Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 июль–август Том 58 № 4

УДК 517.548.5+519.652

Член-корреспондент Л. А. ЯНОВИЧ[1], *А. П. ХУДЯКОВ*[2]

ФОРМУЛЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ МАТРИЧНЫХ УЗЛОВ И ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ВХОДНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

[1]*Институт математики НАН Беларуси, Минск*
[2]*Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина*
Поступило 18.06.2014

Введение. Линейные формулы операторного интерполирования, по аналогии со случаем скалярных функций, используют обычно два узла интерполирования и соответственно имеют более простую структуру в сравнении с аналогичными формулами более высоких порядков [1; 2]. Однако для приложений важно, чтобы при приближенной замене нелинейного оператора линейным оператором интерполяционного типа совпадение значений этих операторов было по возможности в наибольшем числе различных точек. Это обычно позволяет увеличить точность приближения, что является одной из важных задач теории аппроксимации.

Другим классом интерполяционных формул, также полезных при решении практических задач, являются формулы, содержащие произвольные числовые величины или произвольные функции. Наличие в приближенных формулах произвольных параметров позволяет в каждом конкретном случае выбрать их с целью улучшения отдельных свойств численных алгоритмов, построенных на основе этого вида формул.

Работа посвящена построению интерполяционных формул такого класса. Для функций, заданных на множествах гладких матриц, получены интерполяционные матричные многочлены, содержащие произвольные матрицы, показана инвариантность построенных формул для отдельных классов матричных многочленов первой степени. Предложен способ построения на основе данного интерполяционного матричного многочлена фиксированной степени других интерполяционных многочленов той же степени, но с большим числом узлов.

Интерполяционные формулы, содержащие произвольные матрицы. Пусть $C^n(T)$ – пространство непрерывно дифференцируемых n раз на $T \subset \mathbb{R}$ матриц $A(t)$ и оператор $F(A): C^n(T) \to Y$, где Y – также некоторое множество матриц. Обозначим через $\mathcal{P}_1(A)$ матричный многочлен на $C^n(T)$ первой степени вида

$$\mathcal{P}_1(A) = C_0(t) + \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} C_{kj}(t) A^{(k)}(t_j) + \sum_{\nu=0}^{n}\int_T P_\nu(t,s) A^{(\nu)}(s)ds, \qquad (1)$$

где $P_\nu(t,s)$ – матрицы, для которых соответствующие интегралы в предыдущем равенстве существуют; $C_0(t)$ и $C_{kj}(t)$ – произвольные функциональные матрицы $(t, t_j, s \in T)$.

Введем обозначение

$$S_{nm}(H) = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} \left[A_1^{(k)}(t_i) - A_0^{(k)}(t_i) \right]^{-1} H^{(k)}(t_i),$$

где $t_0, t_1, \ldots, t_m$ – некоторые фиксированные точки отрезка T; $A_0(t)$, $A_1(t)$, $H(t) \in C^n(T)$. Через $F[A_0, A_1]H$ обозначим линейный по переменной H на $C^n(T)$ оператор вида

$$F[A_0, A_1]H = \left[F(A_1) - F(A_0)\right] S_{nm}(H) + \int_0^1 \delta F\left[G(\cdot,\tau); H(\cdot) - (A_1(\cdot) - A_0(\cdot)) S_{nm}(H)\right] d\tau, \qquad (2)$$

где $G(t,\tau)$ – произвольно заданная на $T \times [0,1]$ матрица такая, что интеграл в (2) существует, а $\delta F[A; H]$ – дифференциал Гато оператора F в точке A по направлению H.

Т е о р е м а 1. *Матричный многочлен*

$$L_1(A) = F(A_0) + F[A_0, A_1](A - A_0), \tag{3}$$

где оператор $F[A_0, A_1]$ *на пространстве* $C^n(T)$ *задается равенством (2), будет для* $F(A)$ *интерполяционным относительно узлов* $A_0(t)$ *и* $A_1(t)$ *многочленом первой степени. Формула (3) инвариантна для многочленов вида (1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интерполяционные условия $L_1(A_k) = F(A_k)$ $(k = 0,1)$ выполняются, так как $F[A_0, A_1](A_1 - A_0) = F(A_1) - F(A_0)$. Покажем, что формула (3) точна для линейных операторов $F(A)$ вида (1). Очевидно, что если $F(A) = C_0(t)$, то $L_1(A) = C_0(t)$. Пусть $F(A) = A^{(k)}(t_j)$ в фиксированной точке t_j или $F(A) = A^{(k)}(t)$, где t – произвольная точка отрезка T $(j = 0, 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, n)$. Тогда дифференциал Гато $\delta F[A; H]$ будет соответственно равен $\delta F[A; H] = H^{(k)}(t_j)$ или $\delta F[A; H] = H^{(k)}(t)$ по любому направлению $H(t) \in C^n(T)$.

