Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 сентябрь–октябрь Том 58 № 5

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

А. А. ЯДЧЕНКО

О ФАКТОРИЗАЦИИ π-РАЗРЕШИМЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск *Поступило 01.10.2014*

Введение. Пусть G – конечная группа, A – такая группа ее автоморфизмов, что $(|A|,|G|)=1$ и $\Gamma = AG$ – полупрямое произведение групп G и A. Группа A при этом называется группой *копростых* автоморфизмов группы G. Если же $C_G(a)=C_G(A)$ для каждого элемента $a \in A^{\#}$, то A называется *сильноцентрализуемой группой копростых автоморфизмов* группы G.

Условие В. Скажем, что для Γ, A, G, C, χ и n выполнено условие В, если $\Gamma = AG$, где G – нормальная в Γ подгруппа, $(|A|,|G|)=1$, A – непримарная группа нечетного порядка, которая не является нормальной в группе Γ, $C_G(a)=C_G(A)=C$ для каждого элемента $a \in A^{\#}$ и G имеет точный неприводимый комплексный характер χ степени n, который является a-инвариантным хотя бы для одного элемента $a \in A^{\#}$.

В данной работе изучаются группы, удовлетворяющие условию В. На основе свойств таких групп установлена факторизация π-разрешимых неприводимых комплексных линейных групп G степени $n < 2|H|$, непримарные π-холловы TI-подгруппы H которых имеют нечетный порядок и не являются нормальными в G.

Т е о р е м а 1. *Пусть для Γ, A, G, C, χ и n выполнено условие В.*

Если $n = 2|A|-1$, то $G = O_q(G)C$, q – нечетное простое число, C разрешима и $|A|-1$ делит $|C|$, если C не абелева.

Если $n = 2(|A|-1)$, то $G = O_2(G)C$ и либо C не абелева, но разрешима, либо $C/Z(G) \cong PSL(2,5)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть для Γ, A, G, C, χ и n выполнено условие* В *и $n < 2|A|$. Тогда справедливо каждое из следующих утверждений:*

(1) $G = O_q(G)C$, где $n = |A|-1$, $|A|$, $|A|+1$, $2(|A|-1)$ или $2|A|-1$ и *n – степень некоторого простого числа q за исключением случая $n = |A|$;*

(2) если группа G не разрешима, то $n = 2(|A|-1)$ и *$C/Z(G) \cong PSL(2,5)$.*

Т е о р е м а 3. *Пусть G – π-разрешимая неприводимая линейная группа степени $n < 2|H|$ с непримарной π-холловой TI-подгруппой H нечетного порядка и $H \not\triangleleft G$. Тогда справедливо каждое из следующих утверждений:*

(1) $n = |H|-1, |H|, |H|+1, 2(|H|-1)$ или $2|H|-1$ и n – степень простого числа q, за исключением случая, когда $n = |H|$;

(2) факторгруппа $G/O_{\pi',\pi}(G)$ абелева;

(3) если $n = |H|$, то $G = [O_{\pi'}(G), H]N_G(H)$ с абелевой подгруппой $[O_{\pi'}(G), H]$ и $[O_{\pi'}(G), H] \cap N_G(H) = 1$, если же $n \neq |H|$, то $G = O_q(G)N_G(H)$, где q из (1);

(4) если группа G не разрешима, то $n = 2(|A|-1)$ и *$(C_G(H))_{\pi'}/Z(G) \cong PSL(2,5)$.*

Из теоремы, доказанной в [1–3], вытекает, что, если G – конечная неприводимая комплексная линейная группа степени $n < 2|A|$ с нетривиальной сильноцентрализуемой группой A копростых автоморфизмов нечетного порядка, то $n = |A|-1, |A|+1, 2(|A|-1)$ или $2|A|-1$ и n – степень некоторого простого числа (см. лемму 6).

Айзексом [4] доказано, что если силовская p-подгруппа конечной p-разрешимой неприводимой комплексной линейной группы G степени $n < 2p$ не является нормальной в G, то $n = p - 1$, p, $p + 1$, $2p - 2$ или $2p - 1$, n – степень простого числа и группа G разрешима за исключением, может быть, случая, когда $n = 2p - 2$. Романовским и Ядченко [5] установлено, что в последнем случае группа G импримитивна и ее силовская 2-подгруппа неабелева.

Некоторые определения, обозначения и предварительные результаты. Всюду под характером группы G будем понимать комплексный характер, а под группой – конечную группу. Подгруппа H группы G называется *TI*-**подгруппой** в G, если $H \cap H^g = 1$ для всех элементов $g \in G \setminus N_G(H)$. N – множество натуральных чисел; Z_+ – множество целых неотрицательных чисел; $i = \overline{1, t}$ обозначает $i = 1, 2, \dots, t$; $\pi = \pi(A)$ – множество всех простых делителей порядка группы A; $\pi' = \pi(\Gamma) \setminus \pi$; если $X \subseteq \Gamma$, то $X_{\pi'}$ – холлова π'-подгруппа группы X; если ψ − некоторый характер, то $\mathrm{Irr}(\psi)$ обозначает множество всех неприводимых компонент характера ψ. Если $X \lhd \Gamma$ и φ – неприводимый характер подгруппы X, то условие, что φ – g-инвариантен для некоторого элемента $g \in \Gamma \setminus \mathrm{X}$, запишем для краткости в виде $I_\Gamma(\varphi) \neq X$. Все остальные обозначения и определения стандартны и их можно найти, например, в [6] или [7].

