Доклады Национальной академии наук Беларуси
2014 июль–август Том 58 № 4

УДК 517.925

М. С. БЕЛОКУРСКИЙ[1], *А. К. ДЕМЕНЧУК*[2]

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЕРУГИНА О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕУГОЛЬНЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Институт математики НАН Беларуси, Минск*
Поступило 30.06.2014

Как известно, периодическая дифференциальная система при определенных условиях может иметь периодические решения, период которых несоизмерим с периодом самой системы [1–6 и др.]. Такие периодические решения присущи достаточно широким классам дифференциальных систем и названы сильно нерегулярными. Отметим также, что в ряде прикладных задач по преобразованию энергии источника высокочастотных колебаний в низкочастотные, колебательные процессы реализуются на собственной частоте колебаний системы, в общем случае несоизмеримой с частотой внешней силы [7].

В [3, § 36] Н. П. Еругин рассматривал линейную систему вида

$$\dot{x} = (AP(t) + B)x, \quad t \in R, \quad x \in R^n, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

где A, B – постоянные $(n \times n)$-матрицы; $P(t)$ – непрерывная ω-периодическая $(n \times n)$-матрица. В системе (1) матрицы A и $P(t)$ будем называть стационарным и периодическим коэффициентами соответственно. Для системы (1) с диагональным периодическим коэффициентом $P(t)$ Н. П. Еругиным изучены вопросы существования сильно нерегулярных периодических решений, при этом, в частности, было доказано, что если матрица A невырожденная, то искомые решения у системы (1) отсутствуют. Случай не диагональной матрицы $P(t)$ остался не изученным.

Следует отметить, что системы вида (1) рассматриваются при решении задач управления асимптотическими инвариантами, в том числе показателями Ляпунова, стационарных управляемых систем при помощи периодических управлений [8; 9], а также задач стабилизации линейных систем управления периодической обратной связью, включая проблему Брокетта [10; 11].

В настоящей работе выясним вопросы существования сильно нерегулярных периодических решений системы (1) с верхним треугольным периодическим коэффициентом

$$p_{ij}(t) \equiv 0, \quad i < j \quad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где $p_{ij}(t)$ – элементы матрицы $P(t)$.

1. Вначале рассмотрим случай, когда стационарный коэффициент является невырожденным, т. е.

$$\det A \neq 0. \tag{3}$$

Покажем, что это условие, по меньшей мере, уже не является достаточным для отсутствия сильно нерегулярных периодических решений у системы (1) с треугольным периодическим коэффициентом (2), в отличие от рассмотренного в [3, § 36] случая системы (1) с диагональным коэффициентом.

Пусть $x(t)$ – Ω-периодическое решение системы (1), при этом считаем, что хотя бы одна из его компонент отлична от стационарной, а отношение ω / Ω является иррациональным числом. Тогда в силу [5] вектор $x(t)$ удовлетворяет системе

$$\dot{x} = (A\widehat{P} + B)x, \quad (AP(t) - A\widehat{P})x = 0,$$

где $\widehat{P} = \dfrac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} P(\tau)d\tau$ – среднее значение ω-периодического коэффициента. В силу условия (3) последняя система примет вид

$$\dot{x} = (A\widehat{P} + B)x, \quad \tilde{P}(t)x = 0, \quad \tilde{P}(t) = P(t) - \widehat{P}. \tag{4}$$

Если столбцы матрицы $\tilde{P}(t)$ линейно независимы, то из второй системы в (4) следует тривиальность $x(t)$, что противоречит сделанному допущению. Значит, матрица $\tilde{P}(t)$ имеет неполный столбцовый ранг

$$\operatorname{rank}_{\text{col}} \tilde{P} = r < n. \tag{5}$$

В силу исходного допущения о треугольности периодического коэффициента условие (5) означает, по меньшей мере, что среди диагональных элементов $p_{ii}(t)$ имеются постоянные.

