Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 май–июнь Том 58 № 3

УДК 517.958

Член-корреспондент В. И. КОРЗЮК, И. И. СТОЛЯРЧУК

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОЛУПОЛОСЕ

Институт математики НАН Беларуси, Минск *Поступило 22.01.2014*

Уравнение Клейна–Гордона–Фока представляет собой гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка и описывает динамику релятивистской квантовой системы. Релятивистское волновое уравнение было получено в 1926 г. Оскаром Клейном и Вальтером Гордоном для описания движения элементарных частиц с целым спином с околосветовой скоростью, а в 1927 г. Владимир Фок обобщил его на случай магнитного поля, когда силы поля зависят от скорости частиц [1].

Для рассматриваемой в данной работе смешанной задачи справедливы теоремы существования и единственности сильных и других обобщенных решений из теории граничных задач для гиперболических уравнений [2]. Однако для неё также важным является и численное решение, которое строится на основе классического решения и точной постановки задачи методом разностных отношений и конечных элементов.

В криволинейной области здесь для первой смешанной задачи уравнения Клейна–Гордона–Фока предложен метод построения классического решения, выписаны условия согласования, при которых только данное решение существует.

Отметим, что первая смешанная задача в случае прямолинейной полуполосы изучалась во многих работах (см., напр., [3; 4]).

Постановка задачи. Задача рассматривается на плоскости $\mathbb{R}^2$ двух независимых переменных t и x относительно выбранной декартовой системы координат. В криволинейной полуполосе $Q \subset \mathbb{R}^2$, изображенной на рис. 1, рассмотрим уравнение Клейна–Гордона–Фока в одномерном случае вида

$$\partial_{tt}u - a^2\partial_{xx}u - \lambda(t,x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{1}$$

где λ, f – заданные функции $\lambda, f : (t,x) \in \overline{Q} \longrightarrow \lambda(t,x), f(t,x) \in \mathbb{R}$; $\overline{Q}$ – замыкание области Q; a^2 – положительное действительное число; ∂_{tt}, ∂_{xx} – частные производные и $\partial_{tt} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\partial_{xx} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Здесь область Q ограничена нижним основанием – линией $AB : t = s(x), x^{(0)} \le x \le x^{(-1)}$, боковыми линиями $x = \gamma^{(j)}(t)$, $j = 0,-1$, где $\gamma^{(0)}(t) < \gamma^{(-1)}(t)$ для всех $t \in [t^*, \infty)$. Здесь $t^* = \max(t^{(0)} = s(x^{(0)}), t^{(-1)} = s(x^{(-1)}))$.

У с л о в и е 1. *Линия $t = s(x)$ определена для всех $x \in [x^{(0)}, x^{(-1)}]$, $x^{(0)} < x^{(-1)}$, и функция $s : x \in [x^{(0)}, x^{(-1)}] \to s(x) \in \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, т. е. $s \in C^1[x^{(0)}, x^{(-1)}]$, производная $s'(x)$ удовлетворяет условию $|s'(x)| < \dfrac{1}{a}$ для всех $x \in [x^{(0)}, x^{(-1)}]$. Аналогично $\gamma^{(j)} \in C^1[t^j, \infty)$, $j = 0,-1$; $|\gamma'^{(j)}(t)| < a$ для всех $t \in [t^{(j)}, \infty)$. Обозначим через $\tilde{\gamma}^{(j)}$ продолжения функций $\gamma^{(j)}$ на все множество $\mathbb{R}$ таким образом, что $\tilde{\gamma}^{(j)} \in C^1(\mathbb{R})$ и $\tilde{\gamma}^{(0)}(t) < \tilde{\gamma}^{(-1)}(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Аналогично, $\tilde{s}$ – продолжение на $\mathbb{R}$ функции s, где $\tilde{s} \in C^1(\mathbb{R})$.*

