Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 **май–июнь** **Том 58 № 3**

УДК 539.12

О. В. ВЕКО[1], *В. М. РЕДЬКОВ*[2]

О КОВАРИАНТИЗАЦИИ УСЛОВИЙ ОБРАЩЕНИЯ В НОЛЬ ТОКА J^Z ДЛЯ ДИРАКОВСКОГО ПОЛЯ НА ГРАНИЦАХ ОБЛАСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

[1]*Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина*
[2]*Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск*

Поступило 21.04.2014

В связи с эффектом Казимира [1] для спинорного поля в области, ограниченной двумя плоскостями, специальный интерес представляют решения уравнения Дирака, отвечающие исчезающему току J^z на границах области. Этого удается достигать при рассмотрении 4-мерного пространства состояний $\{\Psi_4\}$ с базисом из четырех решений с двумя противоположными по знаку проекциями импульса на направление магнитного поля $+k_3$ и $-k_3$, с двумя возможными состояниями спиральности каждая. В работе [2] на основе анализа выражения тока дираковского поля в спинорном базисе условие обращения тока J^z в ноль на одной границе было сформулировано в виде двух ограничений, содержащих два фазовых множителя:

$$\Psi_3 = e^{i\rho}\Psi_1, \qquad \Psi_4 = e^{i\sigma}\Psi_2, \tag{1}$$

и на этой основе требование обращения в ноль J^z на границах такой области сведено к однородной системе четырех линейных уравнений относительно комплексных коэффициентов линейной суперпозиции базисных волновых функций, коэффициенты системы зависят от квантовых чисел состояния с фиксированной энергией и четырех не фиксированных фазовых множителей. Условие разрешимости однородной системы – равенство нулю ее определителя имеет вид алгебраического уравнения 4-й степени относительно переменной $x = e^{2ik_3a}$, где a – половина расстояния между плоскостями. Каждый найденный при сформулированных условиях корень уравнения 4-й степени, лежащий на окружности единичного радиуса, дает некоторое правило квантования для третьей проекции импульса k_3. Однако и соотношения (1) и выведенная из них система уравнений не ковариантные: их форма пригодна только в спинорном базисе матриц Дирака.

Цель работы – обобщить процедуру анализа этой задачи на произвольный базис матриц Дирака.

Представим соотношения (1) в матричной форме

$$\begin{vmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 0 & e^{-i\rho} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\sigma}\\ e^{i\rho} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{i\sigma} & 0 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{vmatrix}, \qquad \Psi = G\,\Psi; \tag{2}$$

отмечаем равенство $G^2 = I$. Матрицу G можно разложить по базису матриц Дирака в спинорном базисе – это разложение будет автоматически ковариантным, т. е. справедливым в любом другом базисе. С учетом вида матриц Дирака в спинорном базисе

$$\gamma^a = \begin{vmatrix}0 & \bar{\sigma}^a\\ \sigma^a & 0\end{vmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{vmatrix}-I & 0\\ 0 & I\end{vmatrix}, \qquad \gamma^5\gamma^a = \begin{vmatrix}0 & \bar{\sigma}^a\\ -\sigma^a & 0\end{vmatrix}$$

разложение матрицы G из (2) следует искать в виде

$$G = (n_0\gamma^0 + n_3\gamma^3) + \gamma^5(m_0\gamma^0 + m_3\gamma^3);$$

в более детальной записи оно выглядит так:

$$G = \begin{vmatrix} 0 & (n_0 - m_0) - (n_3 - m_3)\sigma^3 \\ (n_0 + m_0) + (n_3 + m_3)\sigma^3 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

С учетом явного вида G из (2) получаем систему линейных уравнений

$$(n_0 - m_0) - (n_3 - m_3) = e^{-i\rho}, \qquad (n_0 - m_0) + (n_3 - m_3) = e^{-i\sigma},$$
$$(n_0 + m_0) + (n_3 + m_3) = e^{+i\rho}, \qquad (n_0 + m_0) - (n_3 + m_3) = e^{+i\sigma}.$$

