Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 июль–август Том 58 № 4

УДК 519.173

В. И. БЕНЕДИКТОВИЧ

СЕРЕДИННЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СУБКУБИЧЕСКОГО ВНЕШНЕПЛАНАРНОГО ГРАФА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск *Поступило 19.06.2014*

В недавней работе Фоулер и Писанский [1; 2] ввели понятие *HL*-индекса графа, который связан с HOMO-LUMO разбиением, изучаемым в теоретической химии (см. также [3]). Это интервал между наивысшей занятой молекулярной орбиталью (HOMO) и наинизшей незанятой молекулярной орбиталью (LUMO). Согласно модели Хюкеля [4], энергии этих орбиталей находятся в линейном соотношении с собственными значениями соответствующего молекулярного графа и могут быть выражены следующим образом. Пусть G является (молекулярным) графом порядка n и пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ являются собственными значениями его матрицы смежности $A(G)$, упорядоченными по убыванию (с учетом их кратностей) или его *спектром*. Собственными значениями, которые возникают в HOMO-LUMO разбиении, являются серединные значения λ_H и λ_L, где

$$H = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,\ L = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

Тогда *HL-индексом* графа G называется величина

$$R(G) = \max\{|\lambda_H|, |\lambda_L|\}.$$

Напомним, что простой невзвешенный граф G называется *субкубическим*, если его максимальная степень $\Delta(G) \leq 3$. В химической литературе [1; 3] субкубические графы иногда называют *химическими* графами. В [1; 2] доказано, что *HL*-индекс каждого субкубического графа G удовлетворяет неравенствам $0 \leq R(G) \leq 3$, и если G является двудольным, то $R(G) \leq \sqrt{3}$. Следующим важным результатом является утверждение, полученное в работе [5].

Т е о р е м а 1. *Серединные собственные значения $\lambda_H(G)$ и $\lambda_L(G)$ любого субкубического графа G содержатся в интервале $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, т. е. $R(G) \leq \sqrt{2}$.*

Этот результат является неулучшаемым, поскольку граф Хивуда удовлетворяет равенству $\lambda_H = -\lambda_L = \sqrt{2}$ (см. [3]).

Напомним, что граф является *планарным*, если он может быть уложен на плоскости, таким образом, что различные ребра пересекаются только в общих конечных вершинах. По теореме Фари такой граф имеет представление в виде геометрического плоского графа, т. е. плоского графа, в котором все ребра представлены в виде прямолинейных отрезков. Планарный граф, который имеет укладку на плоскости такую, что все его вершины лежат на границе внешней грани, называется *внешнепланарным*.

В [5] была выдвинута Мохаром следующая гипотеза.

Г и п о т е з а. *Если G – планарный субкубический граф, то $R(G) \leq 1$.*

В [6] эта гипотеза была доказана им для случая двудольных графов.

Т е о р е м а 2. *Серединные собственные значения λ_H и λ_L любого субкубического планарного двудольного графа G содержатся в интервале $[-1, 1]$, т. е. $R(G) \leq 1$.*

Мы доказываем здесь эту гипотезу для субкубических внешнепланарных графов.

Теорема 3. *Серединные собственные значения λ_H и λ_L любого субкубического внешнепланарного графа G содержатся в интервале* $[-1, 1]$, *т. е.* $R(G) \le 1$.

Для доказательства теоремы напомним некоторые сведения о собственных значениях графа. Нашим основным инструментом доказательства будет так называемая *теорема о чередовании собственных значений графа* (см., напр., [7]). Для графа G обозначим через $\lambda_i(G)$ его i-е собственное значение при упорядочении всех его собственных значений по убыванию (с учетом их кратностей). Для графа $G = (V, E)$ и подмножества вершин $U \subseteq V$ обозначим через $G[U]$ подграф G, *индуцированный множеством* U, т. е. граф с множеством вершин U, ребрами которого являются все те ребра графа G, концы которых принадлежат множеству вершин U. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $A \subset V(G)$ – произвольное подмножество мощности k множества вершин $V(G)$ графа G порядка n и пусть $K = G - A = G[V(G) \setminus A]$ – подграф, индуцированный дополнением $V(G) \setminus A$. Тогда для каждого $i = 1, ..., n - k$ справедливы неравенства*

$$\lambda_i(G) \ge \lambda_i(K) \ge \lambda_{i+k}(G).$$

Отметим, что если упорядочить все собственные значения графа G по возрастанию (с учетом их кратностей): $\lambda_1^- \le \lambda_2^- \le \ldots \le \lambda_n^-$, т. е. $\lambda_i^-(G) = \lambda_{n-i+1}(G)$, то теорему о чередовании собственных значений графа можно переформулировать в следующем виде: *для каждого $i = 1, ..., n - k$ справедливы неравенства*

$$\lambda_i^-(G) \le \lambda_i^-(K) \le \lambda_{i+k}^-(G).$$

При оценке собственных значений будем использовать следующую лемму.

