Доклады Национальной академии наук Беларуси
2014 май–июнь Том 58 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.988

А. Н. ТАНЫГИНА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ОПЕРАТОРАМИ, ДОПУСКАЮЩИМИ ВЫДЕЛЕНИЕ РЕГУЛЯРНО ГЛАДКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Белорусский государственный университет, Минск *Поступило 26.03.2014*

1. Пусть X и Y – банаховы пространства, f и g – определенные на замкнутом шаре $\overline{B(x_0, R)} \subset X$ и принимающие значения из Y нелинейные операторы, причем f дифференцируем в каждой внутренней точке шара $\overline{B(x_0, R)}$, а g – недифференцируемый оператор. В работе [1] при помощи мажорантных скалярных уравнений были исследованы существование и единственность решения операторного уравнения вида

$$f(x) + g(x) = 0, \tag{1}$$

где оператор f предполагался удовлетворяющим условию регулярной гладкости, предложенному в работах А. Гальперина и З. Ваксмана [2; 3], а оператор g – модифицированному условию Липшица

$$\|g(x'') - g(x')\| \le \psi(t)\|x'' - x'\|, \qquad \forall x',\ x'' \in \overline{B(x_0, t)}, \tag{2}$$

где ψ – неубывающая функция, $0 \le t \le R$. Там же была доказана сходимость к точному решению уравнения (1) последовательных приближений, определенных по обобщенному методу Ньютона–Канторовича

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{3}$$

а также получены оценки скорости сходимости указанного метода. Метод (3) является обобщением классического метода Ньютона–Канторовича и в случае $g = 0$ совпадает с ним.

При применении метода (3) последовательные приближения x_n находятся с некоторыми погрешностями, вызванными ошибками округления. Другими словами, фактически последовательные приближения находятся по формуле

$$x_{n+1} = \overline{x}_{n+1} + d_{n+1}, \tag{4}$$

где

$$\overline{x}_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \quad \overline{x}_0 = x_0,$$

а d_n $(n = 1, 2, \ldots)$ – случайные векторы (ошибки).

Приближения (4) могут не сходиться к решению уравнения (1). В связи этим возникает вопрос, при каких условиях не накапливаются систематические ошибки, т. е. при каких условиях последовательные приближения (4) достаточно близко подходят к точному решению x_* исходного операторного уравнения (1). Случай, когда производная оператора f и оператор g удовлетворяют на $\overline{B(x_0,R)}$ классическому условию Липшица с некоторыми постоянными, был рассмотрен в [4; 5]. Здесь мы рассмотрим более общий случай, когда оператор f удовлетворяет модифицированному условию Гальперина–Ваксмана, а оператор g – условию (2).

2. Пусть $\omega:[0,\infty)\to[0,\infty)$ – непрерывная строго возрастающая вогнутая функция, причем $\omega(0)=0$. Без ограничения общности будем считать, что $f'(x_0)=I$. Обозначим

$$h(f)=\inf\left\{\|f'(x)\|:\ x\in\overline{B(x_0,R)}\right\}.$$

Согласно [3], оператор f называется ω-*регулярно гладким* на $\overline{B(x_0,R)}$ (или ω является *модулем регулярной гладкости для* оператора f на $\overline{B(x_0,R)}$), если существует число $h\in[0,h(f)]$ такое, что для любых $x',\ x''\in\overline{B(x_0,R)}$ имеет место неравенство

$$\omega^{-1}(h_f(x',x'')+\|f'(x'')-f'(x')\|)-\omega^{-1}(h_f(x',x''))\le\|x''-x'\|, \tag{5}$$

где

$$h_f(x',x'')=\min\left\{\|f'(x')\|,\|f'(x'')\|\right\}-h.$$

Оператор f называется *регулярно гладким* на $\overline{B(x_0,R)}$, если он является ω-регулярно гладким на $\overline{B(x_0,R)}$ для некоторого ω с указанными выше свойствами.

В работе [6] было показано, что условие (5) может быть заменено на более простое условие

$$\|f'(x'')-f'(x')\|\le\omega((\chi-r-\|x''-x'\|)^{+}+\|x''-x'\|)-\omega((\chi-r-\|x''-x'\|)^{+}), \tag{6}$$

где $r=\|x'-x_0\|$, $\lambda^{+}=\max\{\lambda,0\}$, в записи которого приращение производной оператора f мажорируется приращением скалярной функции. Данное условие является более наглядным, чем условие (5). Более того, в работе [3] используется именно это условие при доказательстве некоторых вспомогательных утверждений и основной теоремы о сходимости классического метода Ньютона–Канторовича.

Условие (6) совпадает в случае $(\chi-r-\|x''-x'\|)^{+}=0$ с условием Гельдера, рассмотренным в [7]. При увеличении χ величина $(\chi-r-\|x''-x'\|)^{+}$ увеличивается и, следовательно, правая часть неравенства (6) уменьшается. Поэтому чем больше χ, тем лучше оценка для $\|f'(x'')-f'(x')\|$, что дает возможность получить более точные оценки и для последовательных приближений.

