**Доклады Национальной академии наук Беларуси**

**2016** **март–апрель** **Том 60 № 2**

*УДК 517.968.23*

*Т. М. УРБАНОВИЧ*

# ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ КОШИ

*(Представлено академиком В. И. Корзюком)*

*Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь*
*UrbanovichTM@gmail.com*

Исследуется особый случай характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши с комплексными порядками нулей. Найдены явная формула решения и условия разрешимости. Все исследования выполнены в весовых классах Гельдера с комплексным весом.

*Ключевые слова*: весовые классы Гельдера, сингулярное интегральное уравнение, краевая задача Римана.

*T. M. URBANOVICH*

## SPECIAL CASE OF THE SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH THE CAUCHY KERNEL

*Polotsk State University, Novopolotsk, Belarus*
*UrbanovichTM@gmail.com*

A special case of the singular integral equation with the Cauchy kernel in the case of the complex order of zeros is studied. The solvability conditions and the explicit formula of the solution are obtained. All studies are performed within the weighted Hölder classes with complex weight.

*Keywords*: Hölder weighted classes, singular integral equation with Cauchy kernel, Riemann boundary value problem.

Обозначим $H(E)$ класс всех функций $\varphi(z)$, заданных на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{C}$ и удовлетворяющих условию Гельдера.

Пусть $\Gamma$ – простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость комплексного переменного на внутреннюю область $D^+$ и внешнюю $D^-$; $F$ – конечное множество точек контура $\Gamma$; $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ – заданное семейство комплексных чисел. По определению функция $\varphi$ принадлежит классу $H_\lambda(\Gamma, F)$, если $\varphi \in H(\Gamma_0)$ на каждой дуге $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \setminus F$ и представима в виде

$$\varphi(t) = \left|t - \tau\right|^{\lambda_\tau} \varphi_1(t)$$

на каждой дуге $\Gamma_\tau$ с концом $\tau$, не содержащей других точек из $F$, с функцией $\varphi_1(t) \in H(\Gamma_\tau)$.

Будем говорить, что функция $\Phi \in H_\lambda(\Gamma, F)$ обратима, если $\varphi(t) \neq 0$, $t \in \Gamma \setminus F$, и $1/\varphi(t) \in H_{-\lambda}(\Gamma, F)$.

По определению функция $\varphi(z)$ принадлежит классу $H_\lambda(\overline{D}^\pm, F)$, если в каждой замкнутой области $\overline{D}_0 \subseteq \overline{D}^\pm \setminus F$ она принадлежит классу $H(\overline{D}_0)$, а в каждой области $D_\tau^\pm \subseteq D^\pm$, для которой $\overline{D}_\tau^\pm \cap F = \{\tau\}$ представима в виде

$$\Phi(z) = (z - \tau)^{\lambda_\tau} \Phi_1(z),$$

где $\Phi_1(z) \in H(\overline{D}_\tau^\pm)$, причём в определение класса $\Phi \in H_\lambda(\overline{D}^-, F)$ входит условие конечного порядка функции $\Phi(z)$ на бесконечности. А именно, порядок функции $\Phi$ на бесконечности не превосходит целого $n$, если в некоторой окрестности бесконечно удалённой точки выполняется оценка $|\Phi(z)| \le C|z|^n$.

Рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши [1, с. 176]

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1}$$

Напомним, что уравнение (1) является уравнением нормального типа, если коэффициенты $(a+b)(t)$ и $(a-b)(t)$ принадлежат классу $H(\Gamma)$ и обратимы в этом классе.

Пусть $F = F^+ \cup F^-$. Особый случай задачи (1) возникает, когда функции $a \pm b$ допускают нули в конечном числе точек контура $\Gamma$:

$$\begin{aligned} (a+b)(t) &= O\left(|t-\tau|^{\alpha_\tau}\right) \quad \text{при} \quad t \to \tau \in F_+, \\ (a-b)(t) &= O\left(|t-\tau|^{\alpha_\tau}\right) \quad \text{при} \quad t \to \tau \in F_-. \end{aligned} \tag{2}$$

Задача (1) в предположениях (2) при $\alpha_\tau \in \mathbb{Z}$ рассматривалась многими авторами. Уравнение (1) в предположениях (2) было полностью исследовано Ф. Д. Гаховым [2] и Л. А. Чикиным [3] методом сведения к краевой задаче Римана для случая, когда обе функции $a(t) \pm b(t)$ могут обращаться в нуль целого порядка в различных точках контура интегрирования. Д. И. Шерман [4; 5] независимо от работ Ф. Д. Гахова другим методом дал исследование исключительных (особых) случаев уравнений с ядром Коши в предположении, что только одна из функций $a(t) \pm b(t)$ имеет нули целых порядков на контуре Г.