Так как в нашем случае

$$H(t) = A(t) - A_0(t) - \left[A_1(t) - A_0(t)\right] S_{nm}(A - A_0),$$

причем матрица $S_{nm}(A - A_0)$ от переменной t не зависит, то для $F(A) = A^{(k)}(t_j)$ в силу структуры формулы (2) будем иметь

$$L_1(A) = A_0^{(k)}(t_j) + \left[A_1^{(k)}(t_j) - A_0^{(k)}(t_j)\right] S_{nm}(A - A_0) +$$

$$A^{(k)}(t_j) - A_0^{(k)}(t_j) - \left[A_1^{(k)}(t_j) - A_0^{(k)}(t_j)\right] S_{nm}(A - A_0) = A^{(k)}(t_j).$$

Аналогично доказывается этот факт и для $F(A) = A^{(k)}(t)$, где t – произвольная точка T. Из вышеизложенного следует справедливость теоремы 1.

Рассмотрим далее в качестве примера определенный на матричном пространстве $C^n(T)$ дифференциальный оператор вида

$$F(A) = f\left(t, A, A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right), \tag{4}$$

где $A^{(k)} = \dfrac{d^k}{dt^k} A(t)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, а $f(t, U_0, U_1, \dots, U_n)$ – функция числовой переменной t и матричных переменных $U_k = U_k(t)$ $(k = 0, 1, \dots, n)$. Для этого оператора дифференциал Гато $\delta F[A; H]$ в точке A по направлению H $(A, H \in C^n(T))$ задается равенством

$$\delta F[A; H] = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial A^{(k)}} f\left(t, A(t), A^{(1)}(t), \dots, A^{(n)}(t)\right) H^{(k)}(t), \tag{5}$$

и соответственно интерполяционный многочлен (3) для оператора (4) может быть записан в виде

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{F(A_1) - F(A_0)}{(m+1)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \left[A_1^{(k)}(t_i) - A_0^{(k)}(t_i)\right]^{-1} \left[A^{(k)}(t_i) - A_0^{(k)}(t_i)\right] +$$

$$\int_0^1 \delta F\left[G(\cdot, \tau); A(\cdot) - A_0(\cdot) - \frac{A_1(\cdot) - A_0(\cdot)}{(m+1)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \left[A_1^{(k)}(t_i) - A_0^{(k)}(t_i)\right]^{-1} \left[A^{(k)}(t_i) - A_0^{(k)}(t_i)\right]\right] d\tau, \tag{6}$$

где $A_0(t)$ и $A_1(t)$ – узлы интерполирования; t_i – фиксированные точки отрезка $T \subset \mathbb{R}$. В этой формуле дифференциал Гато $\delta F[A; H]$ имеет вид (5) и берется в точке $G(t, \tau)$, где матрица $G(t, \tau)$ для любого параметра $\tau \in [0, 1]$ принадлежит пространству $C^n(T)$ по направлению $H(t) = A(t) - A_0(t) - \left[A_1(t) - A_0(t)\right] S_{nm}(A - A_0)$. В частном случае при $n = 0$ на множестве непрерывных функций формула вида (6) получена в работе [3].

Построим аналогичную формулу для функций $F(A, B)$ двух матричных переменных $A(t) \in C^{n_1}(T)$ и $B(t) \in C^{n_2}(T)$ $(T \subset \mathbb{R})$. Как и раньше, пусть заданы на T фиксированные точки $t_0, t_1, \dots, t_m$. Через $S_{n_1 m}(A)$ и $S_{n_2 m}(B)$ обозначим соответственно суммы

$$S_{n_1 m}(A) = \frac{1}{(n_1+1)(m+1)} \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{i=0}^{m} \left(A_1^{(k)}(t_i) - A_0^{(k)}(t_i)\right)^{-1} \left(A^{(k)}(t_i) - A_0^{(k)}(t_i)\right), \tag{7}$$

$$S_{n_2m}(B)=\frac{1}{(n_2+1)(m+1)}\sum_{k=0}^{n_2}\sum_{i=0}^{m}\left(B_1^{(k)}(t_i)-B_0^{(k)}(t_i)\right)^{-1}\left(B^{(k)}(t_i)-B_0^{(k)}(t_i)\right), \tag{8}$$

