Доклады Национальной академии наук Беларуси
2014 июль–август Том 58 № 4

УДК 515.127.13

В. И. БАХТИН[1], *П. Н. ВОРОБЕЙ*[2]

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАУСДОРФОВЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ ФРАКТАЛОВ МОРАНА С ПОМОЩЬЮ КОДИРУЮЩИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

[1] *Католический университет Люблина, Польша*
[2] *Белорусский государственный университет, Минск* *Поступило 05.05.2014*

Для вычисления хаусдорфовых размерностей фракталов обычно используют принцип распределения масс [1–3], а в более сложных случаях применяют теоремы Биллингсли [4; 5] и Янг [6], которые связывают размерность множества с поточечной размерностью некоторой меры на этом множестве. В случае фракталов Морана (и, в частности, самоподобных фракталов) выбор подходящей меры не вызывает затруднений. Однако при вычислении размерностей *подмножеств* фракталов выбор подходящей меры становится нетривиальной задачей. В данном сообщении доказывается, что вычисление размерности любого подмножества фрактала Морана можно свести к вычислению размерности совокупности кодирующих это подмножество последовательностей. Это облегчает задачу вычисления размерности, поскольку структура кодирующего пространства проще структуры исходного фрактала.

Хаусдорфова размерность. Пусть произвольное метрическое пространство Ω покрыто конечной или счетной совокупностью множеств $\mathcal{U}=\{U_i\}$. Обозначим через $|\mathcal{U}|$ диаметр этого покрытия: $|\mathcal{U}|=\sup|U_i|$, где $|U_i|$ – диаметр U_i. Для каждого числа $\alpha\in\mathbb{R}$ положим

$$\operatorname{mes}(\mathcal{U},\alpha)=\sum_i |U_i|^{\alpha}.$$

Хаусдорфовой мерой (размерности α) метрического пространства Ω называется

$$\operatorname{mes}(\Omega,\alpha)=\varliminf_{|\mathcal{U}|\to 0}\operatorname{mes}(\mathcal{U},\alpha),$$

где $\mathcal{U}$ – конечное или счетное покрытие Ω. Можно заметить, что при $\beta\ge\alpha$

$$\operatorname{mes}(\mathcal{U},\beta)\le\operatorname{mes}(\mathcal{U},\alpha)|\mathcal{U}|^{\beta-\alpha}.$$

Отсюда вытекает следующее свойство хаусдорфовой меры: если $\operatorname{mes}(\Omega,\alpha)<\infty$ при некотором α, то тогда $\operatorname{mes}(\Omega,\beta)=0$ при всех $\beta>\alpha$.

Хаусдорфовой размерностью пространства Ω называется число

$$\dim_H\Omega=\inf\{\alpha\mid\operatorname{mes}(\Omega,\alpha)=0\}.$$

Кодирующее пространство и цилиндрическая метрика. Пусть задано конечное множество $I=\{1,2,\ldots,s\}$ и набор чисел $\theta(1),\theta(2),\ldots,\theta(s)$ из интервала (0, 1). Рассмотрим пространство последовательностей (*кодирующее пространство*)

$$I^{\mathbb{N}}=\{\bar{i}=(i_1,i_2,i_3,\ldots)\mid i_n\in I\}.$$

Определим на нем цилиндрическую метрику

$$d(\bar{i},\bar{j})=\prod_{t=1}^{n}\theta(i_t),\quad \text{где}\quad n=n(\bar{i},\bar{j})=\inf\{t\mid i_t\ne j_t\}-1. \tag{1}$$

Если $\overline{i} = \overline{j}$, то положим $d(\overline{i}, \overline{j}) = 0$. Очевидно, для любых трех последовательностей $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k} \in I^{\mathbb{N}}$ выполняется соотношение

$$n(\overline{i}, \overline{k}) \geq \min\{n(\overline{i}, \overline{j}), n(\overline{j}, \overline{k})\}.$$

Отсюда вытекает *усиленное неравенство треугольника*

$$d(\overline{i}, \overline{k}) \leq \max\{d(\overline{i}, \overline{j}), d(\overline{j}, \overline{k})\}. \qquad (2)$$

Метрика, для которой выполняется неравенство (2), называется *ультраметрикой*. Известно, что любая ультраметрика обладает следующими свойствами (см., напр., [7]):

а) любая точка шара является его центром;

б) любые два шара либо не пересекаются, либо один вложен в другой;

в) радиус любого шара не меньше его диаметра.