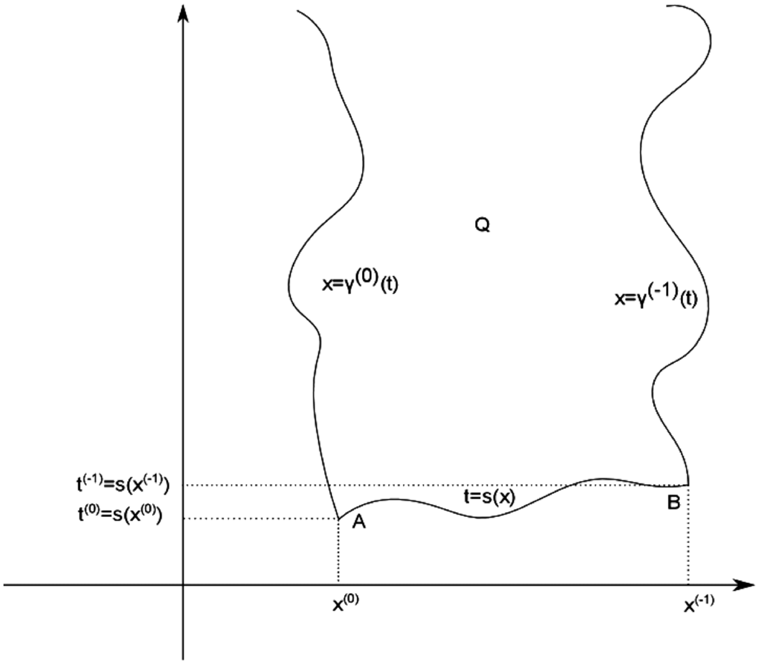

Рис. 1. Область Q

Таким образом, $Q=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid t\in\mathbb{R}, x\in(\tilde{\gamma}^{(0)}(t),\tilde{\gamma}^{(-1)}(t))\}\bigcap\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}, t>\tilde{s}(x)\}$, $\bar{Q}=\{(t,x)\in\ \mathbb{R}^2 \mid t\in\mathbb{R}, x\in[\tilde{\gamma}^{(0)}(t),\tilde{\gamma}^{(-1)}(t)]\}\bigcap\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}, t\geq\tilde{s}(x)\}$. Как уже было сказано, область Q изображена на рис. 1.

К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u(s(x),x)=\varphi(x),\ \partial_t u(s(x),x)=\psi(x),\ \ x\in[x^{(0)},x^{(-1)}], \tag{2}$$

и граничные условия

$$u(t,\gamma^{(0)}(t))=\mu^{(1)}(t),\quad t\in[s(x^{(0)}),\infty), \tag{3}$$

$$u(t,\gamma^{(-1)}(t))=\mu^{(2)}(t),\quad t\in[s(x^{(-1)}),\infty). \tag{4}$$

Задачу (1)–(4) будем изучать, когда уравнение (1) представлено в дивергентном виде. Для этого делаем замену независимых переменных

$$\xi=x-at,\quad \eta=x+at;\quad t=\frac{\eta-\xi}{2a},\quad x=\frac{\eta+\xi}{2}. \tag{5}$$

В результате замены (5) уравнение (1) запишется в виде

$$\partial_{\xi\eta}v-b(\xi,\eta)v=F(\xi,\eta), \tag{6}$$

где $v(\xi,\eta)=v(x-at,x+at)=u(t,x)$, $b(\xi,\eta)=-4a^2\lambda(t,x)=-4a^2\lambda\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)$, $F(\xi,\eta)=f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)$.

Наряду с уравнением (6) будем сначала рассматривать однородное уравнение

$$\partial_{\xi\eta}v-b(\xi,\eta)v=0. \tag{7}$$

В результате замены (5) независимых переменных область Q в новой декартовой системе координат переменных ξ,η перейдет в область Ω, которая представлена на рис. 2, где $\xi^{(0)}<\xi^{(-1)}$, $\xi^{(j)}=x^{(j)}-as(x^{(j)})$, $j=0,-1$.

В результате замены независимых переменных согласно формулам (5) линия AB перейдет в линию $\tilde{A}\tilde{B}$ в системе координат ξ,η. Подставляя в выражение $t=s(x)$ замену (5), получим урав-