Пусть $\Gamma = AB$ – группа с подгруппами A и B, где $B \lhd \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$ и $|A|$ нечетен. Тогда она удовлетворяет условию теоремы 13.1 [7]. Согласно этой теореме, существует взаимно-однозначное соответствие $\pi(B, A) : \mathrm{Irr}_A(B) \to \mathrm{Irr}(C_B(A))$ между множеством всех A-инвариантных неприводимых характеров группы B и множеством всех неприводимых характеров подгруппы $C_B(A)$, которое обладает рядом свойств, зависящих, в частности, от свойств подгруппы A. Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}_A(B)$. Тогда по лемме 13.3 [7] существует единственный неприводимый характер $\hat{\chi}$ группы Γ такой, что $(\hat{\chi})_B = \chi$ и $A \subseteq \ker(\det \hat{\chi})$. Он называется *каноническим продолжением характера* χ *на группу* Γ. В дальнейшем под $\hat{\chi}$ будем понимать именно такой характер.

Приведем ряд вспомогательных лемм для групп $\Gamma = AB$ с некоторыми условиями.

Л е м м а 1. *Пусть* $\Gamma = AB$ *– группа с подгруппами* A *и* B, *где* $B \lhd \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$ *и* $|A|$ *нечетен. Тогда* $B = [B, A]C_B(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 6 [8], $[B, A] \trianglelefteq B$. В силу теоремы 6.2.2 [6] для любого $q \in \pi(B)$ существует A-инвариантная силовская q-подгруппа Q. По теореме 5.3.5 [6] $Q = [Q, A]C_Q(A)$. Поскольку $Q \subseteq B$, то $[Q, A] \subseteq [B, A]$ и $C_Q(A) \subseteq C_B(A)$. Следовательно, $Q \subseteq [B, A]C_B(A)$. Так как $[B, A]C_B(A)$ – подгруппа из B и $|Q|$ делит $|[B, A]C_B(A)|$ для каждого $q \in \pi(B)$, то $|B|$ делит $[B, A]C_B(A)$ и, значит, $B \subseteq [B, A]C_B(A)$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Пусть* $\Gamma = AB$ *– группа, где* $B \lhd \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$, A *– разрешима и* $C_B(a) = C_B(A)$ *для каждого элемента* $a \in A^\#$. *Если* $\varphi \in \mathrm{Irr}(B)$ *и* $I_\Gamma(\varphi) \neq B$, *то* $\varphi \in \mathrm{Irr}_A(B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 13.1 [7] вытекает, что $|\mathrm{Irr}_A(B)| = |\mathrm{Irr}(C_B(A))|$ и $|\mathrm{Irr}_{<a>}(B)| = |\mathrm{Irr}(C_B(<a>))|$. Так как $C_B(<a>) = C_B(A)$, то $\mathrm{Irr}_{<a>}(B)| = |\mathrm{Irr}_A(B)|$. Так как $\mathrm{Irr}_A(B) \subseteq \mathrm{Irr}_{<a>}(B)$, то $\mathrm{Irr}_A(B) = \mathrm{Irr}_{<a>}(B)$. Но из условия леммы вытекает, что $\varphi^a = \varphi$ для некоторого элемента $a \in A^\#$. Это означает, что $\varphi \in \mathrm{Irr}_{<a>}(B)$. Значит, $\varphi \in \mathrm{Irr}_A(B)$. Лемма доказана.

В леммах 3–9 $\Gamma = AB$, $B \lhd \Gamma$, подгруппа A имеет нечетный порядок и не является нормальной в Γ, $(|A|, |B|) = 1$ и $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого неединичного элемента $a \in A$. Положим $C = C_B(A)$.

Л е м м а 3. A – *TI*-подгруппа в Γ и, если $\varphi \in \mathrm{Irr}(B)$ и $I_\Gamma(\varphi) \neq B$, то группа Γ имеет такой неприводимый характер $\hat{\varphi}$ π'-степени, что $\hat{\varphi}_B = \varphi$. Группа $\Gamma = AO_{\pi'}(\Gamma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть g – произвольный элемент из $\Gamma \setminus N_\Gamma(A) = \Gamma \setminus AC_\Gamma(A)$. Тогда $g = ax$, где $a \in A$ и $x \in B^\#$. Пусть $y \in A \cap A^g$. Тогда $y \in A^g = A^{ax} = (A^a)^x = A^x$ и, следовательно, $y = a_1^x$ для некоторого элемента $a_1 \in A$. Но $y \in A$. Поэтому $[a_1, x] = a_1^{-1}x^{-1}a_1x = a_1^{-1}a_1^x = a_1^{-1}y \in A$. Так как $B \trianglelefteq \Gamma$, то $[a_1, x] \in A \cap B = 1$. Отсюда $a_1x = xa_1$, т. е. $x \in C_B(a_1)$. Пусть $a_1 \neq 1$. Тогда $x \in C_B(A)$ и, следовательно, $g \in AC_B(A)$. Это противоречит выбору элемента g. Значит, $a_1 = 1$. Тогда $y = 1$. Поэтому $A \cap A^g = 1$, т. е. A – *TI*-подгруппа в группе Γ.

По лемме 2, $\varphi \in \mathrm{Irr}_A(B)$. Поэтому существует каноническое продолжение $\hat{\varphi}$ характера φ на Γ. Ясно, что степень этого характера – π'-число. Последняя фраза леммы очевидна. Лемма доказана.