Цилиндром ранга n с центром $\overline{i}$ будем называть подмножество $Z_n(\overline{i}) \subset I^{\mathbb{N}}$ вида

$$Z_n(\overline{i}) = \{\overline{j} \in I^{\mathbb{N}} \mid i_t = j_t,\ t = 1, \ldots, n\}.$$

Очевидно, его диаметр в цилиндрической метрике равен $\theta(i_1) \cdot \ldots \cdot \theta(i_n)$.

Л е м м а 1. *В пространстве $I^{\mathbb{N}}$ любой цилиндр совпадает с некоторым шаром, и любой шар совпадает с некоторым цилиндром. Если $Z_m(\overline{i}) = B(\overline{i}, r)$, то $|Z_m(\overline{i})| \leq r$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим любой цилиндр $Z_m(\overline{i})$. Обозначим через r его диаметр: $r = \theta(i_1) \cdot \ldots \cdot \theta(i_m) = |Z_m(\overline{i})|$. Для всякой точки $\overline{j} \in Z_m(\overline{i})$ будет $n(\overline{i}, \overline{j}) \geq m$, откуда следует, что $d(\overline{i}, \overline{j}) \leq r$. Значит, $Z_m(\overline{i}) \subset B(\overline{i}, r)$. С другой стороны, если $\overline{j} \notin Z_m(\overline{i})$, то $n(\overline{i}, \overline{j}) < m$ и, следовательно, $\overline{j} \notin B(\overline{i}, r)$. Тем самым доказано равенство $Z_m(\overline{i}) = B(\overline{i}, r)$.

Рассмотрим произвольный шар $B(\overline{i}, r)$. Пусть $m = \min\{n \mid \theta(i_1) \cdot \ldots \cdot \theta(i_n) \leq r\}$. Тогда $Z_m(\overline{i}) \subset B(\overline{i}, r)$. С другой стороны, если $\overline{j} \notin Z_m(\overline{i})$, то $n(\overline{i}, \overline{j}) < m$ и соответственно $d(\overline{i}, \overline{j}) > r$. Поэтому $Z_m(\overline{i}) = B(\overline{i}, r)$.

Л е м м а 2. *При определении хаусдорфовой меры и размерности множества $A \subset I^{\mathbb{N}}$ достаточно рассматривать его покрытия непересекающимися цилиндрами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольное счетное покрытие $\mathcal{U} = \{U_j\}$ множества A. Любое множество U_j содержится в шаре $B(\overline{i}, |U_j|)$ с центром в любой точке $\overline{i} \in U_j$. По лемме 1 этот шар совпадает с некоторым цилиндром $V_j = Z(U_j)$, диаметр которого не превосходит $|U_j|$. Очевидно, совокупность цилиндров $\mathcal{V} = \{V_j\}$ покрывает множество A. При этом $|\mathcal{V}| \leq |\mathcal{U}|$ и

$$\mathrm{mes}(\mathcal{U}, \alpha) = \sum_j |U_j|^\alpha \geq \sum_j |V_j|^\alpha = \mathrm{mes}(\mathcal{V}, \alpha).$$

Отсюда видно, что при определении хаусдорфовой меры и размерности множества A достаточно рассматривать его покрытия цилиндрами.

Из свойства б) ультраметрики следует, что любые два цилиндра либо не пересекаются, либо один из них вложен в другой. Поэтому из любого покрытия A цилиндрами можно выделить дизъюнктное подпокрытие. Лемма доказана.

Фракталы Морана. Фракталы Морана определим следующим образом. Фиксируем компактное множество $K \subset \mathbb{R}^m$, имеющее непустую внутренность. Предположим, что любой конечной последовательности $(i_1, \ldots, i_n) \in I^n$, где $I = \{1, \ldots, s\}$, поставлено в соответствие множество $K_{i_1 \ldots i_n}$ таким образом, что

а) всякое множество $K_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n}$ содержится в $K_{i_1 \ldots i_{n-1}}$ и подобно ему с коэффициентом подобия $\theta(i_n)$;

б) множества $K_{i_1 \ldots i_n 1}, \ldots, K_{i_1 \ldots i_n s}$ не имеют общих внутренних точек;

в) пустой последовательности поставлено в соответствие множество K.