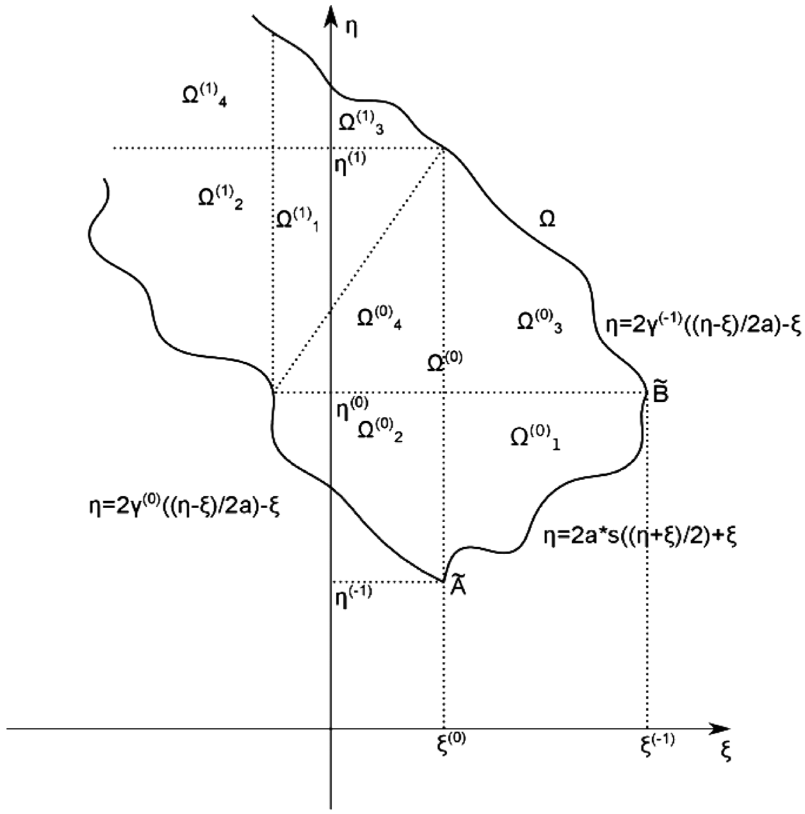

Рис. 2. Область Ω

нение $\dfrac{\eta-\xi}{2a}=s\left(\dfrac{\xi+\eta}{2}\right)$ или, согласно условию 1, $\eta=\tilde{s}(\xi)$, где $\xi\in[\xi^{(0)},\xi^{(-1)}]$, $\xi^{(j)}$ определяются из уравнений $\dfrac{\eta^{(j)}-\xi^{(j)}}{2a}=s\left(\dfrac{\xi^{(j)}+\eta^{(j)}}{2}\right)$, $\dfrac{\eta^{(j)}+\xi^{(j)}}{2}=\gamma^{(j)}\left(\dfrac{\eta^{(j)}-\xi^{(j)}}{2a}\right)$, $j=0,-1$. Отсюда определяются и значения $\eta^{(j)}$. Таким образом, точки $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в системе ξ,η определяются координатами $(\xi^{(0)},\eta^{(-1)})$ и $(\xi^{(-1)},\eta^{(0)})$ соответственно.

Аналогично, согласно условию 1, кривые $x=\gamma^{(j)}(t)$ области Q перейдут в боковые криволинейные границы в системе ξ,η области Ω, которые можно записать уравнениями $\xi=\tilde{\gamma}^{(j)}(\eta)$, где $\eta\in[\eta^{(j)},\infty)$, $j=0,-1$.

Условия (2)–(4) через новые переменные ξ и η записываются в виде

$$v(\xi,\tilde{s}(\xi))=\tilde{\varphi}(\xi),\quad \partial_\eta v(\xi,\tilde{s}(\xi))-\partial_\xi v(\xi,\tilde{s}(\xi))=\tilde{\psi}(\xi)=\frac{1}{a}\psi\left(\frac{\xi+\tilde{s}(\xi)}{2}\right),\ \xi\in[\xi^{(0)},\xi^{(-1)}], \tag{8}$$

$$v(\tilde{\gamma}^{(0)}(\eta),\eta)=\tilde{\mu}^{(1)}(\eta),\quad v(\tilde{\gamma}^{(-1)}(\eta),\eta)=\tilde{\mu}^{(2)}(\eta),\quad \eta\in[\eta^{(j)},\infty),\ j=0,-1. \tag{9}$$

1. Задача (7)–(9). Область Ω разделим прямыми

$$\eta=\frac{\eta^{(k-1)}-\eta^{(k)}}{\xi^{(k)}-\xi^{(k-1)}}(\xi-\xi^{(k)})-\eta^{(k-1)},\ k=0,1,2,..., \tag{10}$$

где координаты $\xi^{(k)}$ и $\eta^{(k)}$ точки $(\xi^{(k)},\eta^{(k)})$ являются решениями уравнений

$$\eta^{(k-1)}=2\gamma^{(0)}\left(\frac{\eta^{(k-1)}-\xi^{(k)}}{2a}\right)-\xi^{(k)},\ \eta^{(k)}=2\gamma^{(-1)}\left(\frac{\eta^{(k)}-\xi^{(k-1)}}{2a}\right)-\xi^{(k-1)} \tag{11}$$

соответственно. Прямые (10) разбивают область Ω на непересекающиеся подобласти $\Omega^{(k)}$, изображенные на рис. 2.

