Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 **март–апрель** **Том 58 № 2**

УДК 530.122.2

С. Л. ЧЕРКАС[1], В. Л. КАЛАШНИКОВ[2]

РЕШЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ УИЛЛЕРА–ДЕВИТА В ОКРЕСТНОСТИ МАЛЫХ МАСШТАБНЫХ ФАКТОРОВ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

[1]*НИИ ядерных проблем при БГУ, Минск*
[2]*Институт фотоники Венского технического университета, Австрия*
Поступило 18.11.2013

Уравнение Уиллера–ДеВита [1; 2] является функциональным уравнением, описывающим квантовое пространство-время. Поскольку решение данного уравнения представляет большие трудности, важно исследовать хотя бы асимптотику решений, например, в окрестности малых масштабных факторов. Под масштабным фактором понимается $a(\mathbf{r}) \equiv \gamma^{1/6}(\mathbf{r})$, где $\gamma = \det \gamma_{ij}$. Метрический тензор $\gamma_{ij}(\mathbf{r})$ зависит от координат **r**, заданных на трехмерном многообразии. Уравнение Уиллера–ДеВита для гравитации и нескольких скалярных полей в окрестности малых масштабных факторов $a \sim 0$ имеет вид

$$\left(\frac{12\gamma^{1/6}}{M_p^2} G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta\gamma_{ij}(\mathbf{r})} \frac{\delta}{\delta\gamma_{kl}(\mathbf{r})} + \frac{\gamma^{-1/3}}{2} \frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r})} \frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r})} \right) \Psi[\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}] = 0, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) = \{\phi_1(\mathbf{r}), \phi_2(\mathbf{r}), ..., \phi_N(\mathbf{r})\}$ – набор скалярных полей; M_p – масса Планка и

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2} \gamma^{-1/2} (\gamma_{ik}\gamma_{jl} + \gamma_{il}\gamma_{jk} - \gamma_{ij}\gamma_{kl}).$$

Уравнение (1), решение которого является функционалом $\Psi[\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}]$, записано в калибровке, соответствующей конформному времени [3]. Поскольку уравнение Уиллера–ДеВита содержит функциональные производные, действующие в одной пространственной точке, в общем случае, чтобы избежать появления бесконечных величин, требуется регуляризация. Кроме того, необходимо выбрать способ упорядочения операторов. Наиболее естественным является выбор упорядочения в виде многомерного Лапласиана. Запишем все имеющиеся переменные в виде одного вектора $\boldsymbol{\xi} = \{\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, \phi_1, \ldots, \phi_N\}$, тогда уравнение (1) примет вид

$$G^{AB} \frac{\delta}{\delta\xi^A(\mathbf{r})} \frac{\delta}{\delta\xi^B(\mathbf{r})} \Psi[\boldsymbol{\xi}] = 0, \tag{2}$$

где матрица G^{AB}

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{1111} & \tilde{G}_{1122} & \tilde{G}_{1133} & \tilde{G}_{1112} & \tilde{G}_{1113} & \tilde{G}_{1123} & 0 & 0 \\ \tilde{G}_{2211} & \tilde{G}_{2222} & \tilde{G}_{2233} & \tilde{G}_{2212} & \tilde{G}_{2213} & \tilde{G}_{2223} & 0 & 0 \\ \tilde{G}_{3311} & \tilde{G}_{3322} & \tilde{G}_{3333} & \tilde{G}_{3312} & \tilde{G}_{3313} & \tilde{G}_{3323} & 0 & 0 \\ \tilde{G}_{1211} & \tilde{G}_{1222} & \tilde{G}_{1233} & \tilde{G}_{1212} & \tilde{G}_{1213} & \tilde{G}_{1223} & 0 & 0 \\ \tilde{G}_{1311} & \tilde{G}_{1322} & \tilde{G}_{1333} & \tilde{G}_{1312} & \tilde{G}_{1313} & \tilde{G}_{1323} & 0 & 0 \\ \tilde{G}_{2311} & \tilde{G}_{2322} & \tilde{G}_{2333} & \tilde{G}_{2312} & \tilde{G}_{2313} & \tilde{G}_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^{-1/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^{-1/3} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$\tilde{G}_{ijkl} = \frac{12\gamma^{1/6}}{M_p^2} G_{ijkl}$, и уравнение (3) записано для частного случая двух скалярных полей.