Лемма 1. (*а*) *Пусть G любой индуцированный подграф графа, изображенного на рис. 1, а. Тогда* $\lambda_2(G) \le 1$ и $\lambda_2^-(G) \ge -1$.

(*б*) *Пусть G граф, изображенный на рис.* 1, *б. Тогда* $\lambda_2(G) \le 1$ и $\lambda_2^-(G) \ge -1$.

Доказательство леммы 1 легко проводится при помощи компьютера. Можно выписать матрицы смежности для изображенных на рис. 1 графов и, чтобы облегчить вычисления, применить, например, пакет Mathcad для нахождения их спектров. В результате вычислений для первого графа получим: $\lambda_2(G) = -\lambda_2^-(G) = 0{,}662$; для второго – $\lambda_2(G) = 0$, $\lambda_2^-(G) = -1$.

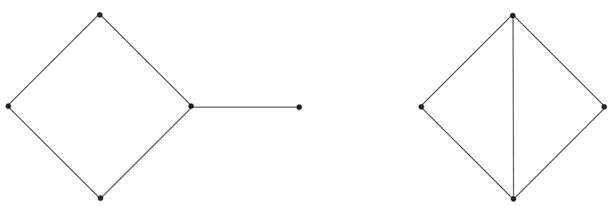
Отметим, что в терминологии Мохара [5] первый граф обозначается через $C_4(1, 0, 0, 0)$.

Разбиение $\{A, B\}$ вершин $V(G)$ графа G на две части A и B называют *недружественным*, если каждая вершина из A имеет не меньше соседей в B, чем в A, и каждая вершина из B имеет не меньше соседей в A, чем в B, т. е. $\forall v \in A \mid A \cap N(v) \mid \le |B \cap N(v)|$ и $\forall v \in B \mid B \cap N(v) \mid \le |A \cap N(v)|$, где $N(v) = \{u \in V(G) \mid vu \in E(G)\}$ – множество всех соседей или *окружение* вершины $v \in V(G)$. Заметим, что из этого определения, в частности, следует, что для любого недружественного разбиения $\{A, B\}$ в графе G не существует никакой цепи P_2 длины 2, вершины которой принадлежат только одной какой-то части.

Разбиение $\{A, B\}$ множества вершин $V(G)$ называют *несбалансированным*, если мощности его частей разбиения различны: $|A| \ne |B|$, и *сбалансированным*, если мощности его частей разбиения равны: $|A| = |B|$.

У каждого конечного графа существует недружественное разбиение.

Лемма 2. *Каждый конечный граф обладает недружественным разбиением.*



а *б*

Рис. 1

Доказательство. Рассмотрим такое разбиение $\{A, B\}$ графа G, что число ребер между частями A и B наибольшее. Легко видеть, что такое разбиение является недружественным.

В частности, у любого двудольного графа в качестве частей A и B недружественного разбиения можно выбрать две его доли. Это послужило одной из причин для пристального рассмотрения Мохаром этих графов. Второй причиной явилось свойство симметричности спектра двудольных графов G: $\lambda_i(G) = -\lambda_{\bar{i}}(G)$, которое упрощает исследование спектра таких графов.

Л е м м а 3. *Если G – субкубический граф с несбалансированным недружественным разбиением, то $R(G) \le 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{A, B\}$ является недружественным несбалансированным разбиением, причем $|B| > |A|$. Так как G является субкубическим, максимальная степень в индуцированном подграфе $G[B] = G - A$ не превосходит 1, т. е. все компоненты $G[B]$ изоморфны полным графам K_1 или K_2. В частности, каждое собственное значение $G[B]$ равно или 0, 1, или –1. Таким образом, $\lambda_1(G[B]) = |\lambda_{|B|}(G[B])| \le 1$. Поскольку $H \ge |A| + 1$, то применяя теорему о чередовании собственных значений графа к индуцированному графу $G[B] = G - A$, получим, что

$$\lambda_H(G) \le \lambda_{|A|+1}(G) \le \lambda_1(G[B]) \le 1.$$

Кроме того, поскольку $n - |A| = |B| \ge L$, то аналогично применяя теорему о чередовании собственных значений графа собственного значения $\lambda_L(G)$, получим

$$\lambda_L(G) \ge \lambda_{n-|A|}(G) \ge \lambda_{|B|}(G[B]) \ge -1.$$

Это означает, что $-1 \le \lambda_L(G) \le \lambda_H(G) \le 1$ и таким образом, $R(G) \le 1$.