При выполнении условия (5) найдется постоянная неособенная $(n \times n)$-матрица Q такая, что у матрицы $\tilde{P}(t)Q$ первые $d = n - r$ столбцов будут нулевыми, в то время как остальные r столбцов будут линейно независимыми. Введем замену переменных

$$x = Qy, \tag{6}$$

которая приводит систему (4) к системе

$$\dot{y} = Fy, \quad \tilde{P}_1(t)y = 0 \quad (F = Q^{-1}(A\widehat{P} + B)Q,\ \tilde{P}_1(t) = \tilde{P}(t)Q). \tag{7}$$

Эта система имеет сильно нерегулярное периодическое решение $y(t) = Q^{-1}x(t)$. Так как у матрицы $\tilde{P}_1(t)$ первые d столбцов нулевые, а остальные r столбцов линейно независимы, то из второй системы в (7) следует, что последние r компонент вектора $y(t)$ будут тривиальными, т. е. $y(t) = \operatorname{col}(y^{[d]}(t), y_{[r]}(t))$, $y^{[d]}(t) = \operatorname{col}(y_1(t),\ldots,y_d(t))$, $y_{[r]}(t) = \operatorname{col}(y_{d+1}(t),\ldots,y_n(t)) \equiv 0$. Это означает, что система (7) имеет следующую структуру:

$$\dot{y}^{[d]} = F_{d,d}y^{[d]}, \quad F_{r,d}y^{[d]} = 0, \quad y_{[r]} = 0, \tag{8}$$

где $F_{d,d}, F_{r,d}$ – левые верхний и нижний блоки матрицы F (нижние индексы указывают размерность). Как видно из (8), Ω-периодический вектор $y^{[d]}(t)$ является решением линейной стационарной системы. Поэтому среди собственных значений матрицы коэффициентов $F_{d,d}$ будут числа

$$\pm i\lambda_j \quad (j = 1,\ldots,d';\ d' \le [d/2]), \tag{9}$$

где $\lambda_j = 2k_j\pi/\Omega$, $k_j \in N$. Пусть l_j – число групп элементарных делителей, отвечающих собственному значению $\pm i\lambda_j$ $(j = 1,\ldots,d';\ l_1 + \ldots + l_{d'} = l)$. Это означает, что $y^{[d]}(t)$ представлен тригонометрическим полиномом вида

$$y^{[d]}(t) = \sum_{j=1}^{d'} a_j \cos\lambda_j t + b_j \sin\lambda_j t, \tag{10}$$

где коэффициенты a_j, b_j зависят от $2l$ произвольных вещественных постоянных. Поскольку $y^{[d]}(t)$ удовлетворяет и второй системе в (8), то имеет место тождество

$$F_{r,d}\sum_{j=1}^{d'} a_j \cos\lambda_j t + b_j \sin\lambda_j t \equiv 0. \tag{11}$$

Итак, если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x(t)$, то выполняются условия (5), (9), (11), при этом

$$x(t) = Q\operatorname{col}(y^{[d]}(t), 0,\ldots,0), \tag{12}$$

где вектор $y^{[d]}(t)$ определяется равенством (10).

Покажем, что полученные условия являются достаточными. Обратимся к системе (4). В силу условия (5) найдется постоянная неособенная $(r \times r)$-матрица Q такая, что замена переменных (6) приводит (4) к системе (7), где у матрицы $\tilde{P}_1(t)$ первые d столбцов нулевые, а остальные r столбцов линейно независимы. Последнее обстоятельство означает, что $y = \operatorname{col}(y^{[d]}, 0, \ldots, 0)$, $y^{[d]} = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_d)$. С учетом этого система (7) примет вид (8). Поскольку чисто мнимые числа (9) будут собственными значениями матрицы $F_{d,d}$, то первая система в (8) имеет $2l$-параметрическое семейство Ω-периодических решений (10). Так как выполняется тождество (11), то система (8) имеет решение $y(t) = \operatorname{col}(y^{[d]}(t), 0, \ldots, 0)$. Возвращаясь к исходным переменным находим Ω-периодическое решение системы (4) в виде тригонометрического многочлена (12). Заметим, что вектор $x(t)$ удовлетворяет также системе $A(P(t) - \widehat{P})x = 0$, а это в силу [5] означает, что (12) является сильно нерегулярным решением системы (1).

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 1. *Пусть в системе (1) стационарный коэффициент A невырожден, а периодический коэффициент $P(t)$ является верхним треугольным.*

Если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет тригонометрическим многочленом вида (12). Для того чтобы (12) было решением системы (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (5), (9), (11).

