Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **март–апрель** **Том 60 № 2**

УДК 517.956.32

Академик В. И. КОРЗЮК [1], *А. А. МАНДРИК* [2]

ПЕРВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

[1]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
korzyuk@bsu.by
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
mndkaa@gmail.com

Изучаются классические решения граничных задач для нестрогого гиперболического уравнения третьего порядка. Уравнение задается в полуполосе двух независимых переменных. На нижнем основании области задаются условия Коши, а на боковых границах – условия Дирихле. Методом характеристик выписываются в аналитическом виде решения рассматриваемых задач. Доказывается единственность решений.

Ключевые слова: нестрого гиперболическое уравнение, смешанная задача, условия согласования.

V. I. KORZYUK[1], *A. A. MANDRYK*[2]

FIRST MIXED PROBLEM FOR THE THIRD-ORDER HOMOGENEOUS UNSTRICT HYPERBOLIC EQUATION

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
korzyuk@bsu.by
[2]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
mndkaa@gmail.com

In this article we research the classical solutions of the boudary problems for the third-order unstrict hyperbolic equation. The equation is defined in the half-strip of two independent variables. There are Cauchy's conditions on the bottom of the area and Dirichlet's conditions on the side boundary. Using the method of characteristics, the analytic solutions of the considered problem are written out. The uniqueness of the solutions is proved.

Keywords: not strictly hyperbolic equation, mixed problem, adjusting conditions.

Введение. Граничные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка возникают при описании конкретных физических явлений. Например, при математическом моделировании распространения линейных аккустических волн в среде с дисперсией [1, с. 87]. Свойства этих уравнений и задач изучались в [2; 3].

Большая часть литературы по гиперболическим уравнениям посвящена задаче Коши. В работах [4–6] рассматривались обощенные решения для смешанных задач гиперболических уравнений третьего порядка, где доказаны теоремы существования и единственности таких решений в подходящих функциональных пространствах. Отметим также работы [7–9], где изучались функциональными методами граничные задачи на плоскости в случае двух независимых переменных.

Исследование или отыскание классических решений задач всегда было актуальным для теории дифференциальных уравнений с частными производными. Заметим, что классические решения определяются не только правильным выбором вида граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными, но и условиями согласования для функций, входящих в условия и уравнения. Классическому решению посвящена работа [10], в которой рассмотрена первая смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения третьего порядка с разными характеристиками.

Постановка задачи. В области $Q=(0,+\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $(t,x)\in Q\subset R^2$ рассмотрим однородное нестрого гиперболическое уравнение третьего порядка

$$(\partial_t - a\partial_x + b_1)(\partial_t + a\partial_x + b)^2 u(t,x) = 0, (t,x)\in \overline{Q}=[0,\infty)\times[0,l], \tag{1}$$

где a, b, b_1, l – действительные числа; $\overline{Q}$ – замыкание области Q; ∂_t, ∂_x – частные производные по t и x соответственно. В общем случае $\partial_t^k\partial_x^p = \dfrac{\partial^{k+p}}{\partial_t^k\partial_x^p}$ – частные производные по t и x порядка $k+p$, где k и p – целые неотрицательные числа. Для определенности положим $a>0$. К уравнению (1) на нижнем основании области Q присоединим условия Коши

$$\partial_t^i u(0,x) = \varphi_i(x),\ i=\overline{0,2},\ x\in[0,l], \tag{2}$$

а на боковых частях границы ∂Q задаются граничные условия вида

$$\begin{gathered}\partial_x^i u(t,0) = \psi_i(t),\ i\in\overline{0,1},\ t\in[0,+\infty),\\ u(t,l)=\mu(t),\ t\in[0,+\infty).\end{gathered} \tag{3}$$

Согласно работе [11] общее решение уравнения (1) представимо в виде линейной комбинации трех произвольных функций

$$u(t,x) = e^{-b_1 t} f_1(x+at) + e^{-bt}[f_2(x-at)t + f_3(x-at)] \tag{4}$$

с соответствующими областями определения $D(f_i)$, $i=\overline{1,3}$. Нетрудно видеть, что $D(f_1)=[0,+\infty)$ и $D(f_i)=(-\infty,l]$, $i=\overline{2,3}$, если $(t,x)\in\overline{Q}$. Обозначим через $C^\infty(\overline{Q})$ множество бесконечно дифференцируемых функций, заданных на $\overline{Q}$, а через $C^{i,j}(\overline{Q})$ множество функций, заданных на $\overline{Q}$, которые i раз непрерывно дифференцируемы по первому аргументу и j раз – по второму.

