Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 июль–август Том 58 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.988

А. Н. ТАНЫГИНА

ДВУХШАГОВЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНО ГЛАДКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Белорусский государственный университет, Минск *Поступило 30.06.2014*

В работах [1; 2] был проведен анализ сходимости метода Ньютона–Канторовича [3] для решения операторных уравнений вида

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где $f: X \to Y$ – нелинейное отображение, дифференцируемое в каждой внутренней точке замкнутого шара $\overline{B(x_0, R)} \subset X$; X, Y – банаховы пространства; x_0 – известное начальное приближение. Последовательные приближения по методу Ньютона–Канторовича задаются равенствами

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{2}$$

Авторами указанных работ было введено новое понятие гладкости оператора f, названное *регулярной гладкостью*. В работе [4] было показано, что условие регулярной гладкости может быть заменено на более простое условие

$$\|f'(x'') - f'(x')\| \le \omega((\chi - r - \|x'' - x'\|)^+ + \|x'' - x'\|) - \omega((\chi - r - \|x'' - x'\|)^+), \tag{3}$$

где $r = \|x' - x_0\|$; $\lambda^+ = \max\{\lambda, 0\}$, в записи которого приращение производной оператора f мажорируется приращением непрерывной строго возрастающей вогнутой скалярной функции $\omega: [0, \infty) \to [0, \infty)$, обладающей свойством $\omega(0) = 0$; $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$ – некоторая постоянная.

Цель работы – установление результатов, аналогичных результатам из [4], для двухшагового метода Ньютона–Канторовича вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - [f'(x_n)]^{-1} f(y_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \\ y_n = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \end{cases} \tag{4}$$

Метод (4) отличается от метода (2) тем, что в методе (4) $[f'(x_n)]^{-1}$ подсчитываются лишь на каждом втором шаге.

В работе [5] было проведено исследование сходимости метода (4) с использованием мажорант Канторовича [3]; при этом оператор f предполагался удовлетворяющим модифицированному условию Липшица

$$\|f'(x'') - f'(x')\| \le k(\rho)\|x'' - x'\|, \qquad \forall\, x', x'' \in \overline{B(x_0, \rho)}, \quad 0 < \rho < R, \tag{5}$$

где k – неубывающая функция. В данной работе также будет использован принцип мажорант, однако рассматриваемое здесь условие (3) является более общим, чем условие (5), что позволяет применить полученные результаты к более широкому классу нелинейных операторных уравнений вида (1).

1. Пусть $\Omega(t)=\int\limits_0^t \omega(\tau)d\tau$, число $a>0$ удовлетворяет неравенству $\|f(x_0)\|\le a$, $\chi\in[0,\omega^{-1}(1)]$. Без ограничения общности будем считать, что $f'(x_0)=I$. Обозначим через Φ функцию числового аргумента $t\in[0,\chi]$:

$$\Phi(t)=a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-t)-t(1-\omega(\chi)). \tag{6}$$

Определим числовые последовательности $\{t_n\}$ и $\{s_n\}$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$t_{n+1}=s_n+\frac{a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-s_n)-s_n(1-\omega(\chi))}{1-[\omega(\chi)-\omega(\chi-t_n)]},\qquad t_0=0; \tag{7}$$

$$s_n=t_n+\frac{a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-t_n)-t_n(1-\omega(\chi))}{1-[\omega(\chi)-\omega(\chi-t_n)]}, \tag{8}$$

$n=0,1,\ldots.$

Л е м м а. *Пусть существует постоянная* $\chi\in[0,\omega^{-1}(1)]$ *такая, что выполнено неравенство*

$$a\le\Omega(\chi)-\chi\omega(\chi)+\chi \tag{9}$$

и функция (6) имеет единственный нуль t_* *на отрезке* $[0,\chi]$. *Тогда последовательности* $\{t_n\}$ *и* $\{s_n\}$ *определены корректно, монотонно возрастают и сходятся к* t_*, *причем для любого* $n=0,1,\ldots$

$$t_n\le s_n\le t_{n+1}\le t_*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку t_* – единственный нуль функции Φ, $\Phi(0)=a>0$ и Φ непрерывна на $[0,\chi]$, то Φ принимает на отрезке $[0,t_*]$ неотрицательные значения. В силу свойств функции ω функция $\Phi'(t)=-\omega(\chi-t)-(1-\omega(\chi))$ является отрицательной на отрезке $[0,t_*]$ (за исключением случая, когда $t=t_*=\chi=\omega^{-1}(1)$). Таким образом, функция