Ее решение следующее

$$n_0 = \frac{1}{2}(\cos\rho + \cos\sigma), \qquad n_3 = \frac{1}{2}(i\sin\rho - i\sin\sigma),$$
$$m_0 = \frac{1}{2}(i\sin\rho + i\sin\sigma), \qquad m_3 = \frac{1}{2}(\cos\rho - \cos\sigma).$$

Соответственно, матрица G представляется так:

$$G = \frac{1}{2}(\cos\rho + \cos\sigma)\gamma^0 + \frac{1}{2}(i\sin\rho - i\sin\sigma)\gamma^3 + \gamma^5\left[\frac{1}{2}(i\sin\rho + i\sin\sigma)\gamma^0 + \frac{1}{2}(\cos\rho - \cos\sigma)\gamma^3\right].$$

Можно преобразовать это выражение в следующее

$$G = \frac{1}{4}(e^{i\rho} + e^{-i\rho} + e^{i\sigma} + e^{-i\sigma})\gamma^0 + \frac{1}{4}(e^{i\rho} - e^{-i\rho} - e^{i\sigma} + e^{-i\sigma})\gamma^3 +$$
$$\frac{1}{4}\gamma^5\left[(e^{i\rho} - e^{-i\rho} + e^{i\sigma} - e^{-i\sigma})\gamma^0 + \frac{1}{4}(e^{i\rho} + e^{-i\rho} - e^{i\sigma} - e^{-i\sigma})\gamma^3\right].$$

Это равенство можно представить иначе

$$G = e^{+i\rho}\frac{1+\gamma^5}{2}\frac{\gamma^0+\gamma^3}{2} + e^{-i\rho}\frac{1-\gamma^5}{2}\frac{\gamma^0-\gamma^3}{2} +$$
$$e^{+i\sigma}\frac{1+\gamma^5}{2}\frac{\gamma^0-\gamma^3}{2} + e^{-i\sigma}\frac{1-\gamma^5}{2}\frac{\gamma^0+\gamma^3}{2}. \qquad (4)$$

Условие обращения тока в ноль (в любом базисе матриц Дирака) выглядит так:

$$J^z = 0 \iff G(\rho, \sigma)\Psi = \Psi.$$

Формула (4) упрощается при $e^{i\sigma} = e^{i\rho}$:

$$G = e^{+i\rho}\frac{1+\gamma^5}{2}\gamma^0 + e^{-i\rho}\frac{1-\gamma^5}{2}\gamma^0 \text{ (отмечаем, что } G^2 = I);$$

в частности,

$$\rho = 0, \quad G = \frac{1+\gamma^5}{2}\gamma^0 + \frac{1-\gamma^5}{2}\gamma^0 = \gamma^0; \;\; \rho = \pi/2, \quad G = i\frac{1+\gamma^5}{2}\gamma^0 - i\frac{1-\gamma^5}{2}\gamma^0 = -i\gamma^5\gamma^0.$$

Формула (4) упрощается также и при $e^{i\sigma} = e^{-i\rho}$:

$$G = e^{+i\rho}\frac{\gamma^0+\gamma^3}{2} + e^{-i\rho}\frac{\gamma^0-\gamma^3}{2} \text{ (отмечаем, что } G^2 = I);$$

в частности,

$$\rho = 0, \quad G = \frac{\gamma^0+\gamma^3}{2} + \frac{\gamma^0-\gamma^3}{2}; \;\; \rho = \pi/2, \quad G = i\frac{\gamma^0+\gamma^3}{2} - i\frac{\gamma^0-\gamma^3}{2} = i\gamma^3.$$