Л е м м а 3. *Если выполняются условия а), б), в), то любые два множества $K_{i_1 \ldots i_n}$ и $K_{j_1, \ldots, j_k}$ либо вложены одно в другое, либо не имеют общих внутренних точек.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $k \geq n$. Если наборы индексов $(i_1, \ldots, i_n)$ и $(j_1, \ldots, j_n)$ совпадают, то $K_{i_1 \ldots i_n} = K_{j_1 \ldots j_n} \supset K_{j_1 \ldots j_k}$. Если указанные наборы индексов не совпадают, то в силу условий а) и б) множества $K_{i_1 \ldots i_n}$ и $K_{j_1, \ldots, j_n}$ не имеют общих внутренних точек. Поскольку $K_{j_1 \ldots j_n} \supset K_{j_1 \ldots j_k}$, то же самое верно для $K_{i_1 \ldots i_n}$ и $K_{j_1 \ldots j_k}$. Лемма доказана.

Обозначим через F_n объединение всех множеств $K_{i_1\ldots i_n}$. Очевидно, $K = F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots$. *Фракталом Морана* мы будем называть множество $F=\cap F_n$. Множества такого типа впервые были рассмотрены Мораном в [8].

Определим отображение $f : I^{\mathbb{N}} \to F$, которое сопоставляет каждой последовательности $\bar{i} = (i_1, i_2, \ldots) \in I^{\mathbb{N}}$ единственную точку пересечения $\bigcap_n K_{i_1\ldots i_n}$. Очевидно, оно непрерывно и $f(I^{\mathbb{N}}) = F$.

Основным результатом сообщения является следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Для любого подмножества $A \subset I^{\mathbb{N}}$ его хаусдорфова размерность относительно цилиндрической метрики (1) совпадает с хаусдорфовой размерностью множества $f(A)$ относительно евклидовой метрики в $\mathbb{R}^m$.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуются следующие две леммы.

Л е м м а 4. *Пусть $\{V_j\}$ – последовательность не имеющих общих внутренних точек подмножеств $\mathbb{R}^m$, таких что каждое V_j содержит шар радиуса r_1 и содержится в шаре радиуса r_2. Тогда любое множество U пересекается не более чем с $(|U| + 2r_2)^m / r_1^m$ множеств из $\{V_j\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если V_j пересекается с U, то V_j содержится в любом шаре с центром в любой точке из U и радиусом $|U| + 2r_2$. Пусть q множеств из $\{V_j\}$ пересекаются с U. Суммируя объемы шаров радиуса r_1, содержащихся в этих множествах, получаем неравенство $qr_1^m \le (|U| + 2r_2)^m$, из которого следует доказываемая оценка.

Л е м м а 5. *Существует такое большое число Q, что для любого множества $U \subset \mathbb{R}^m$, у которого $|U| \le 1$, общее число всех множеств вида $K_{i_1\ldots i_n}$, удовлетворяющих условиям*

$$K_{i_1\ldots i_n} \cap U \ne \varnothing \quad \text{и} \quad |K_{i_1\ldots i_n}| < |U| \le |K_{i_1\ldots i_{n-1}}|, \tag{3}$$

не превосходит Q.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через ε радиус открытого шара, содержащегося в K. Положим $r_2 = |U|$ и $r_1 = |U| \min \theta(i)\varepsilon / |K|$. Тогда любое из множеств $K_{i_1\ldots i_n}$, удовлетворяющих условию (3), содержится в шаре радиуса r_2 и содержит шар радиуса r_1. По предыдущей лемме, количество таких множеств не превышает числа

$$Q = \frac{(|U| + 2|U|)^m}{\left(|U| \min\limits_{j \in I} \theta(j)\varepsilon / |K|\right)^m} = \left(\frac{3|K|}{\varepsilon \min\limits_{j \in I} \theta(j)}\right)^m .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Не ограничивая общности, можно считать, что $|K| = 1$. Вначале докажем неравенство $\dim_H f(A) \le \dim_H A$. Рассмотрим произвольное покрытие $\mathcal{V} = \{V_j\}$ множества A цилиндрами V_j. Каждый такой цилиндр совпадает с некоторым $Z_n(\bar{i})$. Поставим ему в соответствие множество $U_j = K_{i_1\ldots i_n}$, где $i_1, \ldots, i_n$ – первые n элементов последовательности $\bar{i}$. Очевидно, совокупность множеств $\mathcal{U} = \{U_j\}$ образует покрытие $f(A)$.