$$u(t)=-\frac{\Phi(t)}{\Phi'(t)}$$

неотрицательна на $[0,t_*]$. Следовательно, если для некоторого $n=0,1,\ldots$ $t_n\in[0,t_*]$ и $s_n\in[0,t_*]$, то

$$s_n-t_n=\frac{a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-t_n)-t_n(1-\omega(\chi))}{1-[\omega(\chi)-\omega(\chi-t_n)]}=-\frac{\Phi(t_n)}{\Phi'(t_n)}\ge 0,$$
$$t_{n+1}-s_n=\frac{a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-s_n)-s_n(1-\omega(\chi))}{1-[\omega(\chi)-\omega(\chi-t_n)]}=-\frac{\Phi(s_n)}{\Phi'(t_n)}\ge 0,$$

откуда вытекает, что $t_n\le s_n\le t_{n+1}$ и, в частности, последовательность $\{t_n\}$ является монотонно возрастающей.

Покажем, что $t+u(t)$ – неубывающая функция на $[0,t_*]$.

Действительно,

$$(t+u(t))'=1+u'(t)=1+\left(\frac{\Phi(t)}{\omega(\chi-t)+1-\omega(\chi)}\right)'=$$

$$1+\frac{\Phi'(t)(\omega(\chi-t)+1-\omega(\chi))+\Phi(t)\omega'(\chi-t)}{(\omega(\chi-t)+1-\omega(\chi))^2}=\frac{\Phi(t)\omega'(\chi-t)}{(\omega(\chi-t)+1-\omega(\chi))^2}\ge 0$$

на $[0,t_*]$. Следовательно, если $t_n\le t_*$, то

$$s_n=t_n+u(t_n)\le t_*+u(t_*)=t_*.$$

Покажем, что $t_n \le t_*$ для любого $n = 0, 1, \ldots$. Для $n = 0$ неравенство верно: $t_0 = 0 \le t_*$. Если предположить, что $t_n \le t_*$, то в силу свойств функции ω имеем

$$t_{n+1} = s_n - \frac{\Phi(s_n)}{\Phi'(t_n)} \le s_n - \frac{\Phi(s_n)}{\Phi'(s_n)} \le t_* + u(t_*) = t_*,$$

откуда по индукции следует справедливость неравенства $t_n \le t_*$ для любого $n = 0, 1, \ldots$.

Таким образом, для любого $n = 0, 1, \ldots$ имеют место неравенства

$$t_n \le t_*, \qquad s_n \le t_*,$$

и, следовательно,

$$t_n \le s_n \le t_{n+1} \le t_*.$$

Докажем, что последовательности $\{t_n\}$ и $\{s_n\}$ сходятся к t_*. Действительно, последовательность $\{t_n\}$ монотонно возрастает и ограничена. Следовательно, она сходится к некоторому $t_{**} \in [0, t_*]$. В силу принципа сжатой переменной последовательность $\{s_n\}$ также сходится к t_{**}. Переходя в равенстве $s_n = t_n + u(t_n)$ к пределу при $n \to \infty$, получим, что $t_{**} = t_{**} + u(t_{**})$, откуда $\Phi(t_{**}) = 0$. Поскольку t_* – единственный нуль функции Φ на отрезке $[0, \chi]$, то $t_{**} = t_*$.

Последовательности $\{t_n\}$ и $\{s_n\}$ определены корректно, поскольку для любого $n = 0, 1, \ldots$ $t_n \le \chi$ и $s_n \le \chi$. Действительно, в силу условия (9) $\Phi(\chi) \le 0 < a = \Phi(0)$ и, следовательно, существует $\theta \in (0, \chi]$ такое, что $\Phi(\theta) = 0$. Значит, $\theta = t_* = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$ и $t_n < \theta \le \chi$ для любого $n = 0, 1, \ldots$. В силу строгой монотонности функции ω значение $\omega(\chi - t_n) > 0$ для любого $n = 0, 1, \ldots$. Случай $t_n = \theta$ исключен, иначе последовательность $\{t_n\}$ является стационарной. Лемма доказана.

2. Сформулируем основную теорему о сходимости метода (4).