Обратимся теперь к формулировке условий обращения в ноль тока на границах между двумя плоскостями:

$$\begin{cases} \Psi(z=-a) - G(\rho,\sigma)\Psi(z=-a) = 0, \\ \Psi(z=+a) - G(\mu,\nu)\Psi(z=+a) = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Эти уравнения преобразуются при замене базиса матриц Дирака $\Psi' = S\Psi$, $\gamma'^{a} = S\gamma^{a}S^{-1}$ так:

$$\begin{cases} \Psi'(z=-a) - G'(\rho,\sigma)\Psi'(z=-a) = 0, \\ \Psi'(z=+a) - G'(\mu,\nu)\Psi'(z=+a) = 0, \end{cases}$$

где $G'(\rho,\sigma) = SG'(\rho,\sigma)S^{-1}$, $G'(\mu,\nu) = SG'(\mu,\nu)S^{-1}$. Структура уравнений (5) очевидным образом инвариантна относительно замены базиса матриц Дирака. Вычисления можно проводить в любом из них, но при этом невозможно получить новых результатов по сравнению с найденными в спинорном базисе. Просто хотя бы потому, что любой результат можно пересчитать к спинорному базису и он должен совпадать с одним из уже известных в спинорном базисе.

В качестве примера рассмотрим применение этого ковариантизованного подхода в стандартном базисе матриц Дирака:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{vmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{vmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{vmatrix}.$$

В этом базисе для матриц $G(\rho,\sigma)$ и $G(\mu,\nu)$ находим явные выражения

$$G(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} e^{-i\rho} + e^{i\rho} & 0 & -e^{-i\rho} + e^{i\rho} & 0 \\ 0 & e^{-i\sigma} + e^{i\sigma} & 0 & -e^{-i\sigma} + e^{i\sigma} \\ e^{-i\rho} - e^{i\rho} & 0 & -e^{-i\rho} - e^{i\rho} & 0 \\ 0 & e^{-i\sigma} - e^{i\sigma} & 0 & -e^{-i\sigma} - e^{i\sigma} \end{vmatrix},$$

$$G(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} e^{-i\mu} + e^{i\mu} & 0 & -e^{-i\mu} + e^{i\mu} & 0 \\ 0 & e^{-i\nu} + e^{i\nu} & 0 & -e^{-i\nu} + e^{i\nu} \\ e^{-i\mu} - e^{i\mu} & 0 & -e^{-i\mu} - e^{+i\mu} & 0 \\ 0 & e^{-i\nu} - e^{i\nu} & 0 & -e^{-i\nu} - e^{i\nu} \end{vmatrix}.$$

Плоские волны (используем обозначения из [2]) с фиксированной поляризацией, построенные в спинорном базисе (для краткости множитель $e^{-i\varepsilon t}e^{ik_1 x}e^{ik_2 y}$ опускаем)

$$\Psi_1 = \Psi_{\alpha,k} = e^{ikz}\begin{vmatrix} 1 \\ \dfrac{k_1 + ik_2}{k+p} \\ \alpha \\ \alpha\dfrac{k_1 + ik_2}{k+p} \end{vmatrix}, \quad \Psi_2 = \Psi_{(\beta),k} = e^{ikz}\begin{vmatrix} 1 \\ \dfrac{k_1 + ik_2}{k-p} \\ \beta \\ \beta\dfrac{k_1 + ik_2}{k-p} \end{vmatrix},$$

$$\Psi_3 = \Psi_{\alpha,-k} = e^{-ikz}\begin{vmatrix} 1 \\ -\dfrac{k_1 + ik_2}{k-p} \\ \alpha \\ -\alpha\dfrac{k_1 + ik_2}{k-p} \end{vmatrix}, \quad \Psi_4 = \Psi_{(\beta),-k} = e^{-ikz}\begin{vmatrix} 1 \\ -\dfrac{k_1 + ik_2}{k+p} \\ \beta \\ -\beta\dfrac{k_1 + ik_2}{k+p} \end{vmatrix},$$

где $R = +\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$; $\alpha = \dfrac{\varepsilon + p}{m}$; $\beta = \dfrac{\varepsilon - p}{m}$,

