+\frac{\nu^2}{4}\frac{1}{1-y}+\lambda\mu\right]f=0. \tag{10}$$

Вводим подстановку $f=y^A(1-y)^B F$; при $2A=\nu+1,-\nu;\quad 2B=-\nu+1,+\nu$ уравнение (10) может быть отождествлено с уравнением гипергеометрического типа

$$y(1-y)F''+[(c-(a+b+1)y]F'-abF=0,$$

$$a=A+B-\sqrt{-\lambda\mu}, \quad b=A+B+\sqrt{-\lambda\mu}.$$

Из физических соображений понятно, что решения по радиальной переменной должны строиться в полиномах и приводить к дискретности (положительного) параметра

$$\Lambda^2=-\lambda\mu>0.$$

Соответствующие решения строятся следующим образом:

$$2A=+\nu+1=j+3/2, \quad c=j+2, \; 2B=+\nu=j+1/2, \quad A+B=j+1,$$

$$a=j+1-\Lambda=-n, \quad n=0,1,2,..., \quad \Lambda=j+1+n, \; b=j+1+\Lambda=2(j+1)+n, \tag{11}$$

$$f(r)=Cy^{(\nu+1)/2}(1-y)^{\nu/2}F(a,b,c,y).$$

Воспользовавшись симметрией между уравнениями для функций $f(r)$ и $g(r)$, построим решения и для функций g:

$$g = C'y^{A'}(1-y)^{B'}G, \quad 2A' = -\nu+1, \nu, \quad 2B' = \nu+1, -\nu,$$
$$2A' = \nu = j+1/2, \quad c' = j+1 = c-1,$$
$$2B' = +\nu+1 = j+3/2, \quad A'+B' = j+1, \tag{12}$$
$$a' = j+1-\Lambda = -n = a, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad \Lambda = j+1+n,$$
$$b' = j+1+\Lambda = 2(j+1)+n = b, \quad g(r) = C'y^{\nu/2}(1-y)^{(\nu+1)/2}F(a, b, c-1, y).$$

Чтобы вычислить относительный множитель между коэффициентами C и C', обратимся к дифференциальным соотношениям (5). Учитывая (11), (12) и выполняя необходимые преобразования, приходим к линейному соотношению

$$\lambda C' = (j+1)C.$$

Решение уравнений по временной переменной. Рассмотрим уравнение (9). Введем новую переменную $y = (1-\tanh t)/2$:

$$\left[y(1-y)\frac{d^2}{dy^2} + \left(\frac{1}{2} - y\right)\frac{d}{dy} - \frac{im(1-2y)}{4y(1-y)} + \frac{m^2}{4y(1-y)} + \Lambda^2\right]g = 0 \tag{13}$$

и подстановку $g = y^A(1-y)^B G$; при $2A = 1+im, -im$; $2B = 1-im, im$ уравнение (13) может быть отождествлено с уравнением гипергеометрического типа

$$y(1-y)F'' + [(c-(a+b+1)y]F' - abF = 0,$$
$$c = 2A + \frac{1}{2}, \quad a = A+B-\Lambda, \quad b = A+B+\Lambda,$$
$$g(y) = Ly^A(1-y)^B G = Ly^A(1-y)^B F(a, b, c, y).$$

Рассмотрим поведение возможных решений при очень больших значениях времени $t \to +\infty$:

$$t \to +\infty, \quad y = \frac{1-\tanh t}{2} \to 0, \quad F(a, b, c, 0) = 1, \quad g \approx Ly^A,$$
$$2A = 1+im, \quad g(t) \approx L\left(\frac{1-\tanh t}{2}\right)^A = Le^{-2At} = Le^{-t}e^{-imt},$$
$$2A = -im, \quad g(t) \approx L\left(\frac{1-\tanh t}{2}\right)^A = Le^{-2At} = Le^{+imt}.$$

Для того чтобы получить правильное описание построенных решений около точки $t \to -\infty (y \to 1)$, воспользуемся соотношением Куммера

$$U_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}U_2 + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}U_6,$$
$$U_1 = F(a, b, c, y), \quad U_2 = F(a, b, a+b+1-c, 1-y),$$
$$U_6 = (1-y)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-y).$$

При $y \to 1$ это соотношение дает

$$F(a, b, c, y) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-y)^{1/2-2B}, \; c-a-b = \frac{1}{2} - 2B,$$

и для функции $g(y)$ получаем

$$g = (1-y)^B \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-y)^{1/2-B}.$$

Соответственно имеем две возможности:

$$t \to -\infty, \quad 1-y \to 0, \quad B = \frac{1}{2} - \frac{im}{2},$$
$$g = (1-y)^{1/2-im/2}\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-y)^{+im/2}$$

и

$$t \to -\infty, \quad 1-y \to 0, \quad B = +\frac{im}{2},$$

$$g = (1-y)^{im/2} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-y)^{1/2-im/2}.$$

При оценке вклада членов в этих асимптотических разложениях следует учитывать соотношения

$$(1-y)^{1/2-im/2} = e^{(1-im)t} = \left(e^{\ln(1-y)}\right)^{1/2-im/2} = e^{(1/2)\ln(1-y)} e^{-i(m/2)\ln(1-y)} =$$

$$e^{(1/2)\ln(1-y)}[\cos(m/2)\ln(1-y) - i\sin(m/2)\ln(1-y)] \to 0$$

(осциллирующий фактор, гасящийся стремящимся к нулю множителем) и

$$(1-y)^{+im/2} = e^{imt} = \left(e^{\ln(1-y)}\right)^{+m/2} = \cos(m/2)\ln(1-y) - i\sin(m/2)\ln(1-y) \quad -$$

(осциллирующая функция).