В [1] определен ряд свойств группы Γ, удовлетворяющей следующему условию: $\Gamma = AO_{\pi'}(\Gamma)$, где холлова π-подгруппа A нечетного порядка является *TI*-подгруппой в Γ и не является нормальной (условие B из [1]). Из леммы 3 следует, что это условие выполняется в нашей ситуации. Поэтому можно использовать результаты из [1] о свойствах таких групп.

Л е м м а 4. *Если* $\varphi \in \mathrm{Irr}(B)$ *и* $I_\Gamma(\varphi) \neq B$, *то*

(1) $\widehat{\varphi}_A = k\rho_A + \varepsilon\beta(1)1_A$, *где* $k \in Z_+$, ρ_A*-регулярный характер подгруппы A,* $\varepsilon = \pm 1$ *и* β *– такой неприводимый характер подгруппы C, что* $\beta = (\varphi)\pi(B, A)$ *и*

(2) если $\upsilon \in \mathrm{Irr}(\Gamma)$ *– характер* π'*-степени, то характер* $\psi = \upsilon_B$ *неприводим,* $\widehat{\psi} = \upsilon\lambda$ *для некоторого линейного характера* λ *подгруппы A и для ограничения* $\widehat{\psi}_A$ *выполняется формула из пункта (1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все утверждения леммы непосредственно следуют из леммы 10 [1] и ее доказательства.

Л е м м а 5. *Если* $\varphi \in \mathrm{Irr}(B)$, $I_\Gamma(\varphi) \neq B$ *и* $\varphi(1) < 2|A|$, *то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\varphi_C = \beta + |A|\beta_1, \beta(1) < |A|, \beta_1(1) = 1;$

(2) $\varphi_C = (|A|-1)\beta + |A|\beta_1, \beta(1) = \beta_1(1) = 1;$

(3) $\varphi_C = (|A|-1)\beta, \beta(1) = 1;$

(4) $\varphi_C = (|A|-1)\beta, \beta(1) = 2;$

(5) $\varphi_C = (|A|+1)\beta, \beta(1) = 1;$

(6) $\varphi_C = (2|A|-1)\beta, \beta(1) = 1;$

(7) $\varphi_C = \beta,$

где $\beta, \beta_1 \in \mathrm{Irr}(C)$ *и* $\beta = (\chi)\pi(G, A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из леммы 11 [1].

Л е м м а 6. *Если* $\varphi \in \mathrm{Irr}(\Gamma)$ *– точный характер степени* $n < 2|A|$, *то* $n = |A|-1$, $|A|$, $|A| + 1$, $2(|A| - 1)$ *или* $2|A| - 1$ *и n – степень некоторого простого числа q за исключением, может быть, случая* $n = |A|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку характер φ неприводим и точный, то можно считать Γ комплексной неприводимой линейной группой, и так как по лемме 3 A – TI-подгруппа в Γ, то последняя удовлетворяет условию A [1]. Доказательство вытекает из теоремы, сформулированной там же.

Л е м м а 7. *Если* $K \lhd \Gamma$ *такая подгруппа, что* AK / K *не является нормальной в* Γ / K, *то* $A \cap K = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из леммы 9 [1].

Л е м м а 8. *Если* φ *– характер степени* $m = |A|-1 = 2^\alpha$ *для некоторого* $\alpha \in N$ *и* $A\ker\varphi / \ker\varphi$ *не является нормальной в* $\Gamma / \ker\varphi$, *то* $|\Gamma : Z(\varphi)| = |A| 2^{2\alpha}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

По лемме 3, A – TI-подгруппа в Γ. Значит, $A\ker\varphi / \ker\varphi$ – холлова TI-подгруппа в группе $\overline{\Gamma} = \Gamma / \ker\varphi$, которая не является нормальной. Поскольку A не является нормальной в Γ, то, по лемме 7, $A \cap \ker\varphi = 1$. Тогда $|\overline{A}| = |A\ker\varphi / \ker\varphi| = |A|$ и, следовательно, $m = |\overline{A}|-1$. Видим, что группа $\overline{\Gamma}$ удовлетворяет условию B из [10]. По лемме 7 [10], $|\overline{\Gamma} : Z(\overline{\Gamma})| = |\overline{A}| 2^{2\alpha}$. Поскольку по лемме 2.27 [7] $Z(\overline{\Gamma}) = Z(\varphi) / \ker\varphi$, то

$$|\overline{\Gamma} : Z(\overline{\Gamma})| = \frac{|\Gamma| / |\ker\varphi|}{|Z(\varphi)| / |\ker\varphi|} = |\Gamma : Z(\varphi)|.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 9. *Если* $\varphi \in \mathrm{Irr}(B)$ *и* $I_\Gamma(\varphi) \neq B$, $\varphi(1) = 2(|A|-1)$, $|A| \neq 3$ *и B – 2-группа, то для неприводимого характера* $\widehat{\varphi}$ *группы* Γ *справедливо следующее утверждение:* $\widehat{\varphi}_A = 2\rho_A - 2 \cdot 1_A$, *где* ρ_A *– регулярный характер подгруппы A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сохраним обозначения леммы 4. Пусть B – 2-группа. Поскольку $\beta = (\varphi)\pi(B, A)$ – неприводимый характер подгруппы $C_B(A)$, то $\beta(1)$ – степень числа 2. Так как $\varphi(1) = 2(|A|-1)$, то $k = 1$ или 2.