пересчитываем к стандартному базису с использованием преобразования

$$\Psi_j^{st} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Psi_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Получаем (множитель $1/\sqrt{2}$ здесь будет несущественным, опускаем его):

$$\Psi_1^{st} = e^{ikz} \begin{vmatrix} 1+\alpha \\ \frac{k_1+ik_2}{k+p}(1+\alpha) \\ 1-\alpha \\ \frac{k_1+ik_2}{k+p}(1-\alpha) \end{vmatrix}, \quad \Psi_2^{st} = e^{ikz} \begin{vmatrix} 1+\beta \\ \frac{k_1+ik_2}{k-p}(1+\beta) \\ 1-\beta \\ \frac{k_1+ik_2}{k-p}(1-\beta) \end{vmatrix},$$

$$\Psi_3^{st} = e^{-ikz} \begin{vmatrix} 1+\alpha \\ -\frac{k_1+ik_2}{k-p}(1+\alpha) \\ 1-\alpha \\ -\frac{k_1+ik_2}{k-p}(1-\alpha) \end{vmatrix}, \quad \Psi_4^{st} = e^{-ikz} \begin{vmatrix} 1+\beta \\ -\frac{k_1+ik_2}{k+p}(1+\beta) \\ 1-\beta \\ -\frac{k_1+ik_2}{k+p}(1-\beta) \end{vmatrix}.$$

Напоминаем, что условиям обращения тока J^z в ноль на границах области между двумя параллельными плоскостями можно удовлетворить [2] только, если воспользоваться линейной комбинацией из четырех волновых функций

$$\Phi^{st} = A_1\Psi_1^{st} + A_2\Psi_2^{st} + A_3\Psi_3^{st} + A_4\Psi_4^{st}.$$

Условия обращения тока в ноль на границах (5) принимают в этих обозначениях вид

$$\Phi^{st}(z=-a) - G(\rho,\sigma)\Phi^{st}(z=-a) = 0, \tag{6}$$

$$\Phi^{st}(z=+a) - G(\mu,\nu)\Phi^{st}(z=+a) = 0. \tag{7}$$

Находим четыре компоненты решения $\Phi(z=-a)$:

$$\Phi_1^{st}(z=-a) = e^{-iak}[A_1(1+\alpha) + A_2(1+\beta)] + e^{iak}[A_3(1+\alpha) + A_4(1+\beta)],$$

$$\Phi_3^{st}(z=-a) = e^{-iak}[A_1(1-\alpha) + A_2(1-\beta)] + e^{iak}[A_3(1-\alpha) + A_4(1-\beta)],$$

$$\Phi_2^{st}(z=-a) = (k_1+ik_2)e^{-iak}\left[\frac{A_1(1+\alpha)}{k+p} + \frac{A_2(1+\beta)}{k-p}\right] - (k_1+ik_2)e^{iak}\left[\frac{A_3(1+\alpha)}{k-p} + \frac{A_4(1+\beta)}{k+p}\right],$$

$$\Phi_4^{st}(z=-a) = (k_1+ik_2)e^{-iak}\left[\frac{A_1(1-\alpha)}{k+p} + \frac{A_2(1-\beta)}{k-p}\right] - (k_1+ik_2)e^{iak}\left[\frac{A_3(1-\alpha)}{k-p} + \frac{A_4(1-\beta)}{k+p}\right].$$