В подобластях $\Omega_j^{(k)}(j=\overline{1,4})$ решения $v_j^{(k)}(\xi,\eta)$ уравнения (7) путем интегрирования представим в виде интегрального уравнения второго рода с оператором Вольтерра, где нижние пределы интегрирования являются корнями уравнений (11):

$$v_j^{(k)}(\xi,\eta)=\int_{\xi^{(k)}}^{\xi}\int_{\eta^{(k)}}^{\eta}b(y,z)v_j^{(k)}dzdy+p_j^{(k)}(\xi)+g_j^{(k)}(\eta), \tag{12}$$

где $p_j^{(k)}, g_j^{(k)}$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Предположим, что эти функции таковы, что

$$p_j^{(k)}(\xi)=p_{j+2}^{(k)}(\xi), \quad g_j^{(k)}(\eta)=g_{j+1}^{(k)}(\eta),\ j=1,3,\ k=0,1,2,...,$$

и для них выполняются условия согласования

$$\begin{aligned}&\frac{d^i}{d\xi^i}p_j^{(k)}(\xi^{(k)})=\frac{d^i}{d\xi^i}p_{j+1}^{(k)}(\xi^{(k)}),\ j=1,3,\ i=\overline{0,2},\\ &\frac{d^i}{d\eta^i}g_j^{(k)}(\eta^{(k)})=\frac{d^i}{d\eta^i}g_{j+2}^{(k)}(\eta^{(k)}),\ j=1,2,\ i=\overline{0,2}.\end{aligned} \tag{13}$$

Функции $p_j^{(k)}$ для $j=2,4$ определены на отрезке $\xi\in[\xi^{(k)},\ \xi^{(k-1)}]$. Введем обозначения

$$p^{(k)}(\xi)=\begin{cases}p_1^{(k)}(\xi), & \xi\in[\xi^{(k)},\xi^{(k-1)}],\\ p_2^{(k)}(\xi), & \xi\in[\xi^{(k+1)},\xi^{(k)}],\end{cases}$$

аналогично

$$g^{(k)}(\eta)=\begin{cases}g_1^{(k)}(\eta), & \eta\in[\eta^{(k-1)},\eta^{(k)}],\\ g_3^{(k)}(\eta), & \eta\in[\eta^{(k)},\eta^{(k+1)}].\end{cases}$$

Л е м м а 1. *Если функции* $p_j^{(k)}(j=1,2)$, $g_j^{(k)}(j=1,3)$ *дважды непрерывно дифференцируемы на соответствующих отрезках своего определения, т. е.* $p_1^{(k)}\in C^2[\xi^{(k)},\xi^{(k-1)}]$, $p_2^{(k)}\in C^2[\xi^{(k+1)},\xi^{(k)}]$, $g_1^{(k)}\in C^2[\eta^{(k-1)},\eta^{(k+1)}]$, $g_3^{(k)}\in C^2[\eta^{(k)},\eta^{(k+1)}]$ *и выполняются условия согласования, заданные формулами (13), то функции* $p^{(k)}\in C^2[\xi^{(k+1)},\xi^{(k-1)}]$, $g^{(k)}\in C^2[\eta^{(k-1)},\eta^{(k+1)}]$.

Доказательство следует из условий леммы 1 и условий согласования (13).

Л е м м а 2. *Если выполняются условия леммы 1 и равенства (13), то решения* $v_j^{(k)}$ *уравнения (7) в каждой области* $\Omega_j^{(k)}$ *можно представить в виде интегрального уравнения*

$$v_j^{(k)}=\int\limits_{\xi_k}^{\xi}\int\limits_{\eta_k}^{\eta}b(y,z)v_j^{(k)}(y,z)dzdy+p^{(k)}(\xi)+g^{(k)}(\eta),\quad k=0,1,...,\quad j=\overline{1,4}. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы 2 следует из леммы 1, равенств (13) и интегрального уравнения (12).

Пусть $\overline{\Omega}$ – замыкание области Ω, аналогично $\overline{\Omega_j^{(k)}}$ – замыкания соответствующих областей $\Omega_j^{(k)}$. Обозначим через $v^{(k)}$ функцию $v^{(k)}:\mathbb{R}\supset\bigcup\limits_{j=1}^{4}\Omega_j^{(k)}\ni(\xi,\eta)\to v^{(k)}(\xi,\eta)\in\mathbb{R}$, где ее значения определяются равенствами $v^{(k)}(\xi,\eta)=v_j^{(k)}(\xi,\eta)$, если $(\xi,\eta)\in\Omega_j^{(k)}$, $j=\overline{1,4}$.