Пусть $k = 1$. Тогда $\varepsilon = 1$ и $\beta(1) = \widehat{\varphi}_A(1) - \rho_A(1) = 2|A| - 2 - |A| = |A| - 2$. Так как число $|A|$ нечетно и $\beta(1) = |A| - 2$ – степень числа 2, то $\beta(1) = 1$. Следовательно, $|A| = 3$, что противоречит условию доказываемой леммы.

Итак, $k = 2$. Тогда $\varepsilon = -1$ и $\beta(1) = 2\rho_A(1) - \hat{\varphi}_A(1) = 2|A| - 2|A| + 2 = 2$. Тогда $\hat{\varphi}_A = k\rho_A + \varepsilon\beta(1)1_A = 2\rho_A - 2\cdot 1_A$. Лемма доказана.

Пусть Г – группа наименьшего порядка, для которых выполняются условия теоремы 1, но не выполняются ее заключения.

Л е м м а 10. *Характер* $\hat{\chi}$ *– точный.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим $\ker\hat{\chi} \neq 1$. Поскольку характер $\hat{\chi}_G = \chi$ точный характер, то $\ker\hat{\chi} \subseteq A$. Так как, по лемме 3, A – TI-подгруппа в Г, то $A \lhd Г$. Это противоречит условию доказываемой теоремы. Лемма доказана.

По лемме 10, группа Г имеет точный неприводимый характер $\hat{\chi}$ степени $n < 2|A|$. По лемме 6, n – степень простого числа q. По теореме 6.2.2 [6], группа G содержит A-инвариантную силовскую q-подгруппу.

Л е м м а 11. *Пусть* $q \in \pi(n)$ *и* Q *–* A*-инвариантная силовская* q*-подгруппа группы* G*. Тогда подгруппа* $[Q, A] \not\subset C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $[Q, A] \subseteq C$. Поскольку по лемме 1 $Q = [Q, A]C_Q(A)$, то $Q \subseteq C$. По упражнению 13.2 [7], $\dfrac{\beta(1)|G:C|}{\chi(1)}$ – целое число, где β из леммы 4. Так как $Q \subseteq C$, то q не делит $|G:C|$. Поскольку $\chi(1)$ – степень q, то $\chi(1)$ делит $\beta(1)$. Так как $\beta(1) \leq \chi(1)$, то $\beta(1) = \chi(1)$. Из леммы 4 следует, что $k = 0$, $\varepsilon = 1$ и $\hat{\chi}_A = \beta(1)1_A$, т. е. $A \subseteq \ker\hat{\chi}$. Получили противоречие с леммой 10. Лемма доказана.

Ограничение объема сообщения не позволяет привести доказательства результатов без сокращений.

Л е м м а 12. *Группа* G *не разрешима.*

В [9, теорема] доказано, что π-разрешимая неприводимая линейная группа G степени $n < 2|H|$ с π-холловой TI-подгруппой H нечетного порядка, которая не является нормальной в G разрешима при $n \neq 2(|H|-1)$. По лемме 12, $n = 2(|H|-1)$, а из леммы 6 вытекает, что $n = 2^{\alpha+1}$, где $\alpha \in N$, т. е. $q = 2$.

Л е м м а 13. $|G:C|$ *делится на нечетное простое число.*

Л е м м а 14. *Справедливо каждое из следующих утверждений:*

(1) $\hat{\chi}_A = \rho_A + (|A|-2)1_A$;

(2) $\chi_C = \beta + |A|\beta_1$.

Здесь $\beta = (\chi)\pi(G, A)$, $\beta(1) = |A|-2$ и $\beta_1 \in \mathrm{Irr}(C)$, $\beta_1(1) = 1$.

Пусть Q – подгруппа из леммы 11 и $N = N_Г(Q)$. Поскольку $q = 2$, то по лемме 12 $N \neq Г$ и в силу леммы 11 $Q \not\subset C$. Рассмотрим характер

$$\hat{\chi}_N = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \chi_i,$$

где $\alpha_i \in N$, $\chi_i \in \mathrm{Irr}(N)$, $i = \overline{1, t}$. Пусть $A\ker\chi_i / \ker\chi_i \lhd N/\ker\chi_i$ для всех $i = \overline{1, t}$. Так как $\bigcap_{i=1}^{t} \ker\chi_i = \ker\hat{\chi}_N = 1$, то подгруппа N изоморфно вкладывается в прямое произведение $\overline{N} = \prod_{i=1}^{t} N/\ker\chi_i$. Поскольку каждый фактор $N/\ker\chi_i$ содержит нормальную холлову π-подгруппу $A\ker\chi_i/\ker\chi_i$, то $A \lhd N$. Тогда $Q \subseteq C$. Это противоречит выбору подгруппы Q. Значит, можно считать, что $A\ker\chi_1/\ker\chi_1 \not\lhd N/\ker\chi_1$. Тогда с учетом лемм 6 и 7

$$\chi_1(1) \in \{|A|-1, |A|, |A|+1, 2(|A|-1)\}.$$

При этом $\chi_1(1)$ – степень 2, за исключением случая, когда $\chi_1(1) = |A|$.