Как было отмечено выше, уравнение (1) можно свести к соответствующей краевой задаче Римана [1, с. 176–177]. В [6] рассмотрен частный случай задачи линейного сопряжения, а именно:

$$\Phi^+(t) = |t-\tau_1|^{\mu_1} G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{3}$$

где $\tau_1$ – некоторая точка контура; $\mu_1$ – произвольное число (вообще говоря, комплексное), коэффициенты $G(t), g(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, причем $G(t) \ne 0$.

Заметим, что уравнение (1) можно свести к задаче (3) в предположении, что одна из функций $(a \pm b)(t)$ имеет один нуль произвольного порядка на контуре Г.

В работе [7] исследована краевая задача Римана

$$\Phi^+(t) - \prod_{\tau \in F}(t-\tau)^{\alpha_\tau} G(t)\Phi^-(t) = g(t), \quad \alpha_\tau \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Исследования в [7] выполнены в весовых классах Гельдера с любым комплексным весом, на который наложены дополнительные ограничения. Найдены явное представление решения задачи (4) и условия разрешимости.

В настоящей работе методом сведения к краевой задаче Римана исследован особый случай уравнения (1) для случая, когда обе функции $(a \pm b)(t)$ могут обращаться в нуль комплексного порядка в различных точках контура интегрирования. Эта работа является продолжением работы [7].

**Постановка задачи.** *Пусть* $-1 < \mathrm{Re}\lambda_\tau < 0, \quad \tau \in F$; *заданы семейство комплексных чисел* $\alpha = (\alpha_\tau, \tau \in F)$, $\mathrm{Re}\alpha_\tau > 0$ *для всех* $\tau \in F$, *и функции*

$$A(z) = \prod_{\tau \in F_+}(z-\tau)^{\alpha_\tau}, \; z \in \overline{D}^+,$$

$$B(z) = \prod_{\tau \in F_-}\left(\frac{z-\tau}{z-z_0}\right)^{\alpha_\tau}, z \in \overline{D}^-,$$

*где* $z_0 \in D^+$ *– фиксированная точка и ветви степенных функций во втором равенстве выбраны с разрезом вдоль дуг* $[\tau, z_0] \subset \overline{D}^+$.

*Требуется найти решение* $\varphi(t) \in H_\lambda(\Gamma, F)$ *уравнения (1) в предположениях*

$$\begin{aligned}(a+b)(t) &= c(t)A(t),\\ (a-b)(t) &= d(t)B(t),\end{aligned} \tag{5}$$

*где коэффициенты* $c(t), d(t)$ *принадлежат* $H_0(\Gamma, F)$ *и обратимы в этом классе, правая часть* $f(t) \in H_{\lambda+\alpha}(\Gamma, F)$, *причём весовой порядок* $\lambda$ *подчинен дополнительным требованиям*

$$\operatorname{Re}(\alpha_\tau + \lambda_\tau) \neq \frac{1}{2\pi}\left[\left(\arg\frac{d}{c}\right)(\tau - 0) - \left(\arg\frac{d}{c}\right)(\tau + 0)\right] \pmod{\mathbb{Z}}. \tag{6}$$

Хорошо известно, (см., напр., [8, с. 95]), что при $\varphi(t) \in H_\lambda(\Gamma, F)$, $-1 < \operatorname{Re}\lambda_\tau < 0$, $\tau \in F$, интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z} \tag{7}$$

принадлежит классу $H_\lambda(\overline{D}^{\pm}, F)$, исчезает на бесконечности и справедливы формулы Сохоцкого–Племеля (см., напр., [1, с. 38])

$$2\Phi^{\pm}(t) = \pm\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}.$$

По отношению к кусочно-аналитической функции (7), исчезающей на бесконечности, уравнение (1) в предположениях (5) равносильно задаче линейного сопряжения

$$c(t)A(t)\Phi^+(t) - d(t)B(t)\Phi^-(t) = f(t) \tag{8}$$

(см. [1, с. 176]).