Функции $v_j^{(k)}$ соприкасаются друг с другом в точках $(\xi^{(k)},\eta),(\xi,\eta^{(k)})\in\overline{\Omega^{(k)}}$. Чтобы $v^{(k)}$ были дважды непрерывно дифференцируемы, требуем выполнения условий, при которых будут справедливы равенства:

$$\partial_\xi^i v_j^{(k)}(\xi^{(k)},\eta)=\partial_\xi^i v_{j+1}^{(k)}(\xi^{(k)},\eta),\ j=1,3,\quad (\xi^{(k)},\eta)\in\overline{\Omega_j^{(k)}}, \tag{15}$$

$$\partial_\eta^i v_j^{(k)}(\xi,\eta^{(k)}) = \partial_\xi^i v_{j+2}^{(k)}(\xi,\eta^{(k)}),\ j=1,2,\quad (\xi,\eta^{(k)}) \in \overline{\Omega_j^{(k)}}, \tag{16}$$

где $i=\overline{0,2}$ и $\partial_\xi^0 = v_j^{(k)}$, $\partial_\xi^1 = \partial_\xi v_j^{(k)}$, $\partial_\xi^2 = \partial_{\xi\xi} v_j^{(k)}$, ∂_η^i – аналогичное обозначение.

Отсюда следует утверждение.

У т в е р ж д е н и е. *Если функции* $v_j^{(k)} \in C^2(\overline{\Omega_j^{(k)}})$ *и удовлетворяют условиям согласования (15), (16), то* $v^{(k)} \in C^2(\Omega^{(k)})$.

Здесь под $v^{(k)}$ подразумевается непрерывное продолжение на все множество $\overline{\Omega^{(k)}}$ определенной выше функции, обозначенной этим же символом $v^{(k)}$.

Так как уравнение (7) сведено фактически к исследованию интегральных уравнений (12) при выполнении условий согласования (13), то справедливо утверждение для всей подобласти $\Omega^{(k)}$, которое сформулируем в виде леммы 3.

Л е м м а 3. *Если функция* $b:(\xi,\eta)\in\overline{\Omega}\subset\mathbb{R}^2 \to b(\xi,\eta)\in\mathbb{R}$ *уравнения (7) принадлежит классу* $C^1(\overline{\Omega})$ *и выполняются условия лемм 1 и 2, то существует единственное решение уравнения (7) из класса* $C^2(\overline{\Omega^{(k)}})$, *которое определяется решениями интегральных уравнений (14) для* $j=\overline{1,4}$.

Доказательство проводится непосредственной подстановкой решений в соседних подобластях и сравнении функций и их производных.

2. Задача (7)–(9) в области $\overline{\Omega^{(k)}}$. В каждой из областей $\overline{\Omega_j^{(k)}}$, $j=\overline{1,4}$, найдем представление решения уравнения (14) и выпишем соответствующие условия согласования (13) для решений.

В области $\overline{\Omega_1^{(k)}}$ решение запишется следующим образом:

$$v_1^{(k)}(\xi,\eta) = \int\limits_{\eta^{(k)}}^{\eta} \int\limits_{(z-ab_k)\left(\frac{\xi^{(k)}-\xi^{(k-1)}}{\eta^{(k-1)}-\eta^{(k)}}\right)-ab_k}^{\xi} \overline{v_1^{(k)}}(y,z)dydz - \int\limits_{\eta^{(k)}}^{\eta} \int\limits_{(\xi+ab_k)\left(\frac{\eta^{(k-1)}-\eta^{(k)}}{\xi^{(k)}-\xi^{(k-1)}}\right)+ab_k}^{\xi} \overline{v_1^{(k)}}(y,z)dydz +$$
$$\frac{1}{2}\int\limits_{\xi^{(k-1)}}^{\xi} \varphi_k'(N_{k^-}^{-1}(y))dy - \frac{1}{2}\int\limits_{\xi^{(k-1)}}^{\xi}(1+as_k'(N_{k^-}^{-1}(y)))\psi_k'(N_{k^-}^{-1}(y))dy + \tag{17}$$
$$\frac{1}{2}\int\limits_{\eta^{(k)}}^{\eta} \varphi_k'(N_{k^+}^{-1}(y))dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\eta^{(k-1)}}^{\eta}(1+as_k'(N_{k^-}^{-1}(y)))\psi_k'(N_{k^-}^{-1}(y))dy + \varphi_k(x_{-1}^{(k)}),$$

где $b_k = t_k^{(0)} - \dfrac{t_k^{(0)}-t_k^{(-1)}}{x_k^{(0)}-x_k^{(-1)}}x_k^{(0)}$, $x = N_{k^-}^{-1}(\xi)$ как обратный оператор к выражению $x - as_k(x) = \xi$, а $x = N_{k^+}^{-1}(\eta)$ – обратный оператор к функции $x + as_k(x) = \eta$.