Л е м м а 15. $Z(Q) \subseteq Z(Г)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $\chi_1(1) = |A|-1$. Обозначим $\mu = \hat{\chi}_N - \chi_1(1)$. Предположим, что $A\ker\mu/\ker\mu \not\lhd N/\ker\mu$. Тогда из лемм 7 и 6 следует, что характер μ неприводим и $\mu(1) = |A|-1$. Используя лемму 4 убеждаемся, что

$$f=(\widehat{\chi}_A,1_A)_A=((\chi_1+\mu)_A,1_A)_A=((\rho_A-1_A)(\lambda_{\chi_1})^{-1}+$$
$$(\rho_A-1_A)(\lambda_\mu)^{-1},1_A)_A=((\rho_A-(\lambda_{\chi_1})^{-1})+(\rho_A-(\lambda_\mu)^{-1}),1_A)_A\le 2.$$

Здесь λ_{χ_1} и λ_μ – линейные характеры подгруппы A.

С другой стороны, из леммы 14 вытекает, что $f=(\rho_A+(|A|-2)1_A,1_A)_A=1+|A|-2=|A|-1$. Поэтому $|A|-1\le 2$, т. е. $|A|\le 3$. Это противоречит условию B.

Теперь предположим, что $A\ker\mu/\ker\mu\lhd N/\ker\mu$. Тогда, по лемме 3 [1], $[O_{\pi'}(N),A]\subseteq\ker\mu$. Так как $Q\subseteq O_{\pi'}(N)$, то $[Q,A]\subseteq\ker\mu$. Поскольку характер $(\chi_1)_{A\ker\mu}$ точен, $[(Q,A]\not\subset C$, по лемме 11, и $A\ker\mu\lhd N$, то из леммы 6 следует, что этот характер неприводим, ибо в противном случае $A\lhd N$, т. е. $[(Q,A]\subseteq C$. Следовательно, по лемме 8, $A\ker\mu:Z(A\ker\mu)|=|A|2^r$. Отсюда следует, что $(\ker\mu)_2\, char A\ker\mu\lhd N$. Значит, $(\ker\mu)_2\lhd Q$ и, следовательно, $Z=Z((\ker\mu)_2)\cap Q\ne 1$. Из теоремы Клиффорда вытекает, что характер $(\chi_1)_{(\ker\mu)_2}$ тоже неприводимый и точный. Поэтому $Z((\ker\mu)_2)\subseteq Z(\chi_1)$. Тогда для элемента $t\in Z$ порядка 2 получаем, что $\widehat{\chi}(t)=\widehat{\chi}_N(t)=(\chi_1+\mu)(t)=\chi_1(t)+\mu(t)=-\chi_1(1)+\mu(1)=0$.

С другой стороны, по лемме 15, получаем, что $\widehat{\chi}(t)=-\widehat{\chi}(1)=-2(|A|-1)$. Противоречие.

Пусть теперь $\chi_1(1)=|A|$. Тогда $\mu(1)=|A|-2$. Отсюда и теоремы 1 [10] вытекает, что $A\ker\mu/\ker\mu\lhd N/\ker\mu$. Поскольку $\chi_1(1)=|A|$, то все неприводимые компоненты характера $(\chi_1)_{N^*_{\pi'}}$ линейные. Это означает, что $(N_{\pi'})'\subseteq\ker\chi_1$. Так как $\ker\chi_1\lhd N$, $A\ker\mu\lhd N$ и $\ker\chi_1\cap\ker\mu=1$, то $A_0=\ker\chi_1\cap A\ker\mu\subseteq A$. Но A – TI-подгруппа и $A/\lhd A\ker\mu$, ибо в противном случае $[Q,A]\subseteq C$, поскольку $[Q,A]\subseteq[O_{\pi'}(N),A]$ и $[O_{\pi'}(N),A]\subseteq\ker\mu\cap O_{\pi'}(N)$ по лемме 3 [1]. Тогда $A_0=1$. Значит, $\ker\chi_1\subseteq C_N(A\ker\mu)$ и поэтому $\ker\chi_1\subseteq C_{(N^*)_{\pi'}}(A)$. Тогда $((N)_{\pi'})'\subseteq C_{(N)_{\pi'}}(A)$, т. е. $C_{(N)_{\pi'}}(A)\lhd(N)_{\pi'}$.

Из того, что $(N)_{\pi'})'\subseteq\ker\chi_1$ и $\ker\chi_1\cap\ker\mu=1$ следует, что подгруппа $\ker\mu\cap(N)_{\pi'}$ абелева. Значит, подгруппа $[(N)_{\pi'},A]$ – абелева. Так как $[(N)_{\pi'},A]=[[(N)_{\pi'},A],A]\times C_{[(N)_{\pi'},A]}(A)$ и $[[(N)_{\pi'},A],A]=[(N)_{\pi'},A]$ по лемме 6 [8], то $C_{[(N)_{\pi'},A]}(A)=1$. Поскольку $[(N)_{\pi'},A]\cap C_{(N)_{\pi'}}(A)\subseteq C_{[(N)_{\pi'},A]}(A)$, то $[(N)_{\pi'},A]\cap C_{(N)_{\pi'}}(A)=1$. Так как по лемме 6 [8] $[(N)_{\pi'},A]\lhd(N)_{\pi'}$, $C_{(N)_{\pi'}}(A)\lhd(N)_{\pi'}$ и $(N)_{\pi'}=[(N)_{\pi'},A]C_{(N)_{\pi'}}(A)$ по лемме 1, то $(N)_{\pi'}=[(N)_{\pi'},A]C_{(N)_{\pi'}}(A)$. Поэтому $[(N)_{\pi'},A]\subseteq Z((N)_{\pi'})$, так как группа $[(N)_{\pi'},A]$ абелева. Отсюда следует, что $[Q,A]\subseteq Z(Q)$. По лемме 15, $[Q,A]\subseteq Z(\Gamma)$, т. е. $[Q,A]\subseteq C$, что противоречит лемме 11.