Находим четыре компоненты столбца $G(\rho,\sigma)\Phi(z=-a)$:

$$[G(\rho,\sigma)\Phi^{st}(z=-a)]_1 = \frac{1}{2}(e^{-i\rho} + e^{i\rho})\Phi_1^{st} + \frac{1}{2}(-e^{-i\rho} + e^{i\rho})\Phi_3^{st} =$$

$$e^{-i\rho}\left[e^{-iak}(A_1\alpha + A_2\beta) + e^{iaz}(A_3\alpha + A_4\beta)\right] + e^{i\rho}\left[e^{-iak}(A_1 + A_2) + e^{iaz}(A_3 + A_4)\right],$$

$$[G(\rho,\sigma)\Phi^{st}(z=-a)]_3 = \frac{1}{2}(e^{-i\rho} - e^{i\rho})\Phi_1^{st} + \frac{1}{2}(-e^{-i\rho} - e^{i\rho})\Phi_3^{st} =$$

$$e^{-i\rho}\left[e^{-iak}(A_1\alpha + A_2\beta) + e^{iak}(A_3\alpha + A_4\beta)\right] - e^{i\rho}\left[e^{-iak}(A_1 + A_2) + e^{iaz}(A_3 + A_4)\right],$$

$$[G(\rho,\sigma)\Phi^{st}(z=-a)]_2 = \frac{1}{2}(e^{-i\sigma}+e^{i\sigma})\Phi_2^{st} + \frac{1}{2}(-e^{-i\sigma}+e^{i\sigma})\Phi_4^{st} =$$

$$e^{-i\sigma}(k_1+ik_2)\left[e^{-iak}\left(\frac{A_1\alpha}{k+p}+\frac{A_2\beta}{k-p}\right)-e^{iak}\left(\frac{A_3\alpha}{k-p}+\frac{A_4\beta}{k+p}\right)\right]+$$

$$e^{i\sigma}(k_1+ik_2)\left[e^{-iak}\left(\frac{A_1}{k+p}+\frac{A_2}{k-p}\right)-e^{iak}\left(\frac{A_3}{k-p}+\frac{A_4}{k+p}\right)\right],$$

$$[G(\rho,\sigma)\Phi^{st}(z=-a)]_4 = \frac{1}{2}(e^{-i\sigma}-e^{i\sigma})\Phi_2^{st} + \frac{1}{2}(-e^{-i\sigma}-e^{i\sigma})\Phi_4^{st} =$$

$$e^{-i\sigma}(k_1+ik_2)\left[e^{-iak}\left(\frac{A_1\alpha}{k+p}+\frac{A_2\beta}{k-p}\right)-e^{iak}\left(\frac{A_3\alpha}{k-p}+\frac{A_4\beta}{k+p}\right)\right]-$$

$$e^{i\sigma}(k_1+ik_2)\left[e^{-iak}\left(\frac{A_1}{k+p}+\frac{A_2}{k-p}\right)-e^{iak}\left(\frac{A_3}{k-p}+\frac{A_4}{k+p}\right)\right].$$

Уравнение (6) дает четыре уравнения

$$\begin{gathered}
e^{-iak}[A_1(1+\alpha)+A_2(1+\beta)]+e^{iak}[A_3(1+\alpha)+A_4(1+\beta)]= \\
e^{-i\rho}\left[e^{-iak}(A_1\alpha+A_2\beta)+e^{iak}(A_3\alpha+A_4\beta)\right]+e^{i\rho}\left[e^{-iak}(A_1+A_2)+e^{iaz}(A_3+A_4)\right]; \\
e^{-iak}[A_1(1-\alpha)+A_2(1-\beta)]+e^{iak}[A_3(1-\alpha)+A_4(1-\beta)]= \\
e^{-i\rho}\left[e^{-iak}(A_1\alpha+A_2\beta)+e^{iak}(A_3\alpha+A_4\beta)\right]-e^{i\rho}\left[e^{-iak}(A_1+A_2)+e^{iak}(A_3+A_4)\right];
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
e^{-iak}\left[\frac{A_1(1+\alpha)}{k+p}+\frac{A_2(1+\beta)}{k-p}\right]-e^{iak}\left[\frac{A_3(1+\alpha)}{k-p}+\frac{A_4(1+\beta)}{k+p}\right]= \\
e^{-i\sigma}\left[e^{-iak}\left(\frac{A_1\alpha}{k+p}+\frac{A_2\beta}{k-p}\right)-e^{iak}\left(\frac{A_3\alpha}{k-p}+\frac{A_4\beta}{k+p}\right)\right]+ \\
e^{i\sigma}\left[e^{-iak}\left(\frac{A_1}{k+p}+\frac{A_2}{k-p}\right)-e^{iak}\left(\frac{A_3}{k-p}+\frac{A_4}{k+p}\right)\right]; \\
e^{-iak}\left[\frac{A_1(1-\alpha)}{k+p}+\frac{A_2(1-\beta)}{k-p}\right]-e^{iak}\left[\frac{A_3(1-\alpha)}{k-p}+\frac{A_4(1-\beta)}{k+p}\right]= \\
e^{-i\sigma}\left[e^{-iak}\left(\frac{A_1\alpha}{k+p}+\frac{A_2\beta}{k-p}\right)-e^{iak}\left(\frac{A_3\alpha}{k-p}+\frac{A_4\beta}{k+p}\right)\right]- \\
e^{i\sigma}\left[e^{-iak}\left(\frac{A_1}{k+p}+\frac{A_2}{k-p}\right)-e^{iak}\left(\frac{A_3}{k-p}+\frac{A_4}{k+p}\right)\right].
\end{gathered} \tag{9}$$