Из лемм 2 и 3 следует, что для графа G нечетного порядка всегда выполняется гипотеза Мохара. Поэтому далее будем рассматривать только графы четного порядка $n = 2l$. К сожалению, у некоторых графов нет никакого несбалансированного недружественного разбиения. Например, у графа куба или у более общего класса – субкубических графов, которые содержат остовный подграф, состоящий из 4-циклов.

Пусть $\{A, B\}$ является недружественным разбиением $V(G)$ и пусть $C \subset V(G)$ является некоторым подмножеством вершин. Если $C \cap A = \varnothing$ и $\{A \setminus C, B \cup C\}$ является также недружественным разбиением (или если то же самое выполняется, когда можно поменять ролями части A и B), то говорят, что подмножество C нестабильно (относительно разбиения $\{A, B\}$).

Л е м м а 4. *Если $\{A, B\}$ недружественное разбиение субкубического графа G, и $C \subset V(G)$ является нестабильным подмножеством вершин, то $R(G) \le 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, по условию, по крайней мере, одно из недружественных разбиений $\{A, B\}$ или $\{A \setminus C, B \cup C\}$ является несбалансированным. Поэтому далее можно воспользоваться леммой 3.

Говорят, что разбиение $\{A, B\}$ множества вершин $V(G)$ с $|A| < |B|$ является *k-разбалансированным*, если $|B| \ge |A| + 2k - 1$.

Л е м м а 5. *Пусть $\{A, B\}$ – k-разбалансированное разбиение вершин субкубического графа G четного порядка $2l$, где $|A| < |B|$. Предположим, что только одна компонента Q индуцированного графа $G[B]$ имеет больше двух вершин. Если $\lambda_k(Q) \le 1$ и $\lambda_{\bar{k}}(Q) \ge -1$, тогда $R(G) - 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы следует, что $\lambda_k(G[B]) \le 1$ и $\lambda_{\bar{k}}(G[B]) \ge -1$. Кроме того, $H = l$, $L = l + 1$, $|A| \le l - k$, $|B| \ge l + k$. Поэтому согласно теореме о чередовании собственных значений графа имеем следующие цепочки неравенств:

$$\lambda_H(G) = \lambda_{(l-k)+k}(G) \le \lambda_{|A|+k}(G) \le \lambda_k(G[B]) \le 1$$

и

$$\lambda_L(G) = \lambda_{l+1}(G) \ge \lambda_{|B|-k+1}(G) \ge \lambda_{|B|-k+1}(G[B]) = \lambda_{\bar{k}}(G[B]) \ge -1.$$

Это означает, что $-1 \le \lambda_L(G) \le \lambda_H(G) \le 1$ и таким образом, $R(G) \le 1$.

С л е д с т в и е. Если единственная компонента Q порядка больше 2 является двудольным графом, то в силу симметричности спектра двудольного графа для выполнения неравенства $R(G) \le 1$ достаточно требовать, чтобы она удовлетворяла только одному условию: $\lambda_k(Q) \le 1$.

В силу лемм 2, 3 и 4 далее будем рассматривать внешнепланарный субкубический граф G порядка $n = 2l$, у которого существует только недружественное сбалансированное разбиение $\{A, B\}$ множества вершин $V(G)$ (т. е. $|A| = |B|$) и не существует никакого нестабильного подмножества вершин C.

Для внешнепланарного графа G m-цикл C, у которого $(m–1)$ его ребер являются ребрами внешней грани, назовем *лежащим на внешней грани*.

Л е м м а 6. *Если у внешнепланарного субкубического графа G существует 4-цикл C, лежащий на внешней грани, то* $R(G) \le 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем недружественное сбалансированное разбиение $\{A, B\}$ множества вершин $V(G)$ с $|A| = |B|$ и 4-цикл $C = v_1v_2v_3v_4$, лежащий на внешней грани, при этом будем предполагать, что ребро v_1v_4 цикла C является хордой границы внешней грани графа G. Части A и B этого разбиения будем называть *противоположными*. Будем кратко говорить, что в вершине $v \in A$ ($v \in B$) мы *переходим к противоположной разметке*, если мы исключаем вершину v из множества $A(B)$ и включаем ее во множество $B(A)$: $v \in B$ ($v \in A$). Обозначим соседей вершин v_1 и v_4, которые не лежат на цикле C, через u_1 и u_4 соответственно.