С л е д с т в и е 1. *Если все диагональные элементы периодического верхнего треугольного коэффициента отличны от стационарных, то система (1) не имеет сильно нерегулярных периодических решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное, т. е. $p_{ij}(t) \neq \text{const}, \quad i = j \quad (i, j = 1, \ldots, n)$, и система (1) имеет нетривиальное сильно нерегулярное периодическое решение $x(t)$. Согласно [5] выполняется тождество $\left(P(t) - \widehat{P}\right)x(t) \equiv 0$, откуда в силу треугольности периодического коэффициента получаем

$$
\begin{aligned}
&(p_{nn}(t) - \widehat{p}_{nn})x_n(t) \equiv 0, \\
&(p_{n-1\,n-1}(t) - \widehat{p}_{n-1\,n-1})x_{n-1}(t) + (p_{n-1\,n}(t) - \widehat{p}_{n-1\,n})x_n(t) \equiv 0, \\
&\ldots \\
&(p_{11}(t) - \widehat{p}_{11})x_1(t) + \ldots + (p_{1n}(t) - \widehat{p}_{1n})x_n(t) \equiv 0.
\end{aligned}
$$

Так как элемент $p_{nn}(t)$ отличен от постоянного, то найдутся такие t, при которых $p_{nn}(t) - \widehat{p} \neq 0$. В силу несоизмеримости периодов функций $p_{nn}(t) - \widehat{p}_{nn}$ и $x_n(t)$ из первого среди приведенных тождеств следует, что $x_n(t) \equiv 0$. Тогда второе тождество примет вид $(p_{n-1\,n-1}(t) - \widehat{p}_{n-1\,n-1})x_{n-1}(t) \equiv 0$, откуда в силу нестационарности $p_{n-1\,n-1}(t)$ имеем $x_{n-1}(t) \equiv 0$. Продолжая таким образом, получим $x_n(t) = \ldots = x_1(t) \equiv 0$, что противоречит допущению о нетривиальности сильно нерегулярного периодического решения $x(t)$.

2. Рассмотрим теперь случай вырожденного стационарного коэффициента

$$\operatorname{rank} A = r < n. \tag{13}$$

Выясним условия существования сильно нерегулярных периодических решений системы (1), где, как и выше, предполагается треугольность периодического коэффициента, т. е. выполнение условия (2).

Пусть $x(t) = \operatorname{col}(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ – отличное от постоянного искомое Ω-периодическое решение системы (1). Согласно [5] вектор $x(t)$ удовлетворяет системе

$$A\tilde{P}(t)x = 0. \tag{14}$$

В силу (13) найдется постоянная неособенная $(n \times n)$-матрица S такая, что последняя система приводится к виду $C\tilde{P}(t)x = 0$, где матрица

$$C = SA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{21} & \dots & c_{21} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & c_{rr} & \dots & c_{r1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим трапециевидную $(r \times n)$-матрицу, образованную первыми r строками матрицы C, через C_1, при этом $\operatorname{rank} C_1 = r.$ Тогда последняя система примет вид

$$C_1 \tilde{P}(t)x = \tilde{P}_1(t)x = 0. \tag{15}$$

В силу сделанных допущений матрица $\tilde{P}_1(t)$ также как и C_1 является трапециевидной, т. е.

$$\tilde{P}_1(t) = \begin{pmatrix} \tilde{p}_{11}^{(1)}(t) & \tilde{p}_{12}^{(1)}(t) & \tilde{p}_{13}^{(1)}(t) & \dots & \tilde{p}_{1n}^{(1)}(t) \\ 0 & \tilde{p}_{22}^{(1)}(t) & \tilde{p}_{23}^{(1)}(t) & \dots & \tilde{p}_{2n}^{(1)}(t) \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \tilde{p}_{rr}^{(1)}(t) & \dots & \tilde{p}_{rn}^{(1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\tilde{P}_1^{(1)}(t),\ \dots,\tilde{P}_1^{(n)}(t)$ – столбцы матрицы $\tilde{P}_1(t).$ Так как система (15) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x(t),$ то из [6, с. 41] вытекает, что она имеет k линейно независимых стационарных решений $(0 < k < n).$ Последнее означает линейную зависимость вектор-функций $\tilde{P}_1^{(1)}(t),\ \dots,\tilde{P}_1^{(n)}(t),$ т.е. найдутся k постоянных линейно независимых векторов $\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(k)},$ таких, что выполняются тождества