В силу определения цилиндрической метрики и условия $|K| = 1$

$$|V_j| = |Z_n(\bar{i})| = \theta(i_1) \cdot \ldots \cdot \theta(i_n) = |K_{i_1\ldots i_n}| = |U_j|. \tag{4}$$

Поэтому

$$\operatorname{mes}(\mathcal{U}, \alpha) = \sum_{U_j \in \mathcal{U}} |U_j|^\alpha = \sum_{V_j \in \mathcal{V}} |V_j|^\alpha = \operatorname{mes}(\mathcal{V}, \alpha),$$

откуда вытекает оценка $\dim_H f(A) \le \dim_H A$.

Докажем обратное неравенство $\dim_H A \le \dim_H f(A)$. Пусть $\mathcal{U} = \{U_j\}$ – произвольное счетное покрытие множества $f(A)$, удовлетворяющее условию $|\mathcal{U}| \le 1$. Рассмотрим произвольную последовательность $\bar{i} = (i_1, i_2, \ldots) \in A$. Выберем какой-нибудь один элемент U_j покрытия $\mathcal{U}$, содержащий точку $f(\bar{i})$. Затем выберем такое натуральное число $n = n(\bar{i})$, для которого выполняются неравенства

$$|Z_n(\bar{i})| < |U_j| \le |Z_{n-1}(\bar{i})|. \tag{5}$$

Очевидно, $\bar{i} \in Z_n(\bar{i})$. Обозначим через $\mathcal{Z}$ покрытие множества A всеми цилиндрами вида $Z_{n(\bar{i})}(\bar{i})$, где $\bar{i} \in A$. В силу леммы 5 и равенства (4), каждому элементу покрытия $U_j \in \mathcal{U}$ отвечает не более Q цилиндров $Z_{n(\bar{i})}(\bar{i})$, удовлетворяющих условиям $f(\bar{i}) \in U_j$ и (5). Отсюда вытекает, что

$$\operatorname{mes}(\mathcal{Z}, \alpha) = \sum_{Z \in \mathcal{Z}} |Z|^{\alpha} \le Q \sum_{U_j \in \mathcal{U}} |U_j|^{\alpha} = Q \operatorname{mes}(\mathcal{U}, \alpha).$$

Значит, $\operatorname{mes}(A, \alpha) \le Q \operatorname{mes}(f(A), \alpha)$, откуда следует неравенство $\dim_H A \le \dim_H f(A)$.

З а м е ч а н и е. Неравенство $\dim_H f(A) \le \dim_H A$ можно доказать другим способом. А именно, оно легко выводится из того факта, что отображение f удовлетворяет условию Липшица

$$d(f(\bar{i}), f(\bar{j})) \le |K| d(\bar{i}, \bar{j}),$$

которое вытекает непосредственно из определения кодирующего отображения f. Однако обратное неравенство таким способом получить не удается, поскольку обратное к f отображение не обязано удовлетворять условию Липшица (более того, само f может не быть инъективным).

Литература

1. *Edgar G.* Measure, Topology, and Fractal Geometry. Springer, 2008. – 292 p.
2. *Falconer K.* Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications. Chichester: Wiley, 2003. – 367 p.
3. *Песин Я.* Теория размерности и динамические системы. Современный взгляд и приложения. Москва; Ижевск, 2002. – 404 с.
4. *Billingsley P.* // Ill. J. Math. 1960. Vol. 4. P. 187–209.
5. *Billingsley P.* // Ill. J. Math. 1961. Vol. 5. P. 291–298.
6. *Young L.-S.* // Ergod. Theory and Dyn. Syst. 1982. Vol. 2. P. 109–124.
7. *Schikhof W. H.* Ultrametric calculus. An introduction to *p*-adic analysis. Camb. Univ. Press, 2007. – 320 p.
8. *Moran P. A. P.* // Proc. Camb. Phyl. Soc. 1946. Vol. 42. P. 15–23.

V. I. BAKHTIN, P. N. VOROBEI

bakhtin@tut.by

CALCULATION OF HAUSDORFF DIMENSIONS OF MORAN'S FRACTALS BY MEANS OF ENCODING SPACES

Summary

We prove that the Hausdorff dimension of any subset of Moran's fractal is equal to that of the set of sequences encoding this subset under a suitable choice of metrics on the encoding set.