Решив уравнение (17), получим функции $g_1^{(k)}(\eta)$, $p_1^{(k)}(\xi)$:

$$\begin{aligned} g_1^{(k)}(\eta) &= \int\limits_{\eta_k}^{\eta} g_1'^{(k)}(y)dy + C_g, \\ p_1^{(k)}(\xi) &= \int\limits_{\xi_{k-1}}^{\xi} p_1'^{(k)}(y)dy + C_p. \end{aligned} \tag{18}$$

Производные, которые фигурируют в выражении (18), находятся из следующих соотношений:

$$p_1'^{(k)}(\xi) = \frac{1}{2}\varphi_k'(N_{k^-}^{-1}(\xi)) - \frac{1}{2}(1+as_k'(N_{k^-}^{-1}(\xi)))\psi_k'(N_{k^-}^{-1}(\xi)) -$$
$$\int\limits_{\eta^{(k)}}^{N_{k^-}^{-1}(\xi)+as_k(N_{k^-}^{-1}(\xi))} \overline{v_1^{(k)}}(\xi,z)dz,\quad \xi\in[\xi^{(k)},\xi^{(k-1)}],$$

$$g_1'^{(k)}(\eta)=\frac{1}{2}\varphi_k'(N_{k^+}^{-1}(\eta))-\frac{1}{2}(1+as_k'(N_{k^+}^{-1}(\eta)))\psi_k'(N_{k^+}^{-1}(\eta))-$$

$$\int\limits_{\xi^{(k)}}^{N_{k^+}^{-1}(\eta)+as_k(N_{k^+}^{-1}(\eta))}\overline{v_1^{(k)}}(z,\eta)dz,\quad \eta\in[\eta^{(k-1)},\eta^{(k)}].$$

Через функцию $g_1^{(k)}(\eta)$, заданную формулой (18), можно выразить решение в области $\overline{\Omega_2^{(k)}}$ таким выражением:

$$v_2^{(k)}(\xi,\eta)=\int\limits_{\xi^{(k)}}^{\xi}\int\limits_{\gamma^{(0)}(\Gamma^{(0)-1}(\xi))+a\Gamma^{(0)-1}(\xi)}^{\eta}\overline{v_2^{(k)}}(y,z)dzdy+\mu_1(\Gamma^{(0)-1}(\xi))-$$

$$g_1^{(k)}(\gamma^{(0)}(\Gamma^{(0)-1}(\xi))+a\Gamma^{(0)-1}(\xi))+g_1^{(k)}(\eta),\ \xi\in[\xi^{(k+1)},\xi^{(k)}],\ \eta\in[\eta^{(k-1)},\eta^{(k)}].$$

В этом выражении $t=\Gamma^{(0)-1}(z)$ – обратный оператор к $\gamma^{(0)}(t)-at=z.$ Для выполнения условия (13) достаточно выполнения условий согласования

$$\varphi_k(x_k^{(0)})=\mu_1(t_k^{(0)}),$$

$$\Gamma^{(0)-1}{}'(\xi^{(k)})\mu_1'(t_{s1}^{(k)})-\Gamma^{(0)-1}{}'(\xi^{(k)})(\gamma'^{(0)}(t_k^0)+a)\left[\frac{1}{2}\varphi_k'(x_k^{(0)})+\frac{1}{2}\psi_k'(x_k^{(0)})(1-as_k'(x_k^{(0)}))\right]=$$

$$\frac{1}{2}\varphi_k'(x_k^{(0)})+\frac{1}{2}\psi_k'(x_k^{(0)})(1+as_k'(x_k^{(0)})),$$

$$\Gamma^{(0)-1}{}''(\xi^{(k)})\mu_1{}'(t_k^{(0)})+(\Gamma^{(0)-1}{}'(\xi^{(k)}))^2\mu_1{}'(t_k^{(0)})-2\Gamma^{(0)-1}{}'(\xi^{(k)})(\gamma^{(0)}{}'(t_k^{(0)})+a)\overline{v_2^{(k)}}(\xi^{(k)},\eta^{(k-1)})-\quad(19)$$