Т е о р е м а. *Пусть существует постоянная* $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$ *такая, что выполнено неравенство (9), оператор f удовлетворяет на* $\overline{B(x_0, R)}$ *условию (3) с таким* χ *и функция (6) имеет единственный нуль* $t_* \le R$ *на отрезке* $[0, \chi]$. *Тогда*

1) уравнение (1) имеет единственное решение x_* *в шаре* $\overline{B(x_0, t_*)}$;

2) последовательные приближения $\{x_n\}$, *заданные соотношениями (4), определены для всех* $n = 0, 1, \ldots$, *принадлежат шару* $\overline{B(x_0, t_*)}$ *и сходятся к* x_*;

3) для всех $n = 0, 1, \ldots$ *справедливы оценки*

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le t_{n+1} - t_n, \tag{10}$$

$$\|x_* - x_n\| \le t_* - t_n, \tag{11}$$

где последовательность $\{t_n\}$ *определена с помощью рекуррентных соотношений (7) и (8), монотонно возрастает и сходится к* t_*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство первых двух утверждений теоремы повторяет доказательство аналогичных утверждений из [4], поэтому достаточно доказать справедливость оценок

$$\|x_{n+1} - y_n\| \le t_{n+1} - s_n \tag{12}$$

и

$$\|y_n - x_n\| \le s_n - t_n, \tag{13}$$

которые влекут справедливость оценки (10), а следовательно, и оценки (11).

Пусть $n = 0$. Тогда

$$\|y_0 - x_0\| = \|[f'(x_0)]^{-1} f(x_0)\| = \|f(x_0)\| \le a = s_0 - t_0,$$

$$\|x_1 - y_0\| = \|[f'(x_0)]^{-1} f(y_0)\| = \|f(y_0)\| = \|f(y_0) - f(x_0) - f'(x_0)(y_0 - x_0)\| \le$$

$$\int_0^1 \|f'((1-t)x_0 + ty_0) - f'(x_0)\| \, \|y_0 - x_0\| dt \le$$

$$\int_0^1 (\omega((\chi - \|(1-t)x_0 + ty_0 - x_0\|)^+ + \|(1-t)x_0 + ty_0 - x_0\|) -$$

$$\omega((\chi-\|(1-t)x_0+ty_0-x_0\|)^+))\|y_0-x_0\|dt=$$

$$\int_0^1(\omega((\chi-t\|y_0-x_0\|)^+ +t\|y_0-x_0\|)-\omega((\chi-t\|y_0-x_0\|)^+))\|y_0-x_0\|dt.$$

Поскольку $\|y_0-x_0\|\le s_0-t_0$, то $\chi-t\|y_0-x_0\|\ge\chi-t(s_0-t_0)$ при $0\le t\le 1$, откуда в силу вогнутости и монотонности функции ω

$$\omega((\chi-t\|y_0-x_0\|)^+ +t\|y_0-x_0\|)-\omega((\chi-t\|y_0-x_0\|)^+)\le$$

$$\omega((\chi-t(s_0-t_0))^+ +t(s_0-t_0))-\omega((\chi-t(s_0-t_0))^+).$$

Следовательно,

$$\|x_1-y_0\|\le\int_0^1(\omega((\chi-t(s_0-t_0))^+ +t(s_0-t_0))-\omega((\chi-t(s_0-t_0))^+))(s_0-t_0)dt=$$

$$\int_0^{s_0-t_0}(\omega((\chi-\theta)^+ +\theta)-\omega((\chi-\theta)^+))d\theta=\int_0^{s_0}(\omega((\chi-\theta)^+ +\theta)-\omega((\chi-\theta)^+))d\theta.$$

Поскольку $0\le\theta\le s_0$, а в силу леммы $s_0\le\chi$, то $\chi-\theta\ge 0$ и окончательно получаем

$$\|x_1-y_0\|\le\int_0^{s_0}(\omega(\chi)-\omega(\chi-\theta))d\theta=\omega(\chi)s_0+\int_0^{s_0}\omega(\chi-\theta)d(\chi-\theta)=\omega(\chi)s_0+\int_\chi^{\chi-s_0}\omega(\tau)d\tau=$$

$$\omega(\chi)s_0+\int_0^{\chi-s_0}\omega(\tau)d\tau-\int_0^{\chi}\omega(\tau)d\tau=\omega(\chi)s_0+\Omega(\chi-s_0)-\Omega(\chi)=t_1-s_0.$$

Таким образом, оценки (12) и (13) верны при $n=0$. Предположим, что оценки (12) и (13) имеют место для всех $n<k$ и докажем их справедливость при $n=k$.