где $\left(A_0(t),B_0(t)\right)$ и $\left(A_1(t),B_1(t)\right)$ – узлы интерполирования таковы, что обратные матрицы в (7) и (8) существуют для указанных здесь значений k и i. Введем также вектор $H(t)=\left(H_1(t),\ H_2(t)\right)$ с матричными координатами

$$H_1(t)=A(t)-A_0(t)-[A_1(t)-A_0(t)]S_{n_1m}(A),$$
$$H_2(t)=B(t)-B_0(t)-[B_1(t)-B_0(t)]S_{n_2m}(B).$$

Обозначим через $\mathcal{P}_1(A,B)$ заданный на $C^{n_1}(T)\times C^{n_2}(T)$ функциональный матричный многочлен вида

$$\mathcal{P}_1(A,B)=C_0(t)+\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{m}A_{kj}(t)A^{(k)}(t_j)+$$
$$\sum_{k=0}^{n_2}\sum_{j=0}^{m}B_{kj}(t)B^{(k)}(t_j)+\int_T\left[C_{\nu_1}(t,s)A^{(\nu_1)}(s)+C_{\nu_2}(t,s)B^{(\nu_2)}(s)\right]ds, \tag{9}$$

где $C_0(t), A_{kj}(t), B_{kj}(t), C_{\nu_1}(t,s), C_{\nu_2}(t,s)$ – произвольно заданные матрицы $(t,s\in T)$; ν_1 и ν_2 – неотрицательные целые числа ($0\le\nu_1\le n_1,\ 0\le\nu_2\le n_2$).

Т е о р е м а 2. *Оператор*

$$L_1(A,B)=F(A_0,B_0)+[F(A_1,B_1)-F(A_0,B_1)]S_{n_1m}(A)+$$
$$[F(A_0,B_1)-F(A_0,B_0)]S_{n_2m}(B)+\int_0^1\delta F[G_1(\cdot,\tau),G_2(\cdot,\tau);H(\cdot)]d\tau, \tag{10}$$

где матрицы $G_1(t,\tau)\in C^{n_1}(T),\ G_2(t,\tau)\in C^{n_2}(T)$ *для каждого числового параметра* $\tau\in[0,1]$, *будет интерполяционным матричным многочленом первой степени для* $F(A,B)$ *и узлов* $(A_0,B_0),\ (A_1,B_1)$. *Формула (10) инвариантна относительно матричных многочленов вида (9).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $S_{n_1m}(A_0)=S_{n_2m}(B_0)=0,\ S_{n_1m}(A_1)=S_{n_2m}(B_1)=I$, а вектор $H(t)\equiv 0$ в узлах интерполирования (A_0,B_0) и (A_1,B_1), то очевидно, что равенства $L_1(A_0,B_0)=F(A_0,B_0)$ и $L_1(A_1,B_1)=F(A_1,B_1)$ имеют место.

Покажем инвариантность формулы (10) относительно матричных многочленов вида (9). В тривиальном случае, когда $F(A,B)=C_0(t)$ это очевидно. Если $F(A,B)=A^{(\nu_1)}(t_j),\ F(A,B)=B^{(\nu_2)}(t_j)$, где t_j – фиксированная точка из T, или $F(A,B)=A^{(\nu_1)}(t),\ F(A,B)=B^{(\nu_2)}(t)$ в случае произвольной точки $t\in T$, дифференциал Гато $\delta F[A,B;H]$ этих операторов в любой точке $(A,B)\in C^{n_1}(T)\times C^{n_2}(T)$ по направлению $H(t)=\left(H_1(t),H_2(t)\right)$ задается соответственно равенствами $\delta F[A,B;H]=H_1^{(\nu_1)}(t_j)$, $\delta F[A,B;H]=H_2^{(\nu_2)}(t_j)$ или $\delta F[A,B;H]=H_1^{(\nu_1)}(t)$, $\delta F[A,B;H]=H_2^{(\nu_2)}(t)$.