Поскольку $|A|\neq 3$, то $\chi_1(1)\ne|A|+1$. Пусть, наконец, $\chi_1(1)=2(|A|-1)$. Тогда характер $\widehat{\chi}_N$ неприводим. Так как n – степень 2, то из теоремы Клиффорда вытекает, что характер $\widehat{\chi}_Q$ также неприводим. Поэтому $\widehat{\chi}_{AQ}$ неприводим. Поскольку Q – 2-группа, то из лемм 9 и 14 вытекает, что $\widehat{\chi}_A=\rho_A+(|A|-2)1_A=2\rho_A-2\cdot 1_A$. Следовательно, $\widehat{\chi}_A(a)=\rho_A(a)+(|A|-2)1_A(a)=2\rho_A(a)-2\cdot 1_A(a)$ для каждого $a\in A$. Отсюда $|A|-2=-2$, что невозможно. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. По условию В $I_\Gamma(\chi)\ne B$. По лемме 2 $\chi\in\mathrm{Irr}_A(B)$. В силу леммы 10 каноническое продолжение $\widehat{\chi}$ – точный неприводимый характер группы Г. Ввиду леммы 3 можно считать, что Г – неприводимая линейная группа π'-степени $n<2|A|$ с π- холловой TI-подгруппой A. Поэтому из леммы 6 следует, что $n=|A|-1$, $|A|+1$, $2(|A|-1)$ или $2|A|-1$ и n – степень некоторого простого числа.

Случай $n=|A|-1$. Пусть $\overline{\Gamma}=\Gamma/Z(\Gamma)$. Из леммы 8 вытекает, что $|\Gamma:Z(\Gamma)|=|A|2^{2\alpha}$ для некоторого натурального числа α. Так как $\Gamma=AO_{\pi'}(\Gamma)$, то $\overline{\Gamma}=(AZ(\Gamma)/Z(\Gamma))O_2(\overline{\Gamma})$. Отсюда следует разрешимость групп $\overline{\Gamma}$, Г и G. Из утверждения $|\Gamma:Z(\Gamma)|=|A|2^{2\alpha}$ следует также, что $G_{2'}\subseteq Z(\Gamma)$. Поэтому $G_2\lhd\Gamma$ и $G_2\lhd G$. Следовательно, $G=O_2(G)C$.

Пусть $n=|A|+1$. В [12, теорема] установлено, что $G=O_2(G)C_G(A)$ и группа C абелева. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

При $n=2(|A|-1)$ или $n=2|A|-1$ утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 1. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Тождественное преобразование группы G определяет точный неприводимый характер χ степени n.

Утверждение (1) теоремы доказано в серии работ [1–3].

Напомним, что $O_{\pi',\pi}(G)/O_{\pi'}(G)=O_\pi(G/O_{\pi'}(G))$. Так как, согласно теореме 6.3.1 [6], $O_{\pi'}(G/O_{\pi'}(G))=1$, то $O_\pi(G/O_{\pi'}(G))\ne 1$. Поскольку $HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)$ − π-холлова TI-подгруппа в $G/O_{\pi'}(G)$, то $O_{\pi',\pi}(G)=HO_{\pi'}(G)$. Отсюда и леммы 2.2.1 [11] вытекает, что

$$G = O_{\pi'}(G)N_G(H). \quad (1)$$

Докажем, что выполняется утверждение (2) теоремы. Положим $N = N_G(H)$. Тогда можем записать, что $N = N_{\pi'}H$. Поскольку подгруппа H не является нормальной в G, то она не является номальной и в $O_{\pi',\pi}(G) = HO_{\pi'}(G)$. Поэтому и по лемме 7 [1], подгруппа H изоморфна дополнительному множителю некоторой группы Фробениуса. Значит, все подгруппы Силова из H циклические, ввиду нечетности $|H|$. Следуя «аргументу Фраттини» можем утверждать, что для каждого простого числа $p \in \pi$ в группе N существует $N_{\pi'}$-инвариантная p-подгруппа Силова S_p. Можем записать, что $N_{\pi'} \subseteq N^{(p)}$, где $N^{(p)} = N_G(S_p)$.

Известно, что факторгруппа $N^{(p)} / C_G(S_p) = N^{(p)} / C_{N^{(p)}}(S_p)$ изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(S_p)$ – группы автоморфизмов группы S_p и что $\mathrm{Aut}(S_p)$ абелева. Так как $N_{\pi'} / C_{N_{\pi'}}(S_p) = (N^{(p)})_{\pi'} / (C_{N^{(p)}}(S_p))_{\pi'}$ изоморфна подгруппе из $N^{(p)} / C_{N^{(p)}}(S_p)$, то факторгруппа $N_{\pi'} / C_{N_{\pi'}}(S_p)$ абелева для каждого простого числа $p \in \pi$.

Заметим также, что группа H порождается своими силовскими подгруппами S_p, $C_{N_{\pi'}}(H) \subseteq C_{N_{\pi'}}(S_p)$ и что $C_{N_{\pi'}}(H) = \bigcap_{p\in\pi} C_{N_{\pi'}}(S_p)$. Поскольку факторгруппа $N_{\pi'} / C_{N\pi'}(H)$ изоморфна некоторой подгруппе из прямого произведения $\overline{N} = \prod_{p\in\pi} N_{\pi'} / C_{N\pi'}(S_p)$ и группа $\overline{N}$ – абелева, как прямое произведение абелевых подгрупп, то и факторгруппа $N_{\pi'} / C_{N\pi'}(H)$ также абелева.