$$(\alpha^{(j)}, \tilde{P}^{(j)}(t)) \equiv 0 \quad (j = 1,\dots,k).$$

Тогда у системы (15) будет k линейно независимых сильно нерегулярных периодических решений вида $x^{(j)}(t) = \alpha^{(j)}\varphi_j(t),$ где $\varphi_1(t),\dots,\varphi_k(t)$ – некоторые Ω-периодические функции. Обозначим через Λ и $X(t)$ $(n \times k)$-матрицы, столбцами которых являются соответственно векторы $\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(k)}$ и $x^{(1)}(t),\dots,x^{(k)}(t).$ Запишем последние равенства в матричном виде $X(t) = \Lambda\Phi,$ где Φ – диагональная матрица с функциями $\varphi_1(t),\dots,\varphi_k(t)$ на главной диагонали. В силу линейной независимости векторов $\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(k)}$ у матрицы Λ найдется минор порядка $k,$ отличный от нуля. Пусть этот минор расположен в строках с номерами $i_1,\dots,i_k$ (в порядке возрастания), Λ_1 – соответствующая ему матрица и Λ_2 – $(n-k)\times k$-матрица, составленная из оставшихся строк Λ. Тогда полученное матричное равенство распадается на $X'(t) = \Lambda_1\Phi,\quad X''(t) = \Lambda_2\Phi,$ где $X'(t)$ – матрица, образованная строками с номерами $i_1,\dots,i_k$ матрицы $X(t),$ а $X''(t)$ – остальными ее строками. В силу невырожденности Λ_1 из последних двух равенств получаем $X''(t) = \Lambda_2\Lambda_1^{-1}X'(t).$

Таким образом, между компонентами сильно нерегулярного периодического решения $x(t)$ системы (15) имеется следующая зависимость

$$x'' = \Lambda_2\Lambda_1^{-1}x', \tag{16}$$

где $x' = \operatorname{col}(x_{i_1},\dots,x_{i_k}),$ а вектор x'' состоит из остальных компонент вектора $x,$ т. е. $x'' = \operatorname{col}(x_{i_{k+1}},\dots,x_{i_n}).$

Образуем матрицы A' и A'' из строк матрицы A с номерами соответственно $i_1,\dots,i_k$ и $i_{k+1},\dots,i_n;$ $\widehat{P'}$ и $\widehat{P^n}$ из столбцов матрицы $\widehat{P}$ с номерами $i_1,\dots,i_k$ и $i_{k+1},\dots,i_n;$ B' и B'' из столбцов матрицы B с номерами $i_1,\dots,i_k$ и $i_{k+1},\dots,i_n.$ С учетом принятых обозначений из результатов работы [5] вытекает, что вектор $x(t)$ удовлетворяет также системе

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{x}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'\widehat{P}' + B_1' & A'\widehat{P}'' + B_1' \\ A''\widehat{P}' + B_2' & A''\widehat{P}'' + B_2'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix},$$

где блоки B_1' и B_1'' образованы первыми k строками матриц B' и B'', а блоки B_2' и B_2'' – оставшимися n-k этих матриц. Принимая во внимание (16) запишем последнюю систему в виде

$$\begin{gathered} \dot{x}' = (A'\widehat{P}' + B_1' + (A'\widehat{P}'' + B_1'')\Lambda_2\Lambda_1^{-1})x', \\ \Lambda_2\Lambda_1^{-1}\dot{x}' = (A''\widehat{P}' + B_2' + (A''\widehat{P}'' + B_2'')\Lambda_2\Lambda_1^{-1})x', \quad x'' = \Lambda_2\Lambda_1^{-1}x'. \end{gathered} \tag{17}$$

Поскольку система (17) является стационарной и имеет периодическое решение $x'(t), \quad x''(t)$, причем компоненты вектора $x''(t)$ линейно выражаются через $x'(t)$, то у матрицы коэффициентов $H = A'\widehat{P}' + B_1' + (A'\widehat{P}'' + B_1'')\Lambda_2\Lambda_1^{-1}$ имеются чисто мнимые собственные числа

$$\pm i\lambda_s \ \ (s = 1, \dots, k'; \ 1 \le k' \le [k/2]), \tag{18}$$

где $\lambda_s = 2k_s\pi/\Omega, \ \ k_s \in N$. Пусть p_s – число групп элементарных делителей, отвечающих собственному значению $\pm i\lambda_s$ $(s = 1, \dots, k'; \ p_1 + \dots + p_{k'} = p)$. Это означает, что $x'(t)$ представлен тригонометрическим полиномом вида

$$x'(t) = \sum_{s=1}^{k'} \alpha_s \cos\lambda_s t + \beta_s \sin\lambda_s t, \tag{19}$$

где коэффициенты α_j, β_j зависят от $2p$ произвольных вещественных постоянных. Вектор $x'(t)$ удовлетворяет также и второй системе в (17). Поэтому справедливо тождество

$$(\Lambda_2\Lambda_1^{-1}(A'P' + B_1' + (A'P'' + B_1'')\Lambda_2\Lambda_1^{-1}) - A''P' - B_2' - (A''P'' + B_2'')\Lambda_2\Lambda_1^{-1})x'(t) \equiv 0, \tag{20}$$

где $x'(t)$ определяется (19).