Положим

$$\Psi(z) = \begin{cases} A(z)\Phi(z),\ z \in D^+,\\ B(z)\Phi(z),\ z \in D^-,\end{cases}$$

и задачу (8) сведём к задаче о скачке

$$\Psi^+(t) - G(t)\Psi^-(t) = \frac{f(t)}{c(t)} \tag{9}$$

с коэффициентом $G(t) = \dfrac{d(t)}{c(t)}$.

Построим каноническую функцию $X(z)$ задачи (9) в классе $H_{\lambda+\alpha}(\overline{D}^{\pm}, F)$. Для этого выберем произвольную непрерывную на $\Gamma \setminus F$ ветвь функции $\ln G(t)$, которая принадлежит $H_0(\Gamma, F)$, и положим

$$X_0(z) = e^{\Omega(z)}, \qquad \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\ln G)(t)dt}{t - z}.$$

Рассмотрим семейство чисел

$$\delta_\tau = \frac{1}{2\pi i}((\ln G)(\tau - 0) - (\ln G)(\tau + 0)), \quad \tau \in F. \tag{10}$$

Выберем целые числа $n_\tau$ по условию

$$-1 < \operatorname{Re}(\alpha_\tau + \lambda_\tau - \delta_\tau) + n_\tau < 0, \quad \tau \in F, \tag{11}$$

(дополнительным условием на $\lambda$ является то, что $\operatorname{Re}(\alpha_\tau + \lambda_\tau - \delta_\tau)$ не принадлежат множеству целых чисел).

В терминах целой части числа условия (11) примут вид

$$n_\tau = [\operatorname{Re}(\delta_\tau - \alpha_\tau - \lambda_\tau)], \quad \tau \in F.$$

Положим

$$X(z) = X_0(z)\prod_{\tau \in F}(z - \tau)^{-n_\tau}.$$

Т е о р е м а. *Пусть* $f \in H_{\alpha+\lambda}(\Gamma,\ F),\ -1 < \operatorname{Re}\lambda_\tau < 0, \tau \in F$, *выполняется условие (6) и в обозначениях (10)*

$$æ = \sum_{\tau \in F} n_\tau, \quad n_\tau = [\operatorname{Re}(\delta_\tau - \alpha_\tau - \lambda_\tau)].$$

*Тогда при* $æ \geq 0$ *уравнение (1) в предположениях (5) безусловно разрешимо в классе* $H_\lambda(\Gamma, F)$ *и его общее решение даётся формулой*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A(t)c(t)} + \frac{1}{B(t)d(t)}\right) f(t) +$$
$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{A(t)c(t)} - \frac{1}{B(t)d(t)}\right) c(t) X^+(t) \int_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{c(\tau)X^+(\tau)(\tau - t)} + \tag{12}$$
$$\left(\frac{1}{A(t)c(t)} - \frac{1}{B(t)d(t)}\right) c(t) X^+(t) P(t),$$

*где* $P(t)$ *– произвольный многочлен степени не выше* $æ - 1$ *(при* $æ = 0$ *положим* $P(t) = 0$*). Если* $æ < 0$, *то для существования решения необходимо и достаточно выполнение* $-æ$ *условий разрешимости*

$$\int_\Gamma \frac{f(t)}{c(t)X^+(t)} t^j dt = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, -æ - 1,$$

*и (единственное) решение уравнения (1) в предположениях (5) даётся формулой (12) при* $P(t) = 0$.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф14Каз-034).

## Список использованной литературы

1. *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

2. *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения / Ф. Д. Гахов // Изв. Казанского физ.-матем. общества. – 1949. – Т. 14, сер. 3. – С. 75–160.

3. *Чикин, Л. А.* Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений / Л. А. Чикин // Ученые зап. Казанского гос. ун-та им. В. И. Ульянова-Ленина. – 1953. – Т. 113, кн. 10. – С. 57–105.

4. *Шерман, Д. И.* О приемах решения некоторых сингулярных интегральных уравнений / Д. И. Шерман // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, вып. 4. – С. 423–452.

5. *Шерман, Д. И.* Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений / Д. И. Шерман // Прикладная математика и механика. – 1951. – Т. 15, вып. 1. – С. 75–82.

6. *Михайлов, Л. Г.* Сингулярные краевые задачи сопряжения / Л. Г. Михайлов, Н. Усманов // Докл. АН. – 2002. – Т. 387, № 3. – С. 309–313.

7. *Урбанович, Т. М.* Особый случай краевой задачи Римана / Т. М. Урбанович // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 6. – С. 18–21.

8. *Мусхелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

*Поступило в редакцию 14.09.2015*