Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 **сентябрь–октябрь** **Том 58 № 5**

УДК 519.6+517.983.54

П. П. ЗАБРЕЙКО[1], *О. В. МАТЫСИК*[2]

ТЕОРЕМА М. А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ С САМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

(Представлено членом-корреспондентом Л. А. Яновичем)

[1]*Белорусский государственный университет, Минск*
[2]*Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина* *Поступило 04.08.2014*

Метод последовательных приближений – один из основных методов приближенного решения линейных операторных уравнений второго рода $x = Bx + f$ в гильбертовом и банаховом пространствах. Основные теоремы о сходимости этого метода, скорости сходимости, оценках погрешности и т. д. сводятся к исследованию свойств ряда Неймана $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B^n$ для соответствующего оператора B и изложены во многих учебниках, монографиях и статьях, из которых отметим здесь [1; 2]. При этом основная часть этих результатов относится к так называемому некритическому случаю, когда спектральный радиус $\rho(B)$ этого линейного оператора строго меньше 1 – это условие необходимо и достаточно для сходимости ряда Неймана в пространстве операторов. Однако позднее обнаружилось, что ряд Неймана может сходиться (но уже не по норме операторов, а только сильно) и в случаях, когда спектральный радиус $\rho(B)$ соответствующего оператора равен 1. Одним из первых результат в этом направлении был получен М. А. Красносельским [3] (см. также [2]), которым было показано, что для уравнения $x = Bx + f$ с самосопряженным оператором B в гильбертовом пространстве при условии $\|B\| \le 1$ и дополнительном предположении, что –1 не является собственным значением B, последовательные приближения сходятся к одному из решений рассматриваемого уравнения, если только это уравнение разрешимо. Естественно, при $\|B\| < 1$ утверждение теоремы М. А. Красносельского тривиально. Однако при $\|B\| = 1$ эта теорема не является тривиальной, так как в этом случае $\rho(B) = 1$ и уравнение $x = Bx + f$ относится к классу некорректных (ill-posed). Теория последних развивалась независимо и изложена с разных точек зрения и с разной степенью подробности в монографиях [4–12].

Цель сообщения – показать, как упомянутая выше теорема М. А. Красносельского о сходимости последовательных приближений для уравнений с самосопряженными операторами с некоторыми естественными дополнениями содержит в себе основные результаты об итерационных методах приближенного решения некорректных линейных задач в гильбертовом пространстве.

Пусть X – гильбертово пространство. Нам удобно сформулировать теорему М. А. Красносельского в следующем виде

Т е о р е м а 1. *Пусть B – самосопряженный оператор с $\|B\| \le 1$ в гильбертовом пространстве X, не имеющий –1 собственным значением. Пусть уравнение*

$$x = Bx + f, \tag{1}$$

разрешимо. Тогда последовательные приближения

$$x_{n+1} = Bx_n + f \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

при любом начальном условии $x_0 \in X$ сходятся к одному из решений уравнения (1). Более точно, приближения (2) сходятся к решению x_* уравнения (1), для которого $Px_* = Px_0$, где P – ортопроектор на множество собственных векторов оператора B, отвечающих собственному значению 1.

Приведем простую схему доказательства этой теоремы (ср. [2; 3]). Из (1) и (2) очевидным образом вытекают равенства

$$x_n = B^n x_0 + (I + B + \ldots + B^{n-1}) f \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

$$x_* = B^n x_* + (I + B + \ldots + B^{n-1}) f \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

откуда

$$x_n - x_* = B^n (x_0 - x_*),$$

и далее, в силу теорем о спектральном разложении самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (см., напр., [1; 13])

$$\|x_n - x_*\|^2 = \int_{SpB} |\lambda|^{2n} (dE_\lambda (x_0 - x_*), x_0 - x_*), \tag{4}$$

где E_λ – спектральная мера для оператора B. Последовательность $|\lambda|^{2n}$ сходится к нулю всюду на $(-1,1) \cap SpB$. Точка –1 (если она входит в SpB) в условиях теоремы 1 имеет нулевую спектральную меру. Точка 1 (опять-таки, если она входит в SpB) может иметь положительную меру, однако лишь в случае, когда $Px_* \neq Px_0$. Тем самым утверждение теоремы 1 следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