Учитывая эти равенства и структуру вектора $H(t)$, легко проверяется точность формулы (10) для указанных выше линейных операторов. Например, если $F(A,B)=A^{(\nu_1)}(t)$, то третье слагаемое в (10) обращается в ноль, а интегральное слагаемое будет равно

$$A^{(\nu_1)}(t)-A_0^{(\nu_1)}(t)-\left[A_1^{(\nu_1)}(t)-A_0^{(\nu_1)}(t)\right]S_{n_1m}(A),$$

которое в сумме с первыми двумя слагаемыми равенства (10) дает $A^{(\nu)}(t)$.

Рассмотрим построение аналогичной формулы для случая функций от n матричных переменных. Пусть, как и раньше, $C^{n_k}=C^{n_k}(T)$ – множество матриц $A_k=A_k(t)$, непрерывно дифференцируемых n_k раз на отрезке $T\subset\mathbb{R}$, $X=C^{n_1}\times C^{n_2}\times\cdots\times C^{n_n}$ – декартово произведение этих множеств и оператор $F:X\to Y$, где Y – также некоторое множество матриц $B(t),\ t\in T\subset\mathbb{R}$. Будем предполагать, что функция от n матричных переменных $F(A)=F(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ дифференцируема по Гато на X, т. е. $\delta F[A;H]=\sum_{k=1}^{n}\delta_{A_k}F[A;H_k]$, где $H=(H_1,H_2,\ldots,H_n)\in X$,

$\delta_{A_k} F[A; H_k]$ – частный дифференциал Гато оператора F в точке $A=(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ по переменной A_k и направлению H_k $(A_k, H_k \in C^{n_k}(T),\ k=1,2,\ldots,n)$.

Введем далее ряд обозначений. Пусть заданы узлы интерполирования $\overline{A}_0(t)=\left(A_{1,0}(t), A_{2,0}(t), \ldots, A_{n,0}(t)\right)$, $\overline{A}_1(t)=\left(A_{1,1}(t), A_{2,1}(t), \ldots, A_{n,1}(t)\right)$ и известны также значения функции $F(\underline{A})$ в точках $\tilde{A}_k(t)=\left(A_{1,0}(t), A_{2,0}(t), \ldots, A_{k,0}(t), A_{k+1,1}(t), \ldots, A_{n,1}(t)\right)$ для $k=0,1,\ldots,n$, где $\tilde{A}_0(t)=\overline{A}_1(t)$, а $\tilde{A}_n(t)=\overline{A}_0(t)$.

Пусть

$$\sigma_{n_\nu m}(A_\nu)=\frac{1}{(n_\nu+1)(m+1)}\sum_{k=0}^{n_\nu}\sum_{i=0}^{m}\left(A_\nu^{(k)}(t_i)-A_{\nu,0}^{(k)}(t_i)\right)\left(A_{\nu,1}^{(k)}(t_i)-A_{\nu,0}^{(k)}(t_i)\right)^{-1},$$

где t_i – фиксированные точки из T, и вектор $H(t)=\left(H_1(t), H_2(t), \ldots, H_n(t)\right)$ с координатами $H_k(t)=A_k(t)-A_{k,0}(t)-[A_{k,1}(t)-A_{k,0}(t)]\sigma_{n_k m}(A_k)$ $(k=1,2,\ldots,n)$.

Пусть $\mathcal{P}_1(A)$ – матричный многочлен на X вида

$$\mathcal{P}_1(A)=B_0(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n_k}\sum_{j=0}^{m}B_{ikj}(t)A_i^{(k)}(t_j)+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{n_k}\int_T C_{\nu k}(t,s)A_\nu^{(k)}(s)ds, \tag{11}$$

где $B_0(t), B_{ikj}(t)$ – произвольно заданные матрицы; $C_{\nu k}(t,s)$ – матрицы, для которых существуют интегралы в (11), а $A_\nu^{(k)}(s)$ – k-ая производная ν-й компоненты вектора $A(s)=\left(A_1(s), A_2(s), \ldots, A_n(s)\right)$; n_k – любое фиксированное неотрицательное целое число, $t, s, t_0, t_1, \ldots, t_m \in T$.