Уравнение (2) также как исходное уравнение (1) содержит функциональные производные, действующие в одной пространственной точке, и требует регуляризации. Одним из способов регуляризации уравнения (2) является дискретизация, которую, например, можно сделать с помощью триангуляции [4]. Для нашего случая достаточно выбрать простейшую дискретизацию, т. е. ввести прямоугольную пространственную сетку с размером ячейки ℓ. Можно отождествлять длину дискретизации с длиной Планка, однако это не является обязательным. Если разбить пространство на ячейки объемом $\Delta x \Delta y \Delta z = \ell^3$ с центрами в точках $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_k$, то функциональную производную нужно заменить на обычную производную по правилу $\frac{\delta}{\delta \xi^A(r)} \to \frac{1}{\ell^3} \frac{\partial}{\partial \xi_k^A}$, где под $\boldsymbol{\xi}_k$ подразумевается значение вектора ξ в точке $\mathbf{r}_k$: $\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_k)$. В результате уравнение (2) будет иметь одинаковый вид во всех пространственных точках $\mathbf{r}_k$, так что его решение представляется в виде произведения решений для каждой пространственной точки

$$\Psi(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k) = \psi(\xi_1)\psi(\xi_2)\dots\psi(\xi_k).$$

Выбор упорядочения операторов в виде Лапласиана приводит к следующему уравнению:

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial \xi^A} \left(\sqrt{G}\, G^{AB} \frac{\partial}{\partial \xi^B} \right) \psi(\boldsymbol{\xi}) = 0, \tag{4}$$

где $G = \det G_{AB} = 1 / \det G^{AB}$. В уравнении (4), и везде далее, зависимость от пространственного индекса k опущена. Следует заметить, что для случая чистой гравитации (в отсутствие скалярных полей) уравнение, совпадающее с (4), может быть записано в виде

$$\gamma\, \hat{\pi}^{ij} \left(\frac{1}{\gamma} \tilde{G}_{ijkl}\, \hat{\pi}^{kl} \right) \psi(\gamma_{mp}) = 0, \tag{5}$$

где

$$\hat{\pi}^{ij} = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \gamma_{ij}}, & i = j, \\[2mm] \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial}{\partial \gamma_{ij}}, & i \neq j. \end{cases}$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде «плоских волн» [5–7]. Введем следующие переменные $\tilde{u} = k^{ij} \gamma_{ji}$, $\tilde{v} = k^{ij} \gamma_{jm} k^{mn} \gamma_{nj}$, $\Phi = p^i \phi_i$, где k^{ij} – некоторая матрица размерности 3 × 3; p^i – вектор размерности N (число скалярных полей). Запишем

$$\psi(\gamma_{lm}, \phi_i) = f(\tilde{u}, \tilde{v}, \gamma) \exp(i\Phi). \tag{6}$$

Подставляя выражение (6) в (4) или, для чистой гравитации – в (5), после довольно громоздких вычислений, которые могут быть выполнены с использованием систем компьютерной алгебры (Mathematica, Maple), приходим к следующему уравнению для функции $f(\tilde{u}, \tilde{v}, \gamma)$:

$$\begin{gathered} \frac{6\gamma^{-1/3}}{M_p^2} \left(-3\gamma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} - \left(5 + \frac{N}{2}\right) \gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma} + 2\left(\tilde{u}^2 + \left(\frac{7}{3} - \frac{N}{6}\right) \tilde{v} \right) \frac{\partial f}{\partial \tilde{v}} + 4(2\tilde{u}^2 \tilde{v} - \tilde{u}^4 + 8k\tilde{u}\gamma) \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{v}^2} + \right. \\ \left. \left(\frac{7}{3} - \frac{N}{6}\right) \tilde{u} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}} + (2\tilde{v} - \tilde{u}^2) \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{u}^2} + 4(2\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{u}^3 + 6k\gamma) \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{u} \partial \tilde{v}} - \tilde{2}\tilde{u}\gamma \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{u} \partial \gamma} - 4\tilde{v}\gamma \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{v} \partial \gamma} \right) - \frac{1}{2} p^2 \gamma^{-1/3} f = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где $p^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2 + \ldots + (p^N)^2$, $k = \det k^{ij}$.

Удобно представить метрический тензор в виде $\gamma_{ij} = a^2 \tilde{\gamma}_{ij}$, так что $\det \tilde{\gamma}_{ij} = 1$. Матрица $\tilde{\gamma}_{ij}$ описывает так называемую конформную геометрию [8]. Тогда уравнение (7) может быть переписано в новых переменных $a = \gamma^{1/6}$, $u = k^{ij} \tilde{\gamma}_{ij} = \tilde{u}\gamma^{-1/3}$, $v = k^{ij} \tilde{\gamma}_{jl} k^{lm} \tilde{\gamma}_{mi} = \tilde{v}\gamma^{-2/3}$:

$$\frac{1}{2M_p^2}\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}-\frac{(5+N)}{a}\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{8}{a^2}\left(5u\frac{\partial f}{\partial u}+(3v-u^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(3u^2+11v)\frac{\partial f}{\partial v}+\right.\right.$$
$$\left.\left.2(24ku+v^2+6u^2v-3u^4)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+2(18k+7vu-3u^3)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)\right)-\frac{1}{2a^2}p^2 f=0.$$

Решение данного уравнения можно искать методом разделения переменных $f(a,u,v)=R(a)g(u,v)$. В частности, если из уравнения

$$5u\frac{\partial g}{\partial u}+(3v-u^2)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+(3u^2+11v)\frac{\partial g}{\partial v}+2(24ku+v^2+6u^2v-3u^4)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}+$$
$$2(18k+7vu-3u^3)\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=-\lambda g \tag{8}$$

найдены некоторые функции $g(u,v)$ и соответствующие им постоянные λ, то уравнение для функции $R(a)$ принимает вид

$$-\frac{\partial^2 R}{\partial a^2}-\frac{(5+N)}{a}\frac{\partial R}{\partial a}-\frac{8\lambda+M_p^2 p^2}{a^2}R=0. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) выражается через функции Бесселя.

Таким образом, главной задачей является решение уравнения (8), описывающее квантование конформной геометрии [8], задаваемой матрицей $\tilde{\gamma}_{ij}$ с детерминантом, равным единице.

Уравнение (8) может быть получено и другим способом.

Рассмотрим гамильтониан

$$H=\frac{1}{2}(\tilde{\gamma}^{ij})'\tilde{\gamma}'_{ij}=\frac{1}{2}\tilde{\gamma}'_{ik}\,\tilde{\gamma}^{kl}\,\tilde{\gamma}'_{lj}\,\tilde{\gamma}^{ji}, \tag{10}$$

где $\det\tilde{\gamma}_{ij}=1$ и штрих означает производную по времени. Гамильтониан (10) соответствует свободному движению «частицы» по пятимерной поверхности $\det\tilde{\gamma}_{ij}=1$ постоянной отрицательной кривизны.

Рассмотрим сначала простой случай, когда матрица $\tilde{\gamma}_{ij}$ имеет размерность 2 × 2 и поверхность $\det\tilde{\gamma}_{ij}=1$ является двумерной. Приняв некоторую параметризацию $\tilde{\gamma}_{ij}(\xi^1(t),\xi^2(t))$, приходим к

$$H=\frac{1}{2}G_{AB}(\tau)\xi^{A'}(t)\xi^{B'}(\tau),$$

где $G_{AB}=Tr\left[\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\frac{\partial\tilde{\mathbf{r}}}{\partial\xi^A}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}{\partial\xi^B}\right]$ и штрих означает дифференцирование по времени τ.