Уравнения в пределах каждой пары можно сложить и вычесть друг из друга. Так, из (8) получаем

$$e^{-iak}(A_1+A_2)+e^{iak}(A_3+A_4)=e^{-i\rho}\left[e^{-iak}(A_1\alpha+A_2\beta)+e^{iak}(A_3\alpha+A_4\beta)\right],$$

$$e^{-iak}(A_1\alpha+A_2\beta)+e^{iak}(A_3\alpha+A_4\beta)=e^{i\rho}\left[e^{-iak}(A_1+A_2)+e^{iak}(A_3+A_4)\right];$$

очевидно, первое уравнение получается умножением второго на $e^{i\rho}$. Аналогично, комбинируя уравнения второй пары (9), получим

$$e^{-iak}\left[\frac{A_1}{k+p}+\frac{A_2}{k-p}\right]-e^{iak}\left[\frac{A_3}{k-p}+\frac{A_4}{k+p}\right]=$$

$$e^{-i\sigma}\left[e^{-iak}\left(\frac{A_1\alpha}{k+p}+\frac{A_2\beta}{k-p}\right)-e^{iak}\left(\frac{A_3\alpha}{k-p}+\frac{A_4\beta}{k+p}\right)\right],$$

$$e^{-iak}\left[\frac{A_1\alpha}{k+p}+\frac{A_2\beta}{k-p}\right]-e^{iak}\left[\frac{A_3\alpha}{k-p}+\frac{A_4\beta}{k+p}\right]=$$

$$e^{i\sigma}\left[e^{-iak}\left(\frac{A_1}{k+p}+\frac{A_2}{k-p}\right)-e^{iak}\left(\frac{A_3}{k-p}+\frac{A_4}{k+p}\right)\right],$$

здесь первое уравнение получается умножением второго на $e^{i\sigma}$. Таким образом, из (6) следуют только два уравнения:

$$e^{-iak}(A_1\alpha+A_2\beta)+e^{iak}(A_3\alpha+A_4\beta)=e^{i\rho}[e^{-iak}(A_1+A_2)+e^{iak}(A_3+A_4)];$$

$$e^{-iak}\left(\frac{A_1\alpha}{k+p}+\frac{A_2\beta}{k-p}\right)-e^{iak}\left(\frac{A_3\alpha}{k-p}+\frac{A_4\beta}{k+p}\right)=e^{i\sigma}\left[e^{-iak}\left(\frac{A_1}{k+p}+\frac{A_2}{k-p}\right)-e^{iak}\left(\frac{A_3}{k-p}+\frac{A_4}{k+p}\right)\right], \quad (10)$$