Т е о р е м а 3. *Для функционального матричного многочлена*

$$L_1(A)=F(\overline{A}_0)+\sum_{\nu=1}^{n}\left[F(\tilde{A}_{\nu-1})-F(\tilde{A}_\nu)\right]\sigma_{n_\nu m}(A_\nu)+\int_0^1\delta F\left[G(\cdot,\tau); H(\cdot)\right]d\tau, \tag{12}$$

где $G(t,\tau)=\left(G_1(t,\tau), G_2(t,\tau), \ldots, G_n(t,\tau)\right)$ – заданный на $T\times[0,1]$ любой матричный вектор, для которого интеграл в (12) существует; A_ν – ν-я компонента вектора $A(t)$, выполняются интерполяционные условия $L_1(\overline{A}_0)=F(\overline{A}_0)$, $L_1(\overline{A}_1)=F(\overline{A}_1)$. Формула (12) точна для матричных многочленов вида (11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеют место следующие равенства: $\sigma_{n_\nu m}(A_{\nu,0})=0$, $\sigma_{n_\nu m}(A_{\nu,1})=I$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$. Кроме того, вектор $H(t)\equiv 0$ в узлах $\overline{A}_0$ и $\overline{A}_1$. Из этого следует, что $L_1(\overline{A}_0)=F(\overline{A}_0)$ и $L_1(\overline{A}_1)=F(\overline{A}_1)$.

Если $F(A)=A_i^{(k)}(t_j)$ $(j=0,1,\ldots,m;\ k=0,1,\ldots,n_i;\ i=1,2,\ldots,n)$, то $\delta F[A;H]=H_i^{(k)}(t_j)$. Учитывая структуру компонент вектора $H(t)$, получим

$$H_i^{(k)}(t_j)=A_i^{(k)}(t_j)-A_{i,0}^{(k)}(t_j)-\left[A_{i,1}^{(k)}(t_j)-A_{i,0}^{(k)}(t_j)\right]\sigma_{n_i m}(A_i). \tag{13}$$

Далее

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{n}[F(\tilde{A}_{\nu-1})-F(\tilde{A}_\nu)]\sigma_{n_\nu m}(A_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n}\Big[F\left(A_{1,0}(t), A_{2,0}(t), \ldots, A_{\nu-1,0}(t), A_{\nu,1}(t), \ldots, A_{n,1}(t)\right)-\\
&\qquad F\left(A_{1,0}(t), A_{2,0}(t), \ldots, A_{\nu,0}(t), A_{\nu+1,1}(t), \ldots, A_{n,1}(t)\right)\Big]\sigma_{n_\nu m}(A_\nu)=\\
&\qquad \sum_{\nu=1}^{i-1}\left[A_{i,1}^{(k)}(t_j)-A_{i,1}^{(k)}(t_j)\right]\sigma_{n_\nu m}(A_\nu)+\left[A_{i,1}^{(k)}(t_j)-A_{i,0}^{(k)}(t_j)\right]\sigma_{n_i m}(A_i)+\\
&\qquad \sum_{\nu=i+1}^{n}\left[A_{i,0}^{(k)}(t_j)-A_{i,0}^{(k)}(t_j)\right]\sigma_{n_\nu m}(A_\nu)=\left[A_{i,1}^{(k)}(t_j)-A_{i,0}^{(k)}(t_j)\right]\sigma_{n_i m}(A_i).
\end{aligned} \tag{14}$$

Тогда из соотношений (12)–(14) следует, что $L_1(A)=A_i^{(k)}(t_j)$.

Аналогично доказывается это равенство и для $F(A)=A_\nu^{(k)}(s)$ $(k=0,1,\ldots,n_\nu;\ \nu=1,2,\ldots,n)$ и s – произвольная точка из T. Таким образом, формула (12) точна для многочленов вида (11).

Формулы с произвольным числом узлов. Один из подходов построения на основе известных интерполяционных матричных многочленов фиксированной степени других интерполяционных многочленов той же степени, но с большим числом узлов, предлагается в приведенной далее теореме 4.

В этом пункте рассмотрим интерполирование операторов $F : X \to Y$ от одной матричной переменной $A \in X$, где X и Y – некоторые заданные множества матриц. Начнем с общего случая.