Если вершины v_1 и v_4 лежат в одной и той же части разбиения, например, $v_1, v_4 \in A$, то в силу замечания выше $u_1, u_4 \in B$ и можно рассмотреть 2-разбалансированное разбиение вершин $\{A \cup C, B \setminus C\}$. При этом индуцированный подграф $G[A \cup C] = G – (B \setminus C)$ имеет единственную компоненту Q, включающую более двух вершин, а именно, $Q = C$. Но по лемме 1 $\lambda_2(C) = -\lambda_{\bar{2}}(C) \le 1$, а значит, выполнены условия леммы 5 и, следовательно, $R(G) \le 1$.

Поэтому можно предполагать, что вершины v_1 и v_4 лежат в противоположных частях разбиения, например, $v_1 \in A$ и $v_4 \in B$, а значит, $v_3 \in A$ и $v_2 \in B$. По тем же соображениям, что и выше, в противоположных частях должны лежать и их соседи: u_1 и u_4. Причем можно считать, что $u_1 \in B$, а $u_4 \in A$. Действительно, иначе (т. е. при $u_1 \in A$, $u_4 \in B$) можно рассмотреть 2-разбалансированное разбиение вершин $\{A \cup C, B \setminus C\}$, для которого индуцированный подграф $G[A \cup C] = G – (B \setminus C)$ имеет единственную компоненту Q порядка больше 2, а именно, $Q = C_4(1, 0, 0, 0)$ со свойством $\lambda_2(Q) = -\lambda_{\bar{2}}(Q) \le 1$, по лемме 1, а значит, по лемме 5 $R(G) \le 1$.

Аналогично, включение $N(u_1) \subset A$ или $N(u_4) \subset B$ влечет, что 2-разбалансированное разбиение $\{A \cup C, B \setminus C\}$ или $\{A \setminus C, B \cup C\}$ соответственно удовлетворяет условиям леммы 5 с единственной компонентой порядка больше 2 $Q = C_4(1, 0, 0, 0)$, а значит, $R(G) \le 1$. Поэтому далее можно считать, что $|N(u_1) \cap B| = |N(u_4) \cap A| = 1$. Обозначим $N(u_1) \cap B = \{w_1\}$ и $N(u_4) \cap A = \{w_4\}$, остальных соседей вершин u_1 и u_4, не лежащих на цикле C, обозначим через t_1 и t_4 : $(N(u_1) \cap A) \setminus C = \{t_1\}$ и $(N(u_4) \cap B) \setminus C = \{t_4\}$.

Отметим, что включения $N(t_1) \subset B$ и $N(t_4) \subset A$ невозможны, так как иначе можно построить несбалансированное недружественное разбиение, которого по предположению не существует. Действительно, если, например, $N(t_1) \subset B$, то новое разбиение $\{A \setminus \{v_1\} \cup \{v_2, u_1\}, B \setminus \{v_2, u_1\} \cup \{v_1\}\}$ остается недружественным, а поскольку по предположению $|A| = |B|$, то оно является и несбалансированным. Поэтому $|N(t_1) \cap A| = |N(t_4) \cap B| = 1$. Обозначим $N(t_1) \cap A = \{s_1\}$ и $N(t_4) \cap B = \{s_4\}$.

Соседа вершины u_i ($i = 1, 4$), не лежащего на цикле C, назовем *ближайшим соседом*, если он является и соседней вершиной при последовательном обходе границы внешней грани графа G. Соответственно, второго соседа вершины u_i (если он существует), не лежащего на цикле C, назовем *дальним соседом*. Согласно этому определению нам необходимо рассмотреть 3 случая:

1) w_1 и w_4 являются ближайшими соседями u_1 и u_4 соответственно;

2) t_1 и t_4 являются ближайшими соседями u_1 и u_4 соответственно;

3) w_1 является ближайшим соседом u_1, а t_4 является ближайшим соседом u_4, либо t_1 является ближайшим соседом u_1, а w_4 является ближайшим соседом u_4.

Рассмотрим случай 1). Тогда две хорды u_1t_1 и u_4t_4 разбивают все множество вершин $V(G)$ на четыре подмножества: 4-цикл C, V_1 – вершины между u_1 и t_1, V_2 – вершины между t_1 и t_4, V_3 – вершины между t_4 и u_4 (в порядке обхода внешней границы).