Обобщенные импульсы имеют вид

$$p_A=\frac{\partial H}{\partial\xi^{A'}}=G_{AB}\xi^{B'}.$$

Переписывая Гамильтониан в терминах импульсов, находим

$$H=\frac{1}{2}G^{AB}(\tau)p_A(\tau)p_B(\tau).$$

Квантование приводит к уравнению Шредингера

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial\xi^B}\left(\sqrt{G}\,G^{AB}\frac{\partial}{\partial\xi^A}\Theta\right)=\lambda\,\Theta.$$

В качестве координат $\{\xi^1(\tau),\xi^2(\tau)\}$ удобно принять координаты $\{r(\tau),\varphi(\tau)\}$, представляя матрицу 2 × 2 с детерминантом, равным единице, в виде произведения трех матриц:

$$\tilde{\gamma}_{ij}=\begin{pmatrix}\cos\varphi/2 & -\sin\varphi/2\\ \sin\varphi/2 & \cos\varphi/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\exp r & 0\\ 0 & \exp(-r)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi/2 & \sin\varphi/2\\ -\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi-\varsigma & \sigma\\ \sigma & \xi+\varsigma\end{pmatrix},$$

где $\varsigma=r\cos\varphi,\;\;\sigma=r\sin\varphi,\;\;\xi=r.$

Таким образом, для матриц 2 × 2 поверхность $\det\tilde{\gamma}_{ij}=1$ в координатах r,φ является гиперболоидом $\xi^2-\varsigma^2-\sigma^2=1$. Точнее: координаты r,φ параметризуют одну его полость. Будем искать решение уравнения Шредингера в виде $\Theta(r,\varphi)=g(k^{ij}\tilde{\gamma}_{ij})$, в результате чего приходим к уравнению

$$-\frac{1}{2}u^2g''(u)-ug'(u)=\lambda g(u),$$

где $u=k^{ij}\tilde{\gamma}_{ij}$. Решение уравнения записывается как

$$g(u)=u^{-1/2+i\sqrt{2\lambda-1/4}}. \tag{11}$$

Если представить матрицу k^{ij} в виде

$$k=\begin{pmatrix}\cos\theta/2 & -\sin\theta/2\\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta/2 & \sin\theta/2\\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix},$$

то

$$u=k^{ij}\tilde{\gamma}_{ij}=\xi-n_1\varsigma-n_2\sigma,$$

где $n_1=\cos\theta,\;n_2=\sin\theta$ и, таким образом, (11) в точности соответствует плоской волне [5–7] на гиперболоиде в 2 + 1 пространстве Минковского.

Для случая 3 × 3 будем искать решение в виде $\Theta(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4,\xi^5)=g(u,v)$, где $u=k^{ij}\tilde{\gamma}_{ij}$, $v=k^{ij}\tilde{\gamma}_{jl}k^{lm}\tilde{\gamma}_{mi}$, k^{ij} – некоторый тензор. После громоздких вычислений мы снова приходим к уравнению (8). Поскольку имеется пять независимых координат, волновая функция Θ должна зависеть от собственного значения λ и еще четырех параметров, так что на тензор k^{ij} по крайней мере можно наложить два дополнительных условия. Заметим, что, когда $k=\det k^{ij}=0$, уравнение (8) становится однородным относительно v и u^2. Решение уравнения (8) при $k=0$ можно искать в виде

$$g(u,v)=(u^2-v)^{i\alpha/2-3/4}s(u^2/v). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (8), получаем уравнение для функции $s(z)$

$$3(z-1)\big(2(z-2)(z-1)zs''(z)+(z(4z-7)+2)s'(z)\big)-\left(\lambda-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{9}{8}\right)s(z)=0,$$