В качестве примера здесь можно рассмотреть в пространстве $X = L_2(\Omega)$, где Ω – некоторое замкнутое множество отрезка [–1, 1] с $1 \in \Omega$ (или $-1 \in \Omega$), уравнение

$$x(t) = tx(t) + f(t).$$

Это уравнение разрешимо в X, если и только если $(1-t)^{-1} f(t) \in L_2(\Omega)$. Последовательные приближения (2) в этом случае имеют вид

$$x_{n+1}(t) = tx_n(t) + f(t)$$

или, что то же самое,

$$x_n(t) = t^n x_0(t) + (1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1}) f(t).$$

Они сходятся в X (при любом $x_0(t) \in L_2(\Omega)$) к функции $(1-t)^{-1} f(t)$, которая по предположению о разрешимости уравнения принадлежит $L_2(\Omega)$. Уравнение в этом примере не является корректным. Аналогичная ситуация имеет место и в случае, если $X = L_2(\Omega, \sigma)$, где σ – некоторая мера на Ω, причем $\sigma(\{-1\}) = 0$. Пример этот носит достаточно общий характер; известно, что каждый самосопряженный оператор с простым спектром подобен оператору умножения на независимую переменную в пространстве $L_2(\Omega, \sigma)$ при подходящем выборе меры σ.

Рассмотрим теперь вопрос о поведении невязок $x_n - Bx_n - f$ для приближений (2). Так как

$$x_n - Bx_n - f = x_n - x_{n+1},$$

то из (3)

$$x_n - Bx_n - f = B^n ((I - B) x_0 - f).$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\|x_n - Bx_n - f\| = \|B^n ((I - B) x_0 - f)\| \leq \|B^n (I - B) x_0\| + \|B^n f\|.$$

Снова из спектральной теоремы для самосопряженных операторов вытекает неравенство

$$\|x_n - Bx_n - f\|^2 \leq \int_{SpB} |\lambda|^{2n} |1 - \lambda|^2 (dE_\lambda x_0, x_0) + \int_{SpB} |\lambda|^{2n} (dE_\lambda f, f). \tag{5}$$

К этому неравенству снова можно применить теоремы Лебега о предельном переходе. В результате получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Пусть B – самосопряженный оператор с $\|B\| \le 1$ в гильбертовом пространстве X, не имеющий -1 собственным значением. Пусть $Pf = 0$, где P – ортопроектор на множество собственных векторов оператора B, отвечающих собственному значению 1. Тогда невязки $x_n - Bx_n - f$ для последовательных приближений (2) при любом начальном условии $x_0 \in X$ сходятся к нулю.*

Отметим, что условие $Pf = 0$ в этой теореме необходимо, но в общем случае не достаточно для разрешимости уравнения (1). Таким образом, невязки для последовательных приближений могут сходиться к нулю и в том случае, когда исходное уравнение вообще не имеет решений.

Наиболее важными вопросами в теории итерационных методов являются вопросы о скорости сходимости, о наличии свойства устойчивости метода, в частности, свойства сохранения сходимости последовательных приближений к точному решению, а невязок к нулю при малых возмущениях правых частей или при ошибках при проведении вычислений. Эти свойства достаточно хорошо изучены (см., напр., [8; 11; 12]) в некритическом случае, когда $\rho(B) < 1$. Однако в интересующем нас критическом случае, когда $\|B\| = \rho(B) = 1$, ситуация оказывается совершенно иной.

Из теоремы Банаха–Штейнгауза [1] легко можно вывести, что равномерная на любом шаре $\|f\| \le r$ или на любом шаре $\|x_0\| \le r$ сходимость итераций (2) влечет за собой неравенство $\rho(B) < 1$. В рассмотренном выше модельном примере видно, что эта скорость неравномерна ни на каком шаре $\|f\| \le r$, а определяется тем, насколько быстро стремится в бесконечность f при стремлении t к 1.

Как показывают простые примеры (и равенства (4), (5)), скорость сходимости последовательных приближений к точному решению и невязок к нулю существенно зависит от правой части f уравнения (1). Оценить эти скорости сходимости можно более точно для функций f из некоторых (обычно незамкнутых!) подпространств $\widetilde{X}$ пространства X. Среди таких подпространств наиболее простыми являются подпространства истокообразно представимых функций. Эти подпространства определяются при помощи некоторой определенной на SpB оператора B функции $\theta(\lambda)$ равенством $X(\theta) = \theta(B)X$ элементов вида

$$\tilde{h} = \int\limits_{SpB} \theta(\lambda) dE_\lambda h \quad (h \in X).$$

Формула (4) при $x_0 - x_* \in X(\theta)$ переписывается в виде

$$\|x_n - x_*\|^2 = \int\limits_{SpB} |\lambda|^{2n} |\theta(\lambda)|^2 (dE_\lambda h, h).$$