$$g_1^{(k)}{}''(\eta^{(k-1)})(\Gamma^{(0)-1}(\xi^{(k)})(\gamma^{(0)}{}'(t_k^{(0)})+a))^2-g_1^{(k)}{}'(\eta^{(k-1)})[\Gamma^{(0)-1}{}''(\xi^{(k)})(\gamma^{(0)}{}'(t_k^{(0)})+a)+$$

$$\Gamma^{(0)-1}{}'(\xi^{(k)})\gamma^0{}''(t_k^{(0)})]=N_{k^-}^{-1}{}'(x_k^{(0)})\frac{1}{2}\varphi_k{}''(x_k^{(0)})-\frac{1}{2}N_{k^-}^{-1}{}'(x_k^{(0)})s_k{}''(x_k^{(0)})\psi_k{}'(x_k^{(0)})-$$

$$\frac{1}{2}(1+as_k{}'(x_k^{(0)}))N_{k^-}^{-1}{}'(x_k^{(0)})\psi_k{}''(x_k^{(0)})-\overline{v_1^{(k)}}(\xi^{(k)},\eta^{(k-1)}).$$

Аналогично получается представление решения в области $\overline{\ (\ )\ }$

$$v_3^{(k)}(\xi,\eta)=\int\limits_{\eta k}^{\eta}\int\limits_{\gamma^{(-1)}(\Gamma^{(-1)-1}(z))-a\Gamma^{(-1)-1}(z)}^{\xi}\overline{v_3^{(k)}}(y,z)dydz+\mu_2(\Gamma^{(-1)-1}(\eta))-$$

$$p_1^{(k)}(\gamma^{(-1)}(\Gamma^{(-1)-1}(\eta))-a\Gamma^{(-1)-1}(\eta))+p_1^{(k)}(\xi),\xi\in[\xi^{(k+1)},\xi^{(k)}],\eta\in[\eta^{(k-1)},\eta^{(k)}].$$

Здесь $t=\Gamma^{(-1)-1}(z)$ как обратный оператор к $\gamma^{(-1)}(t)+at=z.$ И таким же образом выписываются условия согласования:

$$\varphi(x_k^{(-1)})=\mu_2(t_k^{(-1)}),$$

$$\Gamma^{(-1)-1}{}'(\eta^{(k)})\mu'_2(t_k^{(-1)})-\Gamma^{(-1)-1}{}'(\eta^{(k)})(\gamma^{(-1)}{}'(t_k^{(-1)})-a)\left[\frac{1}{2}\varphi'_k(x_k^{(-1)})-\frac{1}{2}\psi'_k(x_k^{(-1)})(1+as'_k(x_k^{(-1)}))\right]=$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_k(x_k^{(-1)})+\frac{1}{2}\psi'_k(x_k^{(-1)})(1+as'_k(x_k^{(-1)})),$$

$$\Gamma^{(-1)-1}{}''(\eta^{(k)})\mu_2{}'(t_k^{(-1)})+(\Gamma^{(-1)-1}{}'(\eta^{(k)}))^2\mu_2{}''(t_k^{(-1)})-2\Gamma^{(-1)-1}{}'(\eta^{(k)})(\gamma^{(-1)}{}'(t_k^{(-1)})-a)\overline{v}(\xi^{(k-1)},\eta^{(k)})-$$

$$p_1^{(k)}{}''(\xi^{(k-1)})(\Gamma^{(-1)-1}(\eta^{(k)})(\gamma^{(-1)}{}'(t_k^{(-1)})-a))^2-p_1^{(k)}{}''(\xi^{(k-1)})[\Gamma^{(-1)-1}{}''(\eta^{(k)})(\gamma^{(-1)}{}'(t_k^{(-1)})-a)+$$

$$\Gamma^{(-1)-1}{}'(\eta^{(k)})\gamma^{(-1)}{}''(t_k^{(-1)})]=N_{k^+}^{-1}{}'(\eta^{(k)})\frac{1}{2}\varphi_k{}''(x_k^{(-1)})+\frac{1}{2}N_{k^+}^{-1}{}'(\eta^{(k)})(-a)s_k{}''(x_k^{(-1)})\psi_k{}'(x_k^{(-1)})+$$

$$\frac{1}{2}(1-as_k{}'(x_k^{(-1)}))N_{k^+}^{-1}{}'(x_k^{(-1)})\psi_k{}''(x_k^{(-1)})-\overline{v}(\xi^{(k-1)},\eta^{(k)}).\quad(20)$$