Если выполняются оба условия $N(t_1) \cap A \subset V_1$ и $N(t_4) \cap B \subset V_3$, то можно переразметить принадлежность вершин множествам A и B следующим образом: для вершин множества $V_4 = C \cup \{u_1, u_4, t_1, t_4\} \cup V_2$ перейдем к противоположной разметке, а остальные вершины оставляем в исходных частях разбиения. В результате, очевидно, получим недружественное разбиение $\{A', B'\}$, у которого $N(u_1) \subset B'$ (рис. 2). Далее перейдем к 2-разбалансированному разбиению вершин $\{A' \cup C, B' \setminus C\}$, для которого в силу леммы 1 справедливы условия леммы 5 и, следовательно, $R(G) \le 1$.

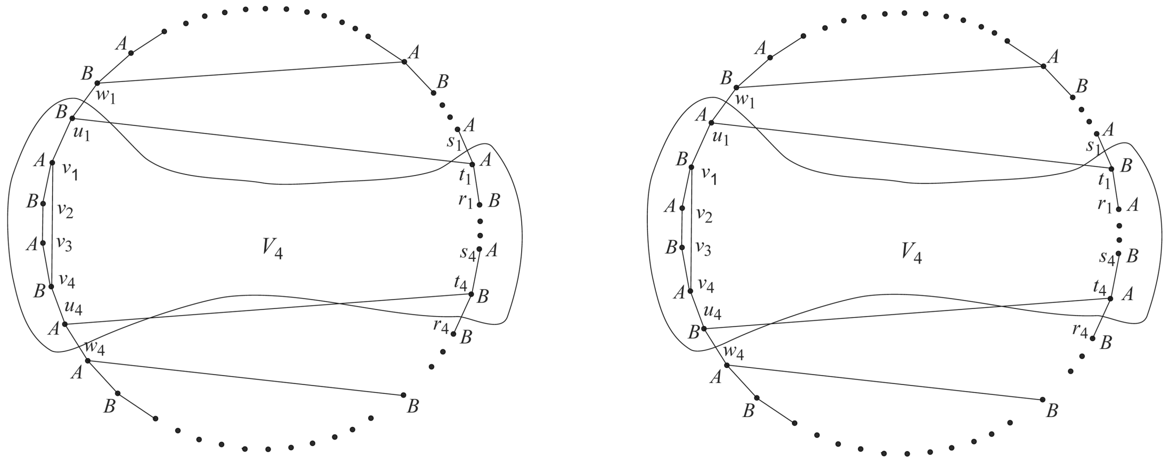


Рис. 2

Пусть теперь $N(t_1) \cap A \subset V_2$ или $N(t_4) \cap B \subset V_2$, например, $N(t_1) \cap A \subset V_2$. Тогда переразметим принадлежность вершин множествам A и B следующим образом: во множестве $V_5 = V_1 \cup \{v_1, v_2, u_1, t_1\} \cup V_2$ перейдем к противоположной разметке вершин, а остальные вершины оставляем в исходных частях (рис. 3). Полученное разбиение $\{A', B'\}$ остается недружественным. Далее перейдем к 2-разбалансированному разбиению вершин $\{A' \setminus C, B' \cup C\}$, для которого, в силу леммы 1, справедливо также условие леммы 5 и, следовательно, $R(G) \le 1$.

Рассмотрим случай 2). Поскольку $s_1 \in A$, то третий сосед вершины t_1 (если он существует), отличный от u_1 и s_1, лежит в B, обозначим его через r_1. Вершина r_1 может иметь единственного соседа q_1 из B, который лежит между r_1 и s_1. Аналогично, третий сосед вершины t_4 (если он существует), отличный от u_4 и s_4, лежит в A, обозначим его через r_4. Вершина r_4 может иметь единственного соседа q_4 из A, который лежит между s_4 и r_4. Обозначим через V_6 все вершины на внешней границе строго между q_4 и q_1, включающие цикл C.

Переразметим теперь принадлежность вершин множествам A и B следующим образом: для вершин множества V_6 перейдем к противоположной разметке, а остальные вершины оставляем в исходных частях (рис. 4). Полученное разбиение $\{A', B'\}$ остается недружественным. Далее перейдем к 2-разбалансированному разбиению вершин $\{A' \setminus C, B' \cup C\}$, для которого, в силу леммы 1, справедливо условие леммы 5 и, следовательно, $R(G) \le 1$.