Из нее в силу спектральной теоремы для самосопряженных операторов следует неравенство

$$\|x_n - x_*\| \le \gamma_n \|h\| \; (x_0 - x_* = \theta(B)h, \; h \in X), \tag{6}$$

где

$$\gamma_n = \max_{\lambda \in SpB} |\lambda|^n |\theta(\lambda)|. \tag{7}$$

Если $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$, то (6) дает квалифицированную оценку скорости сходимости приближений (2) к решению уравнения (1) сразу для всех функций x_0 и f, для которых $x_0 - x_* \in X(\theta)$ $(x_* - Bx_* = f)$. Последнее условие трудно проверяемо, так как x_* неизвестно. Однако оно выполняется, если $f \in X(\tilde{\theta})$, где функции θ и $\tilde{\theta}$ связаны равенством $\theta(\lambda) = (1-\lambda)\tilde{\theta}(\lambda)$. В результате вместо (6) мы имеем оценку

$$\|x_n - x_*\| \le \tilde{\gamma}_n \|h\| \; (x_0 - Bx_0 - f = \tilde{\theta}(B)h, \; h \in X), \tag{8}$$

где

$$\tilde{\gamma}_n = \max_{\lambda \in SpB} |\lambda|^n |\tilde{\theta}(\lambda)|.$$

Аналогично, формула (5) при $(I - B)x_0 - f \in X(\theta)$ приводит к оценке

$$\|x_n - Bx_n - f\| \le \gamma_n \|h\| \; (x_0 - Bx_0 - f = \theta(B)h, \;\; h \in X), \tag{9}$$

где последовательность γ_n снова определяется равенством (7).

Справедлива

Т е о р е м а 3. *Пусть B – самосопряженный оператор с $\|B\| \le 1$ в гильбертовом пространстве X, не имеющий -1 собственным значением. Тогда:*

а) если θ – определенная на спектре SpB функция с $\theta(-1) = \theta(1) = 0$, то $\gamma_n \to 0$ и, следовательно, при $x_0 - x_* \in \theta(B)h$ скорость сходимости приближений (2) к соответствующему решению x_* уравнения (1) оценивается неравенством (6);

б) если θ – определенная на спектре SpB функция с $\theta(1) = 0$, представимая в виде $\theta(\lambda) = (1-\lambda)\tilde{\theta}(\lambda)$ с $\tilde{\theta}(1) = 0$, то $\tilde{\gamma}_n \to 0$ и, следовательно, при $x_0 - Bx_0 - f = \tilde{\theta}(B)h$ скорость сходимости приближений (2) к соответствующему решению x_* уравнения (1) оценивается неравенством (8);

в) если θ – определенная на спектре SpB функция с $\theta(-1) = \theta(1) = 0$, то $\gamma_n \to 0$ и, следовательно, при $x_0 - Bx_0 - f = \theta(B)h$ скорость сходимости невязок для приближений (2) к нулю оценивается неравенством (9).

Достаточно показать, что $\gamma_n \to 0$ и $\tilde{\gamma}_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что $|\theta(\lambda)| < \varepsilon$ при $1 - \delta < |\lambda| \le 1$. На множестве $M = SpB \setminus ((-1, -1+\delta) \cup (1-\delta, 1))$ выполняется неравенство $|\lambda| < 1 - \delta$. Поэтому при $\lambda \in M$ справедливо неравенство $|\lambda|^n \le (1-\delta)^n$ и, значит, $|\lambda|^n < \varepsilon$ при $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\delta)}$. Но при $\lambda \in SpB \cap ((-1, -1+\delta) \cup (1-\delta, 1))$ также справедливо неравенство $|\lambda|^n |1-\lambda| < \varepsilon$ и, значит, это неравенство верно при всех $\lambda \in SpB$. Так как ε произвольно, а n не зависит от λ, то $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Соотношение $\tilde{\gamma}_n \to 0$ доказывается аналогично.

Отметим, что условия теоремы 3 содержат начальное приближение x_0. Если, как это обычно желается $x_0 = 0$, то условия теоремы 3 сводятся к предположениям о самом решении x_* или о заданном элементе f. Последнее справедливо и в том случае, когда x_0 берется ненулевым, но «достаточно хорошим» ($x_0 \in \theta(B)X$, $x_0 - Bx_0 \in \theta(B)X$).