В области $\overline{\Omega_4^{(k)}}$ решение представимо в виде

$$v_4^{(k)}(\xi,\eta)=\int_{\eta^{(k)}}^{\eta}\int_{\xi^{(k)}}^{\xi}\overline{v_4^{(k)}}(y,z)dydz+p_2^{(k)}(\xi)+g_3^{(k)}(\eta), \xi\in[\xi^{(k+1)},\xi^{(k)}], \eta\in[\eta^{(k)},\eta^{(k+1)}].$$

Исходя из представления решений, можно сформулировать следующие леммы:

Л е м м а 4. *Пусть границы области* $\overline{\Omega^{(k)}}$ *являются функциями из класса дважды непрерывно дифференцируемых на области своего задания, более того, пусть существуют единственные обратные операторы к следующим функциям:* $z=x-a\nu_k(x)$, $z=x+a\nu_k(x)$, $z=\gamma_1(t)-at$, $z=\gamma_2(t)+at$, *которые также являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями в области задания, выполняются условия согласования для граничных и начальных условий (19), (20), и выполняются условия леммы 3, тогда решение v задачи (7)–(9) на* $\overline{\Omega^{(k)}}$ *существует, единственно и решение является дважды непрерывно дифференцируемой функцией своих аргументов.*

Начальные условия для области можно определить через решение на предыдущей области по формуле

$$\begin{gathered}\varphi_k(x)=v^{(k-1)}(x-as_k(x),x+as_k(x)),\\ \psi_k(x)=-a\partial_\xi v^{(k-1)}(x-as_k(x),x+as_k(x))+a\partial_\eta v^{(k-1)}(x-as_k(x),x+as_k(x)).\end{gathered}\tag{21}$$

Л е м м а 5. *Пусть для областей* $\Omega^{(k)}$ *и* $\Omega^{(k-1)}$ *выполняются условия леммы 4 и границы области* γ_1 *и* γ_2 *являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями. Тогда, если определить начальные условия для задачи в области* $\Omega^{(k)}$ *на границе по формуле (21), то решение в области* $\overline{\Omega^{(k)}\bigcup\Omega^{(k-1)}}$ *всегда будет существовать в классе* $C^2(\overline{\Omega^{(k)}\bigcup\Omega^{(k-1)}})$ *и будет единственным.*

Т е о р е м а. Пусть выполняются условия леммы 4, для любого k *существует единственное решение уравнений* $z=x-a\nu_k(x)$, $z=x+a\nu_k(x)$, $z=\gamma_1(t)-at$, $z=\gamma_2(t)+at$, *причем обратный оператор к этим функциям принадлежит классу* $C^2(\overline{\Omega^{(k)}})$ *для всех* k. *Функции, которые задают границы являются дважды непрерывно дифференируемыми на множестве своего задания, для них выполняется условие. Для начальных и граничных условий выполняются условия согласования (19), (20) при* $k=0$. *Тогда в классе* $C^2(\overline{\Omega})$ *существует единственное решение задачи (7)–(9).*

Для решения неоднородной задачи можно воспользоваться классическим методом Дюамеля, изложенном в [5], и потребовать для вспомогательной задачи выполнения условий теоремы.

Литература

1. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Квантовые поля. М., 2005.
2. *Корзюк В. И.* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1996. № 3. С. 55–71.
3. *Хапаев А. М., Цыганков А. А.* // Журн. вычислительной математики и математ. физики. 1997. Т. 37, № 8. С. 975–978.
4. *Алексеева Л. А.* // Математ. журн. 2006. Т. 6, № 1(19). С. 16–32.
5. *Корзюк В. И.* Уравнения математической физики (курс лекций). Минск, 2008.

V. I. KORZYUK, I. I. STOLYARCHUK

korzyuk@bsu.by; ivan.telkontar@gmail.com

CLASSICAL SOLUTION TO THE FIRST MIXED PROBLEM FOR KLEIN–GORDON–FOCK EQUATION IN THE CURVILINEAR HALF-STRIP

Summary

Sufficient conditions for existence of the unique solution in class C^2 for the domains of definition for the first mixed problem for homogeneous and non-homogeneous Klein–Gordon–Fock equation in the curvilinear half-strip are deduced using the characteristics method. Solution of the problem is reduced to solution of Voltaire's second-type equivalent equation.