Наконец, рассмотрим случай 3). Пусть, например, t_1 является ближайшим соседом u_1, а w_4 является ближайшим соседом u_4. Обозначим через V_7 все вершины на внешней границе строго между v_3 и q_1 и переразметим принадлежность вершин множествам A и B следующим образом: для вершин множества V_7 перейдем к противоположной разметке, а остальные вершины остав-

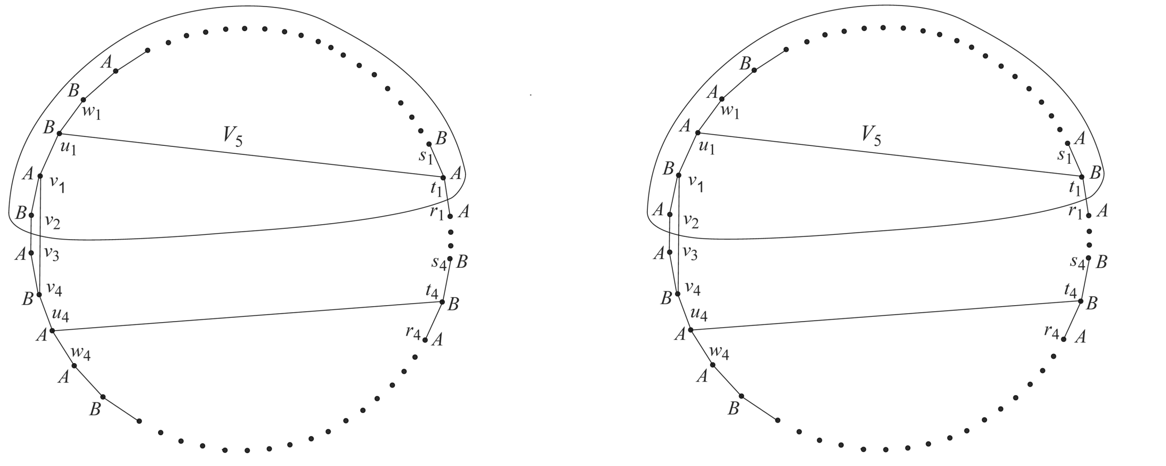


Рис. 3

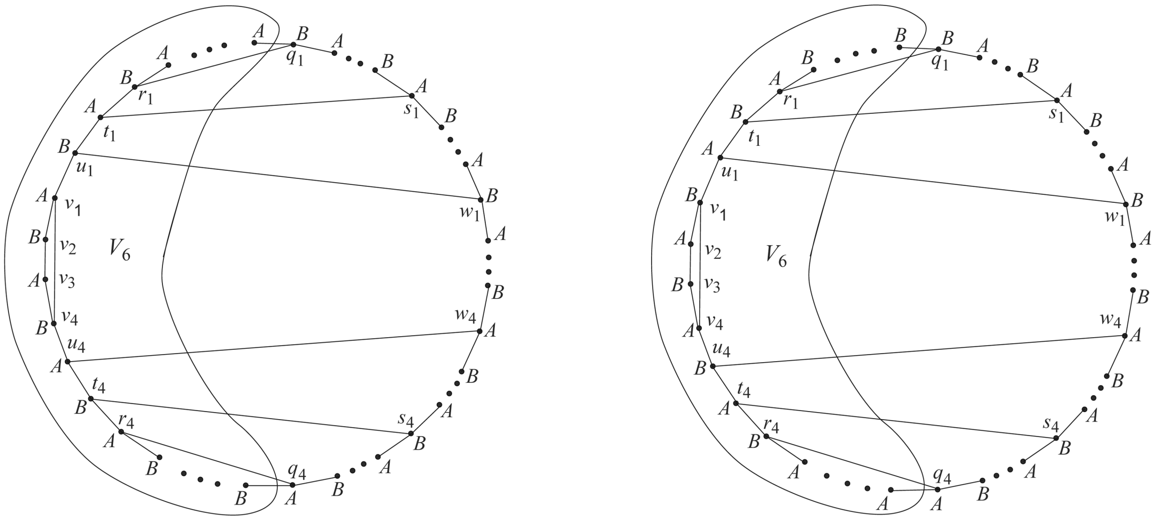


Рис. 4

ляем в исходных частях (рис. 5). Полученное разбиение $\{A', B'\}$ остается недружественным. Далее перейдем к 2-разбалансированному разбиению вершин $\{A' \setminus C, B' \cup C\}$, для которого, в силу леммы 1, справедливо условие леммы 5 и, следовательно, $R(G) \le 1$.