Следующие из (7) два независимых уравнения можно записать, воспользовавшись формальными заменами $a\Rightarrow -a$ и $\rho,\sigma\Rightarrow\mu,\nu$:

$$e^{iak}(A_1\alpha+A_2\beta)+e^{-iak}(A_3\alpha+A_4\beta)=e^{i\mu}[e^{iak}(A_1+A_2)+e^{-iak}(A_3+A_4)],$$

$$e^{iak}\left(\frac{A_1\alpha}{k+p}+\frac{A_2\beta}{k-p}\right)-e^{-iak}\left(\frac{A_3\alpha}{k-p}+\frac{A_4\beta}{k+p}\right)=e^{i\nu}\left[e^{iak}\left(\frac{A_1}{k+p}+\frac{A_2}{k-p}\right)-e^{-iak}\left(\frac{A_3}{k-p}+\frac{A_4}{k+p}\right)\right]. \quad (11)$$

Сравним (10), (11) с полученной в [2] аналогичной системой уравнений в спинорном базисе: они совпадают. Таким образом, действительно, выбор представления для матриц Дирака не влияет на итоговый явный вид системы линейных уравнений, обеспечивающей обращение тока на границах области.

Рассмотрим теперь вопрос о ковариантизации условия обращения тока J^z в ноль в другом смысле: исследуем зависимость этих условий от выбора базиса в 4-мерном линейном пространстве состояний дираковской частицы. Пусть есть два базиса, связанные линейным преобразованием,

$$\Psi'_i = S_{ij}\Psi_j. \quad (12)$$

В нештрихованном базисе строим линейную комбинацию и накладываем дополнительные условия, обеспечивающие равенство нулю тока на границах:

$$\Phi = A_j\Psi_j;$$

$$J^z(z=-a)=0, \Phi=G(\rho,\sigma)\Phi; \quad J^z(z=+a)=0, \Phi=G(\mu,\nu)\Phi.$$

Пусть известно какое-то решение этих уравнений

$$J^z(z=\pm a)=0, \quad \Phi=A_i\Psi_i. \quad (13)$$

Используя (12), получаем

$$\Phi=A_i\Psi_i=(A_iS_{ij})\Psi'_j=A'_j\Psi'_j=\Phi'.$$

Следовательно, решение (13) можно представить в эквивалентной форме так:

$$J^z(z=\pm a)=0, \quad \Phi=\Phi'=A'_i\Psi'_i.$$

Другими словами, каждое решение в нештрихованном базисе порождает соответствующее решение в штрихованном базисе, но с другим набором A'_1, A'_2, A'_3, A'_4:

$$\Phi'=A'_i\Psi'_i;$$

$$J^z(z=-a)=0, \Phi'=G(\rho,\sigma)\Phi'; \quad J^z(z=+a)=0, \Phi'=G(\mu,\nu)\Phi'.$$

Поэтому несущественно, какой базис использовать при анализе условий обращения тока в ноль на границах области. Множество всех решений будет фактически тем же самым.

Литература

1. *Мостепаненко В. М.* // УФН. 1988. Т. 156, № 3. С. 385–426.
2. *Veko O. V.* // 21 International Seminar: Nonlinear Phenomena in Complex Systems. Minsk, May 20–23, 2014.

O. V. VEKO, V. M. RED'KOV

v.redkov@dragon.bas-net.by

COVARIANTIZATION OF CONDITIONS OF VANISHING THE CURRENT J^z FOR THE DIRAC FIELD AT THE BOUNDARIES OF THE DOMAIN BETWEEN TWO PLANES

Summary

General conditions for vanishing the third projection of the current J^z for the Dirac field on two boundaries of the domain between two parallel planes are formulated in a covariant form which is valid for any basis of Dirac matrices. Produced relations contain four arbitrary phase parameters. Solutions of the Dirac equation with such properties of their current are of special interest in connection with investigation of the Casimir effect for Dirac field in the domain restricted by two planes.