Пусть $\Omega(t)=\int\limits_0^t\omega(\tau)d\tau,\ \Psi(t)=\int\limits_0^t\psi(\tau)d\tau,\ a=\|f(x_0)+g(x_0)\|,\ \chi\in[0,\omega^{-1}(1)]$ – некоторая постоянная. Обозначим через W функцию числового аргумента t:

$$W(t)=a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-t)-t(1-\omega(\chi))+\Psi(t), \tag{7}$$

и определим числовую последовательность $\{t_n\}$ следующим рекуррентным соотношением:

$$t_{n+1}=t_n+\frac{W(t_n)}{1-[\omega(\chi)-\omega(\chi-t_n)]}, \tag{8}$$

$n=0,1,\ldots;\ t_0=0$.

Т е о р е м а 1. *Пусть существует постоянная* $\chi\in[0,\omega^{-1}(1)]$ *такая, что выполнено неравенство*

$$a\le\Omega(\chi)-\chi\omega(\chi)+\chi-\Psi(\chi),$$

оператор f удовлетворяет на $\overline{B(x_0,R)}$ условию (6) с таким χ, оператор g удовлетворяет условию (2) и функция (7) имеет единственный нуль $t_*\le R$ на отрезке $[0,\chi]$. Тогда

1) уравнение (1) имеет единственное решение x_* в шаре $\overline{B(x_0,t_*)}$;

2) последовательные приближения (3) определены для всех $n=0,1,\ldots$, принадлежат шару $\overline{B(x_0,t_*)}$ и сходятся к x_*;

3) при всех $n=0,1,\ldots$ для последовательных приближений (3) справедливы оценки

$$\|x_{n+1}-x_n\|\le t_{n+1}-t_n,$$

$$\|x_* - x_n\| \le t_* - t_n,$$

где последовательность $\{t_n\}$ определена по правилу (8), монотонно возрастает и сходится к t_*.

Доказательство теоремы 1 полностью повторяет доказательство аналогичной теоремы из [1], проведенное для случая, когда оператор f удовлетворяет условию (5).

3. Перейдем к установлению условий устойчивости последовательных приближений (4).

Т е о р е м а 2. *Пусть последовательные приближения x_n $(n = 0, 1, \ldots)$ определяются формулой (4), выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того,*

1) для любого $x \in \overline{B(x_0, R)}$ существует оператор $\Gamma(x) = [f'(x)]^{-1}$, причем

$$\|\Gamma(x)\| \le B \qquad (x \in \overline{B(x_0, R)}); \tag{9}$$

2) $\|x_* - x_n\| \le \rho_n$ для любого $n = 0, 1, \ldots$, причем $\overline{B(x_*, \rho_n)} \subset \overline{B(x_0, R)}$;

3) $\|d_n\| \le \delta$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

4) $\alpha_n = B\left(\frac{1}{2}\omega'((\chi - t_* - 2\rho_n)^+)\rho_n + \psi(\rho_n + t_*)\right) \le q < 1 \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Тогда последовательные приближения (4) достаточно близко подходят к решению x_* уравнения (1) и имеет место соотношение

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x_*\| \le \frac{\delta}{1-q}. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и x_* – точное решение уравнения (1). Рассмотрим цепочку равенств

$$\overline{x}_{n+1} - x_* = x_n - x_* - [f'(x_n)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)) + [f'(x_n)]^{-1}(f(x_*) + g(x_*)) =$$
$$[f'(x_n)]^{-1}(f'(x_n)(x_n - x_*) - f(x_n) + f(x_*)) + [f'(x_n)]^{-1}(g(x_*) - g(x_n)).$$

С учетом неравенства (9)

$$\|\overline{x}_{n+1} - x_*\| \le B\|f(x_*) - f(x_n) - f'(x_n)(x_* - x_n)\| + B\|g(x_*) - g(x_n)\|.$$

Обозначим для любого $n = 0, 1, \ldots$

$$r(x_n, x_*) = \|f(x_*) - f(x_n) - f'(x_n)(x_* - x_n)\|$$

и найдем оценку для $r(x_n, x_*)$.