Воспользовавшись симметрией между уравнениями и проводя формальную замену $m \Rightarrow -m$, находим явный вид (с точностью до множителей) возможных решений для функции $f(t)$:

$$c' = 2A' + \frac{1}{2}, \quad a' = A' + B' - \Lambda, \quad b' = A' + B' + \Lambda,$$

$$f(y) = L'y^{A'}(1-y)^{B'} G' = L'y^{A'}(1-y)^{B'} F(a', b', c', y),$$

где A', B' могут принимать значения согласно

$$2A' = 1 - im, + im, \quad 2B' = 1 + im, - im.$$

Рассмотрим поведение решений при очень больших значениях времени $t \to +\infty$:

$$t \to +\infty, \quad y = \frac{1-\tanh t}{2} \to 0, \quad F(a', b', c', 0) = 1, \quad f \approx L'y^{A'},$$

$$2A' = 1 - im, \qquad f(t) \approx L'\left(\frac{1-\tanh t}{2}\right)^{A'} = L'e^{-2A't} = L'e^{-t}e^{+imt},$$

$$2A' = +im, \qquad f(t) \approx L'\left(\frac{1-\tanh t}{2}\right)^{A'} = L'e^{-2A't} = L'e^{-imt}.$$

При больших отрицательных значениях временной координаты $t \to -\infty$ имеем

$$f = (1-y)^{B'} \frac{\Gamma(c')\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')} + \frac{\Gamma(c')\Gamma(-c'+a'+b')}{\Gamma(a')\Gamma(b')}(1-y)^{1/2-B'}.$$

Соответственно имеем две возможности:

$$t \to -\infty, \qquad 1-y \to 0, \qquad B' = \frac{1}{2} + \frac{im}{2},$$

$$f = (1-y)^{1/2+im/2} \frac{\Gamma(c')\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')} + \frac{\Gamma(c')\Gamma(-c'+a'+b')}{\Gamma(a')\Gamma(b')}(1-y)^{-im/2};$$

$$t \to -\infty, \qquad 1-y \to 0, \qquad B' = -\frac{im}{2},$$

$$f = (1-y)^{-im/2} \frac{\Gamma(c')\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')} + \frac{\Gamma(c')\Gamma(-c'+a'+b')}{\Gamma(a')\Gamma(b')}(1-y)^{1/2+im/2}.$$

При оценке вкладов членов в этих асимптотических разложениях следует учитывать соотношения

$$(1-y)^{1/2+im/2} = e^{(1+im)t} = e^{(1/2)\ln(1-y)}[\cos(-m/2)\ln(1-y) + i\sin(m/2)\ln(1-y)] \to 0,$$

$$(1-y)^{-im/2} = e^{imt} = \left(e^{\ln(1-y)}\right)^{-m/2} = \cos(-m/2)\ln(1-y) + i\sin(m/2)\ln(1-y).$$

Теперь воспользуемся первым уравнением системы (7) и, выбрав явный вид функции $g(t)$, вычислим явный вид соответствующей функции $f(t)$:

$$f(t) = -\frac{(-i)}{2\lambda}\frac{L}{\sqrt{y(1-y)}}y^A(1-y)^B\left[2A(1-y)F - 2ByF + 2y(1-y)\frac{d}{dy}F + imF\right]. \qquad (14)$$

Убедимся, что среди построенных выше решений существуют пары $f(y)$, $g(y)$, удовлетворяющие дифференциальному соотношению (14).

Первая пара:

$$g(y) = Ly^A(1-y)^B F(a,b,c,y),$$

$$A = \frac{1+im}{2}, \qquad B = \frac{im}{2}, \qquad c = 2A + \frac{1}{2} = im + \frac{3}{2},$$

$$a = A + B - \Lambda = im + \frac{1}{2} - \Lambda, \qquad b = A + B + \Lambda = im + \frac{1}{2} + \Lambda;$$

$$f(y) = L'y^{A'}(1-y)^{B'} F(a',b',c',y),$$

$$A' = \frac{im}{2} = A - \frac{1}{2}, \qquad B' = \frac{1+im}{2} = B + \frac{1}{2}, \qquad c' = 2A' + \frac{1}{2} = im + \frac{1}{2} = c - 1,$$

$$a' = A' + B' - \Lambda = im + \frac{1}{2} - \Lambda = a, \qquad b' = A' + B' + \Lambda = im + \frac{1}{2} + \Lambda = b.$$