Наконец, отметим также, что по существу утверждения а) и в) теоремы 3 означают сходимость к нулю по норме соответственно последовательностей операторов $B^n\theta(B)$, а утверждение б) – сходимость к нулю последовательности операторов $B^n T\theta(B)$, где T – квазиобратный (возможно, неограниченный) оператор для оператора $(I - B)$ (т. е. $(I-B)T(I-B) = I - B$).

Пусть теперь снова для самосопряженного оператора B выполнены условия теоремы 1, причем $\|B\| = 1$ и, следовательно, $\rho(B) = 1$. Пусть уравнение (1) разрешимо. В этом случае последовательные приближения (2) сходятся к одному из решений x_* уравнения (1). Рассмотрим теперь вместо точных приближений (2) приближения для случая, когда правая часть уравнения (1) задана приближенно или когда при вычислениях этих приближений на каждом шаге делается ошибка. В первом случае эти новые приближения x'_n записываются в виде

$$x'_{n+1} = Bx'_n + \tilde{f} \;\; (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

с приближенной правой частью $\tilde{f}$, причем $\|\tilde{f} - f\| \le \delta$, где δ – некоторое малое положительное число. Во втором случае новые приближения x''_n записываются в виде

$$x''_{n+1} = Bx''_n + f_n \;\; (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

в предположении, что $\|f_n - f\| \le \delta$, где δ – снова некоторое малое положительное число. В первом случае из равенства (10) немедленно вытекает

$$x'_n = B^n x_0 + B^{n-1}\tilde{f} + \ldots + B\tilde{f} + \tilde{f},$$

откуда, в силу (3),

$$x'_n = x_n + B^{n-1}(\tilde{f} - f) + \ldots + B(\tilde{f} - f) + (\tilde{f} - f). \tag{12}$$

Во втором случае из (11) немедленно следует, что

$$x''_n = B^n x_0 + B^{n-1} f_1 + \ldots + Bf_{n-2} + f_{n-1},$$

откуда, снова в силу (3),

$$x_n'' = x_n + B^{n-1}(f_1 - f) + \ldots + B(f_{n-2} - f) + (f_{n-1} - f). \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует

$$\|x_n' - x_n\| \le \|B^{n-1}\| \|\tilde{f} - f\| + \ldots + \|B\| \|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{f} - f\| \le n\delta,$$

$$\|x_n'' - x_n\| \le \|B^{n-1}\| \|f_1 - f\| + \ldots + \|B\| \|f_{n-2} - f\| + \|f_{n-1} - f\| \le n\delta,$$

и, таким образом,

$$\|x_n' - x_*\| \le \|x_n' - x_n\| + \|x_n - x_*\| \le \|x_n - x_*\| + n\delta, \tag{14}$$

$$\|x_n'' - x_*\| \le \|x_n'' - x_n\| + \|x_n - x_*\| \le \|x_n - x_*\| + n\delta, \tag{15}$$

где x_* – точное решение уравнения (1).

Из неравенств (14), (15) сходимость x_n' и x_n'' к x_* или даже близость приближений x_n' и x_n'' к x_* не вытекает! Действительно, правая часть этих неравенств при $n \to \infty$ стремится к бесконечности.

Однако, как оказывается, приведенные выше оценки позволяют указывать приближения x_n' и x_n'' достаточно близкие (и даже, если брать сколь угодно малые δ сколь угодно близкие!) к точному решению x_* уравнения $x = Bx + f$.

В самом деле, как показано выше, при каждом x_0 приближения x_n сходятся к x_*. Иными словами, справедливы неравенства

$$\|x_n - x_*\| \le \mu(n),$$

где $\mu(\cdot)$ – зависящая от x_0 и x_* (и, следовательно, от x_0 и f) функция, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \mu(n) = 0.$$

При этом без ограничения общности можно считать, что $\mu(\cdot)$ строго убывает и, значит, имеет обратную $\mu^{-1}(\cdot)$. Неравенства (14) и (15) могут быть переписаны в виде

$$\|x_n' - x_*\| \le \mu(n) + n\delta \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{16}$$

$$\|x_n'' - x_*\| \le \mu(n) + n\delta \ (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим неравенство

$$\mu(n) + n\delta < \varepsilon. \tag{18}$$

Выберем произвольное $\varepsilon' < \varepsilon$; тогда при

$$n > \mu^{-1}(\varepsilon')$$

справедливо неравенство $\mu(n) < \varepsilon'$ и для выполнения неравенства (18) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$n < \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\delta}. \tag{19}$$