Пусть $x_t = x_n + t(x_* - x_n)$, $0 \le t \le 1$. Тогда

$$r(x_n, x_*) \le \int_0^1 \|f'(x_t) - f'(x_n)\| \|x_* - x_n\| dt.$$

В силу условия (6) и вогнутости функции ω имеем

$$\|f'(x_t) - f'(x_n)\| \le \omega((\chi - \|x_n - x_0\| - \|x_t - x_n\|)^+ + \|x_t - x_n\|) - \omega((\chi - \|x_n - x_0\| - \|x_t - x_n\|)^+) \le$$
$$\omega'((\chi - \|x_n - x_0\| - \|x_t - x_n\|)^+)\|x_t - x_n\| = t\omega'((\chi - \|x_n - x_0\| - \|x_t - x_n\|)^+)\|x_* - x_n\|.$$

Согласно утверждению 3) теоремы 1 имеет место неравенство $\|x_* - x_0\| \le t_*$, откуда

$$\|x_n - x_0\| \le \|x_n - x_*\| + \|x_* - x_0\| \le \|x_n - x_*\| + t_*$$

и, с учетом условия 2),

$$\chi - \|x_n - x_0\| - \|x_t - x_n\| = \chi - \|x_n - x_0\| - t\|x_* - x_n\| \ge$$
$$\chi - \|x_n - x_0\| - \|x_* - x_n\| \ge \chi - t_* - 2\|x_* - x_n\| \ge \chi - t_* - 2\rho_n.$$

Следовательно,

$$(\chi - \|x_n - x_0\| - \|x_t - x_n\|)^+ \ge (\chi - t_* - 2\rho_n)^+,$$

а поскольку производная функции ω убывает на $[0, \infty)$, то

$$\|f'(x_t)-f'(x_n)\|\le t\omega'((\chi-t_*-2\rho_n)^+)\|x_*-x_n\|.$$

Отсюда получим, что

$$r(x_n,x_*)\le \omega'((\chi-t_*-2\rho_n)^+)\|x_*-x_n\|^2\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}\omega'((\chi-t_*-2\rho_n)^+)\|x_*-x_n\|^2.$$

Поскольку $x_*\in\overline{B(x_0,t_*)}$ и $\|x_n-x_0\|\le\|x_n-x_*\|+t_*$, то в силу условия (2)

$$\|g(x_*)-g(x_n)\|\le\psi(\|x_n-x_*\|+t_*)\|x_*-x_n\|\le\psi(\rho_n+t_*)\|x_*-x_n\|.$$

Отсюда получим, что

$$\|\overline{x}_{n+1}-x_*\|\le\frac{1}{2}B\omega'((\chi-t_*-2\rho_n)^+)\|x_*-x_n\|^2+B\psi(\rho_n+t_*)\|x_*-x_n\|\le$$

$$B\left(\frac{1}{2}\omega'((\chi-t_*-2\rho_n)^+)\rho_n+\psi(\rho_n+t_*)\right)\|x_*-x_n\|=\alpha_n\|x_*-x_n\|,$$

и, с учетом условия 3),

$$\|x_{n+1}-x_*\|=\|\overline{x}_{n+1}+d_{n+1}-x_*\|\le\|\overline{x}_{n+1}-x_*\|+\|d_{n+1}\|\le\alpha_n\|x_*-x_n\|+\delta.$$

Поскольку в силу условия 4) имеют место неравенства $\alpha_n\le q<1$, то

$$\|x_{n+1}-x_*\|\le q\|x_*-x_n\|+\delta\le q^2\|x_*-x_{n-1}\|+q\delta+\delta\le\ldots\le$$

$$q^{n+1}\|x_*-x_0\|+q^n\delta+q^{n-1}\delta+\ldots+q\delta+\delta=q^{n+1}\|x_*-x_0\|+\frac{\delta(1-q^{n+1})}{1-q},$$

откуда следует соотношение (10), означающее, что последовательные приближения x_n, определенные по формуле (4), достаточно близко подходят к решению x_* уравнения (1). Теорема 2 доказана.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13М-036).

Литература

1. *Таныгина А. Н.* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 6. С. 17–22.
2. *Galperin A., Waksman Z.* // J. Comp. Appl. Math. 1991. Vol. 35. P. 207–215.
3. *Galperin A., Waksman Z.* // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1994. Vol. 15, N 7–8. P. 813–858.
4. *Зинченко А. И.* // Тр. семинара по функц. анализу. Воронеж, 1963. Вып. 7. С. 42–44.
5. *Зинченко А. И.* // Докл. АН УССР. 1963. № 7. С. 852–855.
6. *Забрейко П. П., Таныгина А. Н.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 8–12.
7. *Лысенко Ю. В.* Новые условия сходимости метода Ньютона–Канторовича и некоторые их приложения: дис. … канд. физ.-мат. наук. Минск, 1993.

A. N. TANYHINA

anast-minsk@yandex.ru

ON THE STABILITY OF THE NEWTON–KANTOROVICH METHOD FOR APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS WITH NON-DIFFERENTIABLE OPERATORS ALLOWING THE SEPARATION OF A REGULAR SMOOTH COMPONENT

Summary

For nonlinear operator equations with non-differentiable operators allowing the separation of a regular smooth component the stability conditions for the generalized Newton–Kantorovich method are established. In essence, these conditions mean that successive approximations in the method do not accumulate systematic errors.