Уравнение (14) преобразуется для этой пары функций в следующее:

$$f(t) = \frac{i}{\lambda}L\, y^{A'}(1-y)^{B'}\left[(c-1)F + y\frac{d}{dy}F\right].$$

Левую часть заменим согласно

$$f(y) = L'y^{A'}(1-y)^{B'} F(a',b',c',y) = L'y^{A'}(1-y)^{B'} F(a,b,c-1,y),$$

в результате приходим к соотношению

$$L'F(a,b,c-1,y) = \frac{i}{\lambda}L\left[(c-1)F(a,b,c,y) + y\frac{d}{dy}F(a,b,c,y)\right].$$

Отсюда, воспользовавшись известным соотношением для гипергеометрических функций, приходим к линейному соотношению между коэффициентами L, L':

$$L' = \frac{i}{\lambda}L(c-1).$$

Вторая пара:

$$g(y) = L\, y^A(1-y)^B F(a,b,c,y),$$

$$A = -\frac{im}{2} = A' - \frac{1}{2}, \qquad B = \frac{1-im}{2} = B' + \frac{1}{2}, \qquad c = 2A + \frac{1}{2} = -im + \frac{1}{2} = c' - 1,$$

$$a = A + B - \Lambda = -im + \frac{1}{2} - \Lambda = a', \qquad b = A + B + \Lambda = -im + \frac{1}{2} + \Lambda = b';$$

$$f(y) = L'y^{A'}(1-y)^{B'} F(a',b',c',y),$$

$$A' = \frac{1-im}{2}, \qquad B' = -\frac{im}{2}, \qquad c' = 2A' + \frac{1}{2} = -im + \frac{3}{2},$$

$$a' = A' + B' - \Lambda = -im + \frac{1}{2} - \Lambda = a, \qquad b' = A' + B' + \Lambda = -im + \frac{1}{2} + \Lambda = b.$$

Выполнив над вторым уравнением системы (7) аналогичные преобразования, приходим к нужному линейному соотношению между коэффициентами L, L':

$$L = -\frac{i}{2\mu} L'(c' - 1).$$

Таким образом, на основе применения метода разделения переменных построена полная система точных решений уравнения Дирака в нестатических координатах пространства де Ситтера. При разделении переменных использован формализм D-функций Вигнера. На решениях диагонализируются квадрат и третья проекция полного момента, а также оператор пространственного отражения. Уравнения по радиальной переменной приводят к дискретному спектру постоянной разделения. Исследованы асимптотические свойства решений по радиальной и временной переменным.

Авторы благодарны В. М. Редькову за полезные советы при работе над задачей.

Литература

1. *Dirac P. A. M.* // Ann. Math. 1935. Vol. 36. P. 657–669.
2. *Goto K.* // Progr. Theor. Phys. 1951. Vol. 6. P. 1013–1014.
3. *Nachtmann O.* // Commun. Math. Phys. 1967. Vol. 6. P. 1–16.
4. *Chernikov N. A., Tagirov E. A.* // Ann. Inst. Henri Poincare. 1968. Vol. IX. P. 109–141.
5. *Börner G., Dürr H. P.* Classical and quantum theory in de Sitter space // Nuovo Cim. A. 1969. Vol. 64. P. 669–713.
6. *Riordan F.* // Nuovo Cim. B. 1974. Vol. 20. P. 309–325.
7. *Lohiya D., Panchapakesan N. J.* // J. Phys. A. 1979. Vol. 12. P. 533–539.
8. *Otchik V. S.* // Class. Quantum Crav. 1985. Vol. 2. P. 539–543.
9. *Mishima T., Nakayama A.* // Progr. Theor. Phys. 1987. Vol. 77. P. 218–222.
10. *Богуш А. А., Отчик В. С., Редьков В. М.* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1986. № 1. С. 58–62.
11. *Suzuki H., Takasugi E.* // Mod. Phys. Lett. A. 1996. Vol. 11. P. 431.
12. *Red'kov V. M., Ovsiyuk E. M.* // Ricerche di matematica. 2011. Vol. 60, N 1. P. 57–88.
13. *Редьков В. М., Овсиюк Е. М., Крылов Г. Г.* // Вестн. РУДН. Сер.: Математика, информатика, физика. 2012. № 4. С. 153–169.
14. *Редьков В. М.* Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера. Минск, 2011.
15. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л., 1975.

O. V. VEKO, K. V. KAZMERCHUK, E. M. OVSIYUK

vekoolga@mail.ru; kristinash2@mail.ru; e.ovsiyuk@mail.ru

EXACT SOLUTIONS OF THE DIRAC EQUATION IN THE EXPANDING DE SITTER UNIVERSE

Summary

On the basis of the method of separation of variables, the complete set of exact solutions of the Dirac equation in the non-static coordinates of the de Sitter space is constructed. In the separation of variables, the formalism of the Wigner D-functions is used. The square and the third projection of the total angular momentum, as well as the space reflection operators are diagonalized on the solutions. Equations for the radial variable lead to a discrete spectrum of the separation constant. The asymptotic properties of the solutions for radial ant time variables are investigated.