По предположению индукции

$$\|x_{k-1}-x_0\|\le\sum_{j=1}^{k-1}\|x_j-x_{j-1}\|\le\sum_{j=1}^{k-1}(t_j-t_{j-1})=t_{k-1},$$

$$\|x_k-x_0\|\le\|x_k-x_{k-1}\|+\|x_{k-1}-x_0\|\le t_k-t_{k-1}+t_{k-1}=t_k$$

и

$$\|y_{k-1}-x_0\|\le\|y_{k-1}-x_{k-1}\|+\|x_{k-1}-x_0\|\le s_{k-1}-t_{k-1}+t_{k-1}=s_{k-1}.$$

Докажем оценку $\|y_k-x_k\|\le s_k-t_k$. Имеем

$$\|y_k-x_k\|=\|[f'(x_k)]^{-1}f(x_k)\|\le\|[f'(x_k)]^{-1}\|\,\|f(x_k)\|.$$

Обратимость оператора $f'(x_k)$ была доказана в [4] и там же было показано, что

$$\|[f'(x_k)]^{-1}\|\le\frac{1}{1-[\omega(\chi)-\omega(\chi-t_k)]}.$$

Далее,

$$\|f(x_k)\|=\|f(x_k)-f(y_{k-1})-f'(x_{k-1})(x_k-y_{k-1})\|\le$$

$$\int_0^1\|f'((1-t)y_{k-1}+tx_k)-f'(x_{k-1})\|\,\|x_k-y_{k-1}\|dt\le$$

$$\int_0^1(\omega((\chi-\|x_{k-1}-x_0\|-\|(1-t)y_{k-1}+tx_k-x_{k-1}\|)^+ +\|(1-t)y_{k-1}+tx_k-x_{k-1}\|)-$$

$$\omega((\chi-\|x_{k-1}-x_0\|-\|(1-t)y_{k-1}+tx_k-x_{k-1}\|)^+))\|x_k-y_{k-1}\|dt.$$

Пользуясь предположением индукции, получим

$$\|(1-t)y_{k-1}+tx_k-x_{k-1}\|=\|y_{k-1}-x_{k-1}+t(x_k-y_{k-1})\|\le\|y_{k-1}-x_{k-1}\|+t\|x_k-y_{k-1}\|\le$$
$$s_{k-1}-t_{k-1}+t(t_k-s_{k-1})=(1-t)s_{k-1}+tt_k-t_{k-1},$$
откуда
$$\chi-\|x_{k-1}-x_0\|-\|(1-t)y_{k-1}+tx_k-x_{k-1}\|\ge\chi-t_{k-1}-((1-t)s_{k-1}+tt_k-t_{k-1})=$$
$$\chi-((1-t)s_{k-1}+tt_k)>0.$$

Следовательно, в силу вогнутости функции ω
$$\|f(x_k)\|\le\int_0^1(\omega(\chi-t_{k-1})-\omega(\chi-s_{k-1}-t(t_k-s_{k-1})))(t_k-s_{k-1})dt=$$
$$\omega(\chi-t_{k-1})(t_k-s_{k-1})-\int_0^1\omega(\chi-s_{k-1}-t(t_k-s_{k-1}))(t_k-s_{k-1})dt=$$
$$\omega(\chi-t_{k-1})(t_k-s_{k-1})+\int_{\chi-s_{k-1}}^{\chi-t_k}\omega(\theta)d\theta=\omega(\chi-t_{k-1})(t_k-s_{k-1})+\int_0^{\chi-t_k}\omega(\theta)d\theta-\int_0^{\chi-s_{k-1}}\omega(\theta)d\theta=$$
$$\omega(\chi-t_{k-1})(t_k-s_{k-1})+\Omega(\chi-t_k)-\Omega(\chi-s_{k-1}).$$

В силу определения последовательностей $\{t_k\}$ и $\{s_k\}$ для любого $k=0,1,\ldots$ имеет место равенство
$$(1-\omega(\chi)+\omega(\chi-t_k))(t_{k+1}-s_k)=a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-s_k)-s_k(1-\omega(\chi)),$$
откуда
$$a-\Omega(\chi)=-\Omega(\chi-s_k)+s_k(1-\omega(\chi))+(t_{k+1}-s_k)(1-\omega(\chi))+\omega(\chi-t_k)(t_{k+1}-s_k)=$$
$$\omega(\chi-t_k)(t_{k+1}-s_k)-\Omega(\chi-s_k)+t_{k+1}(1-\omega(\chi)).$$
Заменяя в последнем выражении k на $k-1$, получим
$$a-\Omega(\chi)=\omega(\chi-t_{k-1})(t_k-s_{k-1})-\Omega(\chi-s_{k-1})+t_k(1-\omega(\chi)).\tag{14}$$

С учетом равенства (14) оценка для $\|f(x_k)\|$ может быть переписана в виде
$$\|f(x_k)\|\le a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-t_k)-t_k(1-\omega(\chi)),$$
откуда
$$\|y_k-x_k\|\le\frac{a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-t_k)-t_k(1-\omega(\chi))}{1-[\omega(\chi)-\omega(\chi-t_k)]}=s_k-t_k.$$