Т е о р е м а 4. *Пусть $L_k(F; A)$ – интерполяционный операторный многочлен степени k с узлами $A_0, A_1, \ldots, A_k$. Тогда для матричного многочлена той же степени*

$$\tilde{L}_k(F; A) = L_k(F; A) + \sum_{\nu=k+1}^{n} r_k(A_\nu) < \varphi_\nu, A >, \tag{15}$$

где $r_k(A) = F(A) - L_k(F; A)$, а φ_ν – линейный на X оператор такой, что $< \varphi_\nu, A_i >= \delta_{\nu i} I$, I – единичная матрица, $\delta_{\nu i}$ – символ Кронекера $(k+1 \le \nu \le n,\ 0 \le i \le n)$ будут выполняться интерполяционные условия $\tilde{L}_k(F; A_i) = F(A_i)$ для $i = 0, 1, \ldots, n$. Если интерполяционный многочлен $L_k(F; A)$ точен для какого-либо оператора F, то и многочлен $\tilde{L}_k(F; A)$ также будет точным и для этого оператора.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Совпадение $\tilde{L}_k(F; A)$ с $F(A)$ при $A = A_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ имеет место, так как матричный многочлен $L_k(F; A)$ является интерполяционным для F относительно этих узлов, а по условию теоремы $< \varphi_\nu, A_i > = 0$ для $k+1 \le \nu \le n$ и $0 \le i \le k$.

Интерполяционные условия в узлах A_i для $k+1 \le i \le n$ также выполняются в силу равенств $< \varphi_\nu, A_i > = \delta_{\nu i} I$ при $\nu = k+1, k+2, \ldots, n$ и структуры операторов $r_k(A)$.

Утверждение теоремы о точности формулы (15) справедливо в силу того, что при условии точности для всех $A \in X$ интерполяционного многочлена $L_k(F; A)$ для оператора F значения $r_k(A_\nu) = 0$, так как узлы интерполирования A_ν так же берутся из множества X.

Приведем несколько примеров интерполяционных формул вида (15). Рассмотрим случай линейной интерполяции в пространстве непрерывных матриц. Пусть $X = C[a, b]$, $F[A_0, A_1]H = \int_0^1 \delta F\left[A_0 + \tau(A_1 - A_0); H\right] d\tau$, где $A_0 = A_0(t)$, $A_1 = A_1(t)$ и $H = H(t)$ – непрерывные на $[a, b]$ матрицы. Если в функциональном матричном многочлене

$$L_{n1}(F; A) = F(A_0) + F[A_0, A_1](A - A_0) + \sum_{\nu=2}^{n} r(A_\nu) \int_a^b p(\tau) A_\nu(\tau) A(\tau) d\tau,$$

где $r(A) = F(A) - F(A_0) - F[A_0, A_1](A - A_0)$, а $p(\tau)$ – некоторая заданная на $[a, b]$ неотрицательная функция или матрица, A_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ таковы, что $\int_a^b p(\tau) A_\nu(\tau) A_k(\tau) d\tau = \delta_{k\nu} I$ $(k, \nu = 0, 1, \ldots, n)$, тогда будут выполняться интерполяционные условия $L_{n1}(A_k) = F(A_k)$ для $k = 0, 1, \ldots, n$.

Пусть $\{\mathcal{P}_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормальная на $[a, b]$ относительно весовой функции $p(t) \ge 0$ система алгебраических многочленов. В качестве узлов интерполирования выберем следующие матрицы: $A_0(t) = [a_{ij}^0(t)]$ и $A_1(t) = [a_{ij}^1(t)]$, элементы которых $a_{ij}^0(t)$ и $a_{ij}^1(t)$ – алгебраические многочлены не выше некоторой фиксированной степени m; матрицы $A_\nu(t) = [a_{ij}^\nu(t)]$ $(2 \le \nu \le n)$ имеют следующую структуру: $a_{ii}^\nu(t) = \mathcal{P}_{m+\nu-1}(t)$, а $a_{ij}^\nu(t)$ для $i \ne j$ – алгебраические многочлены степени не выше $m-1$.

Тогда для матричного многочлена

$$L_{n2}(F; A) = F(A_0) + F[A_0, A_1](A - A_0) + \sum_{\nu=2}^{n} r(A_\nu) \int_a^b p(\tau) \mathcal{P}_{m+\nu-1}(\tau) A(\tau) d\tau$$

будут выполняться равенства $L_{n2}(F, A_i) = F(A_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Приведем еще одну формулу линейной интерполяции с числом узлов больше двух. Пусть $X = C[0, 2\pi]$ – пространство функциональных непрерывных на $[0, 2\pi]$ и 2π-периодических матриц $A(t)$ и оператор $F : C[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ или $F : C[0, 2\pi] \to C[0, 2\pi]$.