общее решение которого выражается через гипергеометрическую функцию

$$\begin{aligned}s(z)=\frac{c_1}{\sqrt{2-\frac{2}{z}}}\,{}_2F_1\!\left(\frac{1}{12}\left(9-2\sqrt{3}\,i\sqrt{2\lambda-3-\alpha^2}\right),\frac{1}{12}\left(2\sqrt{3}\,i\sqrt{2\lambda-3-\alpha^2}+9\right);\frac{3}{2};\frac{z}{2(z-1)}\right)+\\ c_2\,{}_2F_1\!\left(\frac{1}{12}\left(3-2\sqrt{3}\,i\sqrt{2\lambda-3-\alpha^2}\right),\frac{1}{12}\left(2\sqrt{3}\,i\sqrt{2\lambda-3-\alpha^2}+3\right);\frac{1}{2};\frac{z}{2(z-1)}\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, волновая функция Θ зависит от параметров α, λ и еще трех параметров, содержащихся в тензоре k^{ij}, на который кроме условия $k=0$ должны быть наложены еще два условия.

Мы не обсуждаем вопрос о нормировке волновой функции. Для квантования на гиперболоиде подробное рассмотрение содержится в [9]. Здесь же заметим, что для того чтобы волновая функция была нормируемой, необходимо, чтобы подкоренное выражение $2\lambda-3-\alpha^2$ в уравнении (13) было положительным. Минимально возможное собственное значение $\lambda=3/2$ достигается при $\alpha=0$.

В данной работе мы решили методом разделения переменных дискретное уравнение Уиллера–ДеВита в окрестности малых масштабных факторов. Показано, что константа разделения переменных λ не может быть сколь угодно малой. Минимально возможное значение λ возникает из-за квантования на поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Это означает, что в ранней Вселенной из-за флуктуаций конформной геометрии существовала плотность энергии $\rho = \frac{8}{M_p^2 \ell^6 a^6}\lambda \approx \frac{12 M_p^4}{a^6}$, если считать длину дискретизации ℓ порядка обратной массы Планка.

Подчеркнем, что речь идет о времени, когда поля еще не начали осциллировать и общеизвестная вакуумная энергия, соответствующая нулевым колебаниям полевых осцилляторов, еще не возникла.

Авторы выражают благодарность В. М. Редькову за обсуждение.

Литература

1. *Wheeler J. A.* // Battelle Rencontres / eds. C. DeWitt, J. A. Wheeler. New York, 1968.
2. *DeWitt B. S.* // Phys. Rev. 1967. Vol. 160. P. 1113.
3. *Cherkas S. L., Kalashnikov V. L.* // Gen. Rel. Grav. 2012. Vol. 44. P. 3081.
4. *Humber H. W.* // Gen. Rel. Grav. 2009. Vol. 41. P. 817.
5. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М., 1962.
6. *Шапиро И. С.* // ДАН СССР. 1956. Т. 106. С. 647.
7. *Ovsiyuk E. M., Tokarevskaya N. G., Red'kov V. M.* // Nonlin. Phenomena Complex Syst. 2009. Vol. 12. P. 1.
8. *York J. W. Jr.* // Phys. Rev. Lett. 1971. Vol. 26. P. 1656.
9. *Отчик В. С., Редьков В. М.* Квантовомеханическая задача Кеплера в пространствах постоянной кривизны. Препринт № 298 Института физики АН БССР. Минск, 1983.

S. L. CHERKAS, V. L. KALASHNIKOV

cherkas@inp.bsu.by

SOLUTION OF THE DISCRETE WHEELER–DEWITT EQUATION IN THE VICINITY OF SMALL SCALE FACTORS AND QUANTUM MECHANICS IN THE SPACE OF NEGATIVE CONSTANT CURVATURE

Summary

The asymptotic of the solution of the discrete Wheeler-DeWitt equation is found in the vicinity of small scale factors. It is shown that this problem is equivalent to the solution of the stationary Schrödinger equation in the (super-) space of negative constant curvature. The minimum positive eigenvalue, with which a continuous spectrum begins, is found.