Лемма 6 доказана.

Л е м м а 7. *Если у внешнепланарного субкубического графа G существует m-цикл C ($m \ge 6$) без хорд, лежащий на внешней грани, то у него существует несбалансированное недружественное разбиение множества вершин.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим вершины графа G при последовательном обходе границы его внешней грани по часовой стрелке через $v_1, v_2, \ldots, v_n$. При этом можно считать, что m-цикл $C = v_1v_2\ldots v_m$. Нетрудно видеть, что достаточно удалить 3 вершины графа G, а именно, v_1, v_4, v_7, чтобы остались три компоненты: два полных подграфа K_2 m-цикла C и индуцированный подграф H на $2n - 8 = 2(n - 4)$ вершинах. Поэтому можно удалить еще не более $n - 4$ вершин у графа H, чтобы оставшимися компонентами графа H были полные подграфы K_1 или K_2. Включив теперь все $k \le 3 + (n - 4) = n - 1$ удаленных таким образом вершин во множество A, а остальные вершины во множество B, мы получим недружественное несбалансированное разбиение $\{A, B\}$ множества вершин $V(G)$, а значит, в силу леммы 3, $R(G) \le 1$. Лемма 7 доказана.

Чтобы завершить доказательство теоремы 3, осталось лишь рассмотреть случай, когда внешнепланарный граф G имеет только 3- или 5-циклы без хорд, лежащие на внешней грани. В этом

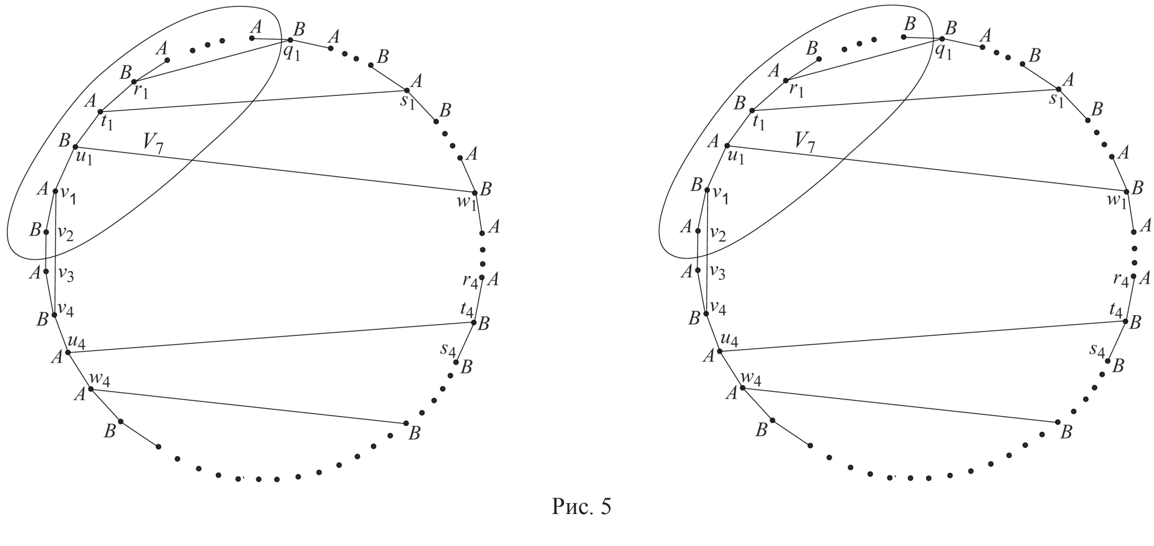
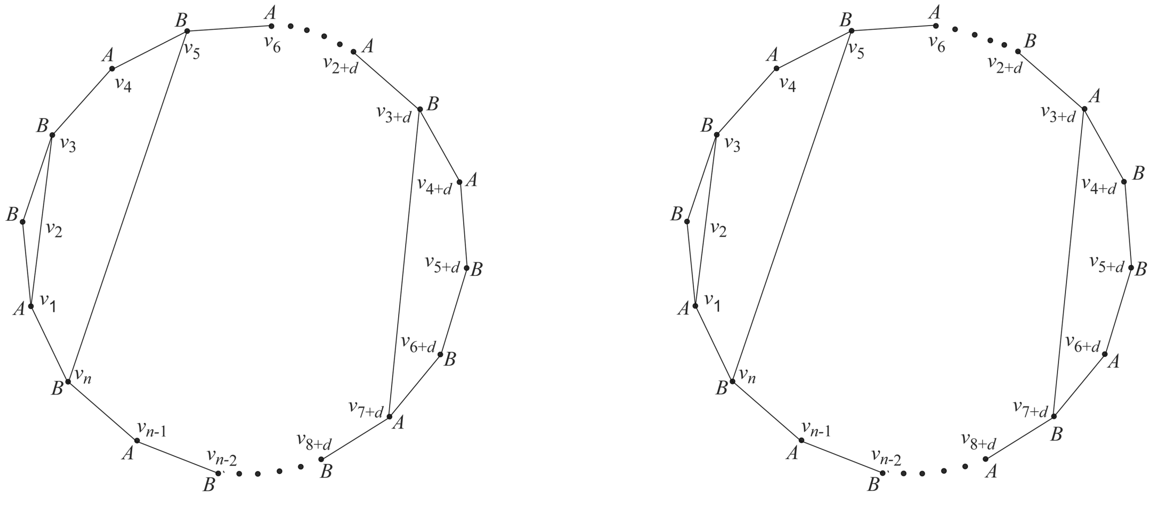