Таким образом, если в вырожденном случае (13) система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x(t)$, то система (15) имеет $0 < k < n$ линейно независимых стационарных решений и выполняются условия (18), (20), при этом

$$x(t) = \mathrm{ord}\{x_{i_1}(t), \dots, \ x_{i_k}(t), x_{i_{k+1}}(t), \dots, x_{i_n}(t)\} = \mathrm{ord}\{\mathrm{col}\,(x'(t), x''(t))\}, \tag{21}$$

где $\mathrm{ord}\{\cdot\}$ означает упорядочение компонент вектора $\{\cdot\}$ в порядке возрастания их индексов, вектор $\mathrm{col}(x_{i_1}(t), \dots, \ x_{i_k}(t)) = x'(t)$ определяется равенством (19), а $\mathrm{col}(x_{i_{k+1}}(t), \dots, \ x_{i_n}(t)) = x''(t) = \Lambda_2\Lambda_1^{-1}x'(t)$.

Докажем достаточность полученных условий. Система (14) при помощи элементарных преобразований приводится к системе (15). Если система (15) имеет k линейно независимых стационарных решений, то из [6, с. 41] вытекает, что она имеет и сильно нерегулярное периодическое решение, причем, как показано выше, компоненты этого решения связаны соотношением вида (16). Значит, между компонентами решения системы (14) существует зависимость (16).

Подставляя (16) в систему

$$\dot{x} = (A\widehat{P} + B)x\,, \tag{22}$$

получим систему вида (17). Так как матрица коэффициентов H первой системы из (17) имеет чисто мнимые собственные числа (18), то эта система имеет периодическое решение (19), период которого Ω, несоизмерим с ω. При выполнении тождества (20) вектор $\mathrm{col}\,(x'(t), x''(t)), \quad x''(t) = \Lambda_2\Lambda_1^{-1}x'(t)$ является решением всей системы (17). Тогда вектор $x(t) = \mathrm{ord}\,\{\mathrm{col}\,(x'(t), x''(t))\}$, образованный компонентами векторов $x'(t)$ и $x''(t)$, будет удовлетворять системам (14) и (22), откуда следует, что $x(t)$ – сильно нерегулярное периодическое решение системы (1).

Итак, доказана

Т е о р е м а 2. *Пусть в системе (1) стационарный коэффициент A вырожден и его ранг равен r, а периодический коэффициент* $P(t)$ *является верхним треугольным.*

Если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет тригонометрическим многочленом вида (19), (21).

Для того чтобы вектор (21) был решением системы (1), необходимо и достаточно, чтобы система (15) имела $0 < k < n$ *линейно независимых стационарных решений и выполнялись условия (18), (20).*

З а м е ч а н и е. Аналогичный результат имеет место в случае нижнего треугольного периодического коэффициента.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси и Гомельском государственном университете им. Ф. Скорины в рамках ГПФИ «Конвергенция».

Литература

1. *Massera J. L.* // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. Vol. 4, N 1. P. 37–45.
2. *Курцвейль Я., Вейвода О.* // Чехосл. матем. журн. 1955. Т. 5, № 3. С. 362–370.
3. *Еругин Н. П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск, 1963. – 273 с.
4. *Гайшун И. В.* // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 8. С. 684–686.
5. *Грудо Э. И.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1499–1504.
6. *Деменчук А. К.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. Saarbrücken, 2012.
7. *Пеннер Д. И., Дубошинский Я. Б., Дубошинский Д. Б., Козаков М. И.* // ДАН СССР. 1972. Т. 204, № 5. С. 1065–1066.
8. *Зайцев В. А.* // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Ижевск, 2003. С. 31–62.
9. *Габдрахимов А. Ф., Зайцев В. А.* // Изв. ИМИ УдГУ. 2006. № 3(37). С. 21–22.
10. *Leonov G. A., Shumafov M. M.* Stabilization of linear system. Cambridge Scientific Publishers, 2012. – 430 p.
11. *Леонов Г. А.* // Автомат. и телемех. 2001. № 5. С. 190–193.

M. S. BELOKURSKY, A. K. DEMENCHUK

demenchuk@im.bas-net.by

SOLUTION OF ERUGIN'S PROBLEM ON THE EXISTENCE IRREGULAR SOLUTIONS OF THE LINEAR SYSTEM WITH TRIANGULAR PERIODIC COEFFICIENT

Summary

The linear system with triangular periodic coefficient is considered. Necessary and sufficient conditions for existence of irregular solutions of the linear system with triangular periodic coefficient are obtained.