Будем считать, что элементами $a_{ij}^0(t)$ и $a_{ij}^1(t)$ матриц $A_0(t)$ и $A_1(t)$ являются тригонометрические многочлены степеней не выше m, а узлы интерполирования $A_\nu(t)$ для $\nu = 2, 3, \ldots, n$ имеют элементы следующего вида: диагональные элементы $a_{ii}^\nu(t) = a_\nu \cos m_\nu t + b_\nu \sin m_\nu t$, где a_ν и b_ν – любые, а m_ν – целые числа такие, что $a_\nu + b_\nu \ne 0$ и $m < m_2 < m_3 < \ldots < m_n$.

Обозначим через $L_1(A)$ матричный тригонометрический многочлен

$$L_1(A) = F(A_0) + \int_0^1 \delta F\left[A_0(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - A_0(\cdot)); A(\cdot) - A_0(\cdot)\right] d\tau. \tag{16}$$

Тогда соответственно многочлен

$$L_{n1}(F; A) = L_1(A) + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{a_\nu + b_\nu}\left[F(A_\nu) - L_1(A_\nu)\right]\int_0^{2\pi}\left[a_\nu \cos m_\nu t + b_\nu \sin m_\nu t\right] A(t)dt \tag{17}$$

будет интерполяционным для оператора $F(A)$ и узлов A_ν для $\nu = 0, 1, \ldots, n.$

Пусть $F(A) = \left[A'(t)\right]^2 = \left[\frac{d}{dt}A(t)\right]^2$, $A(t + 2\pi) = A(t)$, и узлы $A_\nu(t)$ такой же структуры как и в формуле (17). Тогда $\delta F[A; H] = A'(t)H'(t) + H'(t)A'(t)$ и для данной функции $F(A)$ и $H(t) = A(t) - A_0(t)$ формула (16) примет вид

$$L_1(A) = \frac{1}{2}\left[(A_1'(t) + A_0'(t))A'(t) + A'(t)(A_1'(t) + A_0'(t)) - A_0'(t)A_1'(t) - A_1'(t)A_0'(t)\right]. \tag{18}$$

Обозначив через $r_1(A) = \left[A'(t)\right]^2 - L_1(A)$, где $L_1(A)$ задается формулой (18), или несколько в другом виде

$$r_1(A) = \frac{1}{2}[(A'(t) - A_0'(t) - A_1'(t))A'(t) + A'(t)(A'(t) - A_0'(t) - A_1'(t)) + A_0'(t)A_1'(t) + A_1'(t)A_0'(t)],$$

получим, что формула (17) примет вид

$$L_{n1}(A) = L_1(A) + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{r_1(A_\nu)}{a_\nu + b_\nu}\int_0^{2\pi}[a_\nu \cos m_\nu t + b_\nu \sin m_\nu t] A(t)dt,$$

для которой выполняются интерполяционные равенства $L_{n1}(A_\nu) = [A_\nu']^2$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Аналогичные формулы на множествах скалярных функций получены в [4–6].

Литература

1. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. Киев, 2000.
2. *Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A.* Methods of operator interpolation. Kyiv, 2010.
3. *Манюк Е. М., Янович Л. А.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 4. С. 10–15.
4. *Yanovich L. A., Ignatenko M. V.* // J. of Numerical and Applied Mathematics. 2010. N 1 (100). P. 117–129.
5. *Игнатенко М. В., Янович Л. А.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 5–11.
6. *Янович Л. А., Худяков А. П.* // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 4. С. 5–10.

L. A. YANOVICH, A. P. HUDYAKOV

yanovich@im.bas-net.by;hudand1985@mail.ru

INTERPOLATION FORMULAS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF MATRIX NODES AND ARBITRARY INPUT PARAMETERS

Summary

The interpolation formulas for operators of one, two and many functional matrix variables containing arbitrary matrices are constructed. The classes of matrix polynomials, for which interpolation formulas are exact, are defined. The method of construction based on a given fixed degree interpolation matrix polynomial of other interpolation polynomials of the same degree, but with more number of nodes is proposed.