Неравенства (18) и (19) совместны, если

$$\delta\mu^{-1}(\varepsilon') < \varepsilon - \varepsilon'. \tag{20}$$

Последнего вида можно добиться за счет малости δ. Итак, если (20) верно, то из (14), (15) вытекает, что при всех n, для которых

$$\mu^{-1}(\varepsilon') < n < \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\delta}$$

справедливо неравенство $\|\tilde{x}_n - x_*\| < \varepsilon$, где $\tilde{x}_n = x_n'$ для случая (10) и $\tilde{x}_n = x_n''$ для случая (11). Иными словами,

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\nu\to\infty}\left(\inf_{\nu\le n<\infty}\left\|\tilde{x}_n - x_*\right\|\right)=0.$$

Последнее соотношение обычно считается эквивалентным сходимости итерационных методов в случае некорректных задач. Отметим, что рассматриваемая в этом разделе задача является примером такой некорректной задачи.

Отметим, что при уменьшении ε промежуток $\left[\mu^{-1}(\varepsilon'), \dfrac{\varepsilon-\varepsilon'}{\delta}\right)$, на котором итерационная процедура (2) приводит к более точным приближениям, вообще говоря, сдвигается вправо, а при $\varepsilon\to 0$ «убегает» в бесконечность. Однако здесь существует важное исключение. Именно, если в качестве приближения x_0 взять само решение x_*, то в неравенствах (16) и (17) можно взять казалось бы наилучшую функцию: $\mu(0)=0$. Тогда неравенства (16) и (17) обращаются в неравенство $n\delta<\varepsilon$ и рассуждения, приведенные выше, вырождаются. Более того, теперь из неравенств (16) и (17) можно сделать лишь вывод, что n должно быть ограничено сверху, а наилучшая оценка погрешности верна при $n=1$. Иными словами, теперь (16) и (17) влекут за собой «странный» на первый взгляд вывод, что итерационные процедуры (10) и (11) бессмысленны. Однако этот вывод правильный – если начальное приближение совпадает с точным решением x_*, то уточнять это приближение какими-либо итерационными процедурами бессмысленно.

В связи с последним замечанием удобнее считать, что величина δ не постоянная; в этом случае сходимость итерационного метода для некорректной задачи, как нетрудно видеть, означает справедливость соотношения

$$\lim_{n\to\infty,\ n\delta_n\to 0}\left\|\tilde{x}_n - x_*\right\|=0. \tag{21}$$

Из приведенных рассуждений вытекает

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть либо правая часть уравнения (1) задана с ошибкой* $\delta>0$, *либо приближения (1) вычисляются с ошибками, не превышающими* $\delta>0$. *Тогда соответственно приближения (10) в первом случае и (11) во втором сходятся в описанном выше смысле к соответствующему решению* x_* *уравнения (1) (т. е. справедливо соотношение (21)).*

Литература

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. СПб., 2004.
2. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П.* и др. Приближённое решение операторных уравнений. М., 1969.
3. *Красносельский М. А.* // Успехи математических наук. 1961. Т. 15, вып. 3.
4. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и её приложения. М., 1978.
5. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1979.
6. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
7. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М., 1986.
8. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М., 1989.
9. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М., 2004.
10. *Gilyazov S. F., Gol'dman N. L.* Regularization of ill-posed problems by iteration methods. Dordrecht ets., 2000.
11. *Савчук В. Ф., Матысик О. В.* Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Брест, 2008.
12. *Матысик О. В.* Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач. Брест, 2014.
13. *Данфорд Н., Шварц Д.* Линейные операторы. Спектральная теория. М., 1966.

P. P. ZABREIKO, O. V. MATYSIK

zabreiko@mail.ru, matysikoleg@mail.ru

THEOREM M. A. KRASNOSELSKI AND ILL-POSED LINEAR PROBLEMS WITH SELF-ADJOINT OPERATORS

Summary

The article shows how theorem M. A. Krasnoselski on the convergence of successive approximations for equations with self-adjoint operators with some natural assumptions contains the main results of the iteration methods for the approximate solution of linear ill-posed problems in Hilbert space.