С другой стороны, поскольку $H \lhd N \subseteq G$ и $O_{\pi'}(G) \lhd G$, то $G / O_{\pi',\pi}(G) = O_{\pi'}(G)N / HO_{\pi'}(G) \cong N / H(O_{\pi'}(G) \cap N) = N / HC_{N_{\pi'}}(H) = N_{\pi'} / C_{N_{\pi'}}(H)$.

Здесь мы учли, что $C_{N_{\pi'}}(H) \subset O_{\pi'}(G)$, так как $O_{\pi'}(G)C_{N_{\pi'}}(H) \lhd G$, ибо $G = O_{\pi'}(G)N$ и $C_{N_{\pi'}}(H) \lhd N$. Отсюда следует, что $O_{\pi'}(G) \cap N = C_{N_{\pi'}}(H)$. Видим, что и факторгруппа $G / O_{\pi',\pi}(G)$ абелева. Утверждение (2) теоремы.

Теперь докажем утверждение (3). Пусть $n = |H|$. Так как из теоремы Клиффорда вытекает, что все неприводимые компоненты характера $\chi_{O_{\pi'}(G)}$ линейные, поэтому подгруппа $O_{\pi'}(G)$ абелева. Как и ранее с помощью лемм 1 и 6 [8] убеждаемся в том, что $O_{\pi'}(G) = [O_{\pi'}(G), H]C_{O_{\pi'}(G)}(H)$. Так как $C_{O_{\pi'}(G)}(H) \subseteq N_G(H)$, то из предыдущего выражения и равенства (1) следует, что $G = [O_{\pi'}(G), H]N_G(H)$ и $[O_{\pi'}(G), H] \cap N_G(H) = 1$.

Пусть теперь $n \neq |H|$. Предположим, что характер $\chi_{HO_{\pi'}(G)}$ приводим. Как и ранее для характера $\widehat{\chi}_N$ убеждаемся в том, что $H\ker\psi / \ker\psi / \lhd HO_{\pi'}(G) / \ker\psi$ для некоторой неприводимой компоненты ψ этого характера. Поскольку $HO_{\pi'}(G) \lhd G$, $H / \lhd HO_{\pi'}(G)$, $n < 2|H|$, то из теоремы Клиффорда и утверждения (1) доказываемой теоремы вытекает, что $\chi_{HO_{\pi'}(G)} = \psi + \psi^x$ для такого $\psi \in \mathrm{Irr}(HO_{\pi'}(G))$, что $\psi(1) = |H| - 1$ и $x \in G \setminus I_G(\psi)$ или $\chi_{HO_{\pi'}(G)} = 2\psi$. Причем $H\ker\psi / \ker\psi / \lhd HO_{\pi'}(G) / \ker\psi$.

Пусть $\chi_{HO_{\pi'}(G)} = \psi + \psi^x$, $x \in G \setminus I_G(\psi)$. Тогда $H\ker\psi^x / \ker\psi^x / \lhd HO_{\pi'}(G) / \ker\psi^x$. По лемме 8 $|O_{\pi'}(G)H : Z(\psi)| = |H|\,2^{2\alpha}$ и $|O_{\pi'}(G)H : Z(\psi^x)| = |H|\,2^{2\alpha}$ для $\alpha \in N$. Отсюда и из леммы 5 [1] вытекает, что $(O_{\pi'}(G))_{2'} \subseteq Z(\psi) \cap Z(\psi^x) = Z(HO_{\pi'}(G))$.

Поэтому $(O_{\pi'}(G))_{2'} \subseteq C_{O_{\pi'}(G)}(H)$ и, значит,

$$O_{\pi'}(G) = (O_{\pi'}(G))_2 C_{O_{\pi'}(G)}(H). \quad (2)$$

Поэтому нетрудно видеть, что $O_{\pi'}(G) = O_2(O_{\pi'}(G))C_{O_{\pi\pi'}(G)}(H)$. Так как $O_2(O_{\pi'}(G)) \subseteq O_2(G)$ и $C_{O_{\pi'}(G)}(H) \subseteq N_G(H)$, то согласно равенству (1) $G = O_2(G)N_G(H)$. Если же $\chi_{HO_{\pi'}(G)} = 2\psi$, то равенство (2) доказывается еще проще и, следовательно, выполняется утверждение (3) доказываемой теоремы.

Пусть теперь характер $\chi_{HO_{\pi'}(G)}$ неприводим. Значит, неприводим и характер $\varphi = \chi_{O_{\pi'}(G)}$. К тому же $\varphi \in \mathrm{Irr}_H(O_{\pi'}(G))$. Положим $\Gamma = HO_{\pi'}(G)$, $C = C_{O_{\pi'}(G)}(H)$. В силу леммы 6 [1] $C = C_{O_{\pi'}(G)}(h)$ для любого неединичного элемента $h \in H$. Таким образом, для группы Γ, φ и n выполняется условие В, сформулированное в начале сообщения; при этом группы H и $O_{\pi'}(G)$ играют роли подгрупп A и G соответственно из условия В. Из утверждения (1) теоремы 2 вытекает, что $O_{\pi'}(G) = O_q(O_{\pi'}(G))C_{O_{\pi'}(G)}(H)$. Поэтому справедливо утверждение (3) доказываемой теоремы.