Рис. 5



а *б*

Рис. 6

случае граф G должен обязательно иметь, по крайней мере, два таких цикла, второй из которых может быть сопряженным с первым.

Назовем *расстоянием* d между двумя циклами C_1 и C_2 без хорд, лежащими на внешней грани внешнепланарного графа G, число ребер наименьшей цепи на границе внешней грани, соединяющей эти циклы. Два цикла C_1 и C_2 без хорд, лежащие на внешней грани внешнепланарного графа G, назовем *сопряженными*, если они имеют общее внутреннее ребро.

Если граф G имеет два сопряженных 3-цикла, то для него по лемме 1 $R(G) \le 1$. Если граф G имеет сопряженные 3-цикл C_1 и 5-цикл C_2 (в этом случае $|G| = 6$) либо два сопряженных 5-циклов (в этом случае $|G| = 8$), то расстояние между ними $d = 0$ четно. Поэтому для такого графа G, как и в случае, когда эти циклы являются несопряженными, можно найти несбалансированное недружественное разбиение (см. ниже).

Осталось показать, что когда граф G имеет два несопряженных цикла длины 3 и (или) 5 всегда можно найти несбалансированное недружественное разбиение. Без ограничения общности рассмотрим, например, случай, когда граф G имеет несопряженные 3-цикл C_1 и 5-цикл C_2. Пусть расстояние между этими циклами равно d. Можно считать, что $C_1 = v_1v_2v_3$ и $C_2 = v_{3+d}v_{4+d}\ldots v_{7+d}$. Если расстояние между циклами четно: $d = 2k$, то положим $A = \{v_1, v_4, \ldots, v_{2+d}, v_{4+d}, v_{7+d}, v_{9+d}, \ldots, v_{n-1}\}$, а $B = V \setminus A$ (рис. 6, *а*). Если расстояние между циклами C_1 и C_2 нечетно: $d = 2k + 1$, то положим $A = \{v_1, v_4, \ldots, v_{3+d}, v_{6+d}, v_{8+d}, \ldots, v_{n-1}\}$, а $B = V \setminus A$ (рис. 6, *б*). В любом случае мощность множества A равна $l - 1$, а мощность множества B равна $l + 1$, т. е. разбиение $\{A, B\}$ является несбалансированным и, по построению, недружественным. А значит, в силу леммы 3 вытекает неравенство $R(G) \le 1$. Теорема 3 доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция».

Литература

1. *Fowler P. W., Pisanski T.* // Acta Chim. Slov. 2010. Vol. 57. P. 513–517.
2. *Fowler P. W., Pisanski T.* // MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 2010. Vol. 64. P. 373–390.
3. *Jaklič G., Fowler P. W., Pisanski T.* // Ars Math. Contemp. 2012. Vol. 5. P. 99–105.
4. *Gutman I., Polanski O. E.* Mathematical Concepts in Organic Chemistry. Berlin, 1986.
5. *Mohar B.* // http://arxiv.org/abs/1401.1865
6. *Mohar B.* // MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 2013. Vol. 70. P. 79–84.
7. *Godsil C., Royle G.* Algebraic Graph Theory. New York, 2001.

V. I. BENEDIKTOVICH

vbened@im.bas-net.by

MEDIAN EIGENVALUES OF A SUBCUBIC OUTERPLANAR GRAPH

Summary

In this article median eigenvalues of a subcubic outerplanar graph are investigated. Mohar's conjecture has been confirmed for this class of graphs.