Докажем оценку $\|x_{k+1}-y_k\|\le t_{k+1}-s_k$. Имеем
$$\|x_{k+1}-y_k\|=\|[f'(x_k)]^{-1}f(y_k)\|\le\|[f'(x_k)]^{-1}\|\,\|f(y_k)\|,$$
$$\|f(y_k)\|=\|f(y_k)-f(x_k)-f'(x_k)(y_k-x_k)\|\le\int_0^1\|f'((1-t)x_k+ty_k)-f'(x_k)\|\,\|y_k-x_k\|dt\le$$
$$\int_0^1(\omega((\chi-\|x_k-x_0\|-\|(1-t)x_k+ty_k-x_k\|)^++\|(1-t)x_k+ty_k-x_k\|)-$$
$$\omega((\chi-\|x_k-x_0\|-\|(1-t)x_k+ty_k-x_k\|)^+))\|y_k-x_k\|dt.$$

Поскольку $\|x_k-x_0\|\le t_k$ и при $0\le t\le 1$
$$\|(1-t)x_k+ty_k-x_k\|=\|x_k-tx_k+ty_k-x_k\|=t\|y_k-x_k\|\le t(s_k-t_k),$$
то
$$\chi-\|x_k-x_0\|-\|(1-t)x_k+ty_k-x_k\|\ge\chi-t_k-t(s_k-t_k)=\chi-((1-t)t_k+ts_k)>0,$$
и, следовательно,
$$\|f(y_k)\|\le\int_0^1(\omega(\chi-t_k)-\omega(\chi-t_k-t(s_k-t_k)))(s_k-t_k)dt=$$

$$\omega(\chi - t_k)(s_k - t_k) - \int_0^1 \omega(\chi - t_k - t(s_k - t_k))(s_k - t_k)dt =$$

$$\omega(\chi - t_k)(s_k - t_k) + \int_{\chi - t_k}^{\chi - s_k} \omega(\theta)d\theta = \omega(\chi - t_k)(s_k - t_k) + \int_0^{\chi - s_k} \omega(\theta)d\theta - \int_0^{\chi - t_k} \omega(\theta)d\theta =$$

$$\omega(\chi - t_k)(s_k - t_k) + \Omega(\chi - s_k) - \Omega(\chi - t_k).$$

В силу определения последовательностей $\{t_k\}$ и $\{s_k\}$ для любого $k = 0, 1, \ldots$ имеет место равенство

$$(1 - \omega(\chi) + \omega(\chi - t_k))(s_k - t_k) = a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_k) - t_k(1 - \omega(\chi)),$$

откуда

$$a - \Omega(\chi) = -\Omega(\chi - t_k) + t_k(1 - \omega(\chi)) + (s_k - t_k)(1 - \omega(\chi)) + \omega(\chi - t_k)(s_k - t_k)$$

или

$$a - \Omega(\chi) = \omega(\chi - t_k)(s_k - t_k) - \Omega(\chi - t_k) + s_k(1 - \omega(\chi)). \tag{15}$$

С учетом равенства (15) оценка для $\|f(y_k)\|$ может быть переписана в виде

$$\|f(y_k)\| \le a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - s_k) - s_k(1 - \omega(\chi)),$$

откуда

$$\|x_{k+1} - y_k\| \le \frac{a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - s_k) - s_k(1 - \omega(\chi))}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_k)]} = t_{k+1} - s_k.$$

Таким образом, оценки (12) и (13) имеют место и при $n = k$. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13М-036).

Литература

1. *Galperin A., Waksman Z.* // J. Comp. Appl. Math. 1991. Vol. 35. P. 207–215.
2. *Galperin A., Waksman Z.* // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1994. Vol. 15, N 7–8. P. 813–858.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.
4. *Забрейко П. П., Таныгина А. Н.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 8–12.
5. *Appel J., De Pascale E., Evkhuta N. A., Zabrejko P. P.* // Math. Nachr. 1995. Vol. 172. P. 5–14.

A. N. TANYHINA

anast-minsk@yandex.ru

TWO-STEP NEWTON–KANTOROVICH METHOD FOR APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS WITH REGULARLY SMOOTH OPERATORS

Summary

Two-step Newton–Kantorovich method for approximate solution of nonlinear equations with operators satisfying a modified condition of regular smoothness is considered. Using majorants, the convergence of this method is proved and estimates for the convergence rate are obtained.