Докажем, наконец, что выполняется утверждение (4) теоремы. Пусть группа G не разрешима. Тогда ввиду утверждения (2) теоремы не разрешима и подгруппа $O_{\pi',\pi}(G)$. Так как $H / \triangleleft G$, то и $H / \triangleleft O_{\pi',\pi}(G)$. Поскольку $O_{\pi',\pi}(G) \triangleleft G$ и $n < 2|H|$, то из теоремы Клиффорда, утверждения (1) теоремы и теоремы 2 [10] вытекает, что либо характер $\chi_{O_{\pi',\pi}(G)}$ неприводим, либо $n = 2(|H|-1)$ и $\chi_{O_{\pi',\pi}(G)} = \psi + \psi^x$ для такого $\psi \in \mathrm{Irr}(O_{\pi',\pi}(G))$, что $\psi(1) = |H|-1$ и $x \in G \setminus I_G(\psi)$ или же $\chi_{O_{\pi',\pi}(G)} = 2\psi$. Пусть характер $\chi_{O_{\pi',\pi}(G)}$ не является неприводимым. Поскольку $(O_{\pi'}(G))_{2'} \subseteq Z(HO_{\pi'}(G))$, что установлено ранее, то в этом случае подгруппа $O_{\pi',\pi}(G)$ разрешима. Это противоречит предположению. Из утверждения (2) и доказательства утверждения (3) теоремы следует, что группа G разрешима и при $n = |H|$.

Пусть характер $\chi_{O_{\pi',\pi}(G)}$ неприводим и $n \neq |H|$. Значит, неприводим и характер $\varphi = \chi_{O_{\pi'}(G)}$. К тому же $\varphi \in \mathrm{Irr}_H(O_{\pi'}(G))$. Положим $\Gamma = HO_{\pi'}(G)$, $C = C_{O_{\pi'}(G)}(H)$. В силу леммы 6 [1] $C = C_{O_{\pi'}(G)}(h)$ для любого неединичного элемента $h \in H$. Таким образом, для группы Г, φ и n выполняется условие В, сформулированное в начале сообщения; при этом группы H и $O_{\pi'}(G)$ играют роли подгрупп A и G соответственно из условия В. Из утверждения (2) теоремы 2 вытекает, что $n = 2(|A|-1)$ и $C / Z(G) \cong PSL(2,5)$. Поэтому $C_{O_{\pi'}(G)}(H) / Z(HO_{\pi'}(G)) \cong PSL(2,5)$.

С другой стороны, $C_G(H) = Z(H)(C_G(H))_{\pi'} \triangleleft N_G(H)$. Поэтому $(C_G(H))_{\pi'} \triangleleft N_G(H)$. Следовательно, $X = (C_G(H))_{\pi'} O_{\pi'}(G)$ – подгруппа G, нормализатор которой содержит $N_G(H)$. Из равенства (1) следует, что X нормальна в G. Но X – π'-группа. Стало быть, $X \subseteq O_{\pi'}(G)$ и поэтому $(C_G(H))_{\pi'} \subset O_{\pi'}(G)$. Очевидно также, что $C_{O_{\pi'}(G)}(H) \subseteq (C_G(H))_{\pi'}$. Поэтому $C_{O_{\pi'}(G)}(H) = (C_G(H))_{\pi'}$. Следовательно, $(C_G(H))_{\pi'} / Z(HO_{\pi'}(G)) \cong PSL(2,5)$. Поскольку характер $\chi_{O_{\pi',\pi}(G)}$ неприводим и точен, то $Z(HO_{\pi'}(G) = Z(O_{\pi',\pi}(G)) \subseteq Z(G)$. Понятно, что $Z(G) = (Z(HO_{\pi'}(G))$. Теорема доказана.

Автор глубоко признателен И. Д. Супруненко за проявленное внимание к работе.

Литература

1. *Ядченко А. А.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2008. Т. 16, № 2. С. 118–130.
2. *Ядченко А. А.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2009. Т. 17, № 2. С. 94–104.
3. *Ядченко А. А.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18, № 2. С. 99–114.
4. *Isaacs I. M.* // J. Algebra. 1973. Vol. 24, N 3. P. 513–530.
5. *Романовский А. В., Ядченко А. А.* // Матем. сб. 1988. Т. 137(179), № 4(12). С. 568–573.
6. *Gorenstein D.* Finite groups. New York, 1968.
7. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York, 1976.
8. *Glauberman G.* // Canad. J. Math. 1968. Vol. 20. P. 1465–1488.
9. *Бобр В. В.* // Матем. заметки. 2003. Т. 73. В. 4. С. 494–501.
10. *Ядченко А. А.* // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск, 1986. С. 181–207.
11. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
12. *Ядченко А. А., Заяц П. И.* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 4. С. 28–35.
13. *Старостин А. И.* // Укр. матем. журн. 1971. Т. 23, № 3. С. 629–639.
14. *Ядченко А. А.* // Матем. заметки. 1991. Т. 50. В. 3. С. 143–151.

A. A. YADCHENKO

yadchenko56@mail.ru

ON FACTORIZATIONS OF π-SOLVABLE IRREDUCIBLE LINEAR GROUPS

Summary

For finite π-solvable absolutely irreducible linear groups of degree $n < 2|H|$ over a field of zero characteristic with a π-Hall *TI*-subgroup H of a nonprimary odd order that is not normal, the existence of certain factorizations is proved.