Полученный результат подытожим в виде леммы.

Л е м м а 1. *Общее решение уравнения (1) из класса* $C^\infty(\overline{Q})$ *представимо в виде (4), где и* f_i – *произвольные бесконечно дифференцируемые на* $D(f_i)$, $i=\overline{1,3}$, *функции.*

Таким образом, чтобы отыскать решение $u:\mathbb{R}^2\supset\overline{Q}\ni(t,x)\to u(t,x)\in\mathbb{R}$ задачи (1)–(3) необходимо выбрать функции f_i, $i=\overline{1,3}$, такими, чтобы они в сумме вида (4) удовлетворяли еще условиям (2), (3).

Условия согласования. Введем для значений функций и их производных в случае одной независимой переменной следующие обозначения. Пусть $g:R\to g(z)$ – функция переменной z. Тогда $\mathrm{d}^k g(z) = \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}g(z)$ – производная k-го порядка; $g(a)$, $\mathrm{d}^k g(a)$ – значения функции g и ее производной $\mathrm{d}^k g$ k-го порядка в точке a и т. д.

Если функцию u вида (4) подставить в условия (2), то из полученной системы путем интегрирования значения функций f_j $(j=\overline{1,3})$ будут содержать произвольные действительные постоянные C_1 и C_2. Между ними имеется функциональная связь. Чтобы установить ее, введем следующие функции, которые будем использовать далее

$$\Psi_1(y,C_1,C_2) = e^{\frac{(b_1-b)y}{2a}}(C_1y+C_2),$$

$$\Psi_2(y,C_1,C_2) = -2ae^{\frac{(b_1-b)y}{2a}}C_1,$$

$$\Psi_3(y,C_1,C_2) = -e^{\frac{(b_1-b)y}{2a}}(C_1y+C_2),$$

где отображения $\Psi_i:R^3\to R$ принадлежат классу бесконечно дифференцируемых функций.

Л е м м а 2. *Для любых t, x, C_1, $C_2\in R$ верно тождество*

$$e^{-b_1t}\Psi_1(x+at,C_1,C_2) + e^{-bt}(t\Psi_2(x-at,C_1,C_2)+\Psi_3(x-at,C_1,C_2))\equiv 0. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится непосредственной подстановкой аналитических выражений функций Ψ_i, $i=\overline{1,3}$, в (5) и подсчетом коэффициентов при C_1 и C_2. Действительно,

$$e^{-b_1 t}\Psi_1(x+at,C_1,C_2)+e^{-bt}(t\Psi_2(x-at,C_1,C_2)+\Psi_3(x-at,C_1,C_2))=$$

$$e^{-b_1 t}\left[e^{\frac{(b_1-b)(x+at)}{2a}}(C_1(x+at)+C_2)\right]+e^{-bt}\left[-2ate^{\frac{(b_1-b)(x-at)}{2a}}C_1\right]+$$

$$e^{-bt}\left[-e^{\frac{(b_1-b)(x-at)}{2a}}(C_1(x-at)+C_2)\right]=C_2\left(e^{\frac{(b_1-b)x-at(b+b_1)}{2a}}-e^{\frac{(b_1-b)x-at(b+b_1)}{2a}}\right)+$$

$$C_1 e^{\frac{(b_1-b)x-at(b+b_1)}{2a}}((x+at)-(x-at)-2at)\equiv 0.$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а 1. *Если выполняются следующие условия гладкости на заданные функции:* $\varphi_i\in C^\infty([0,l])$, $i=\overline{0,2}$, $\psi_j\in C^\infty([0,+\infty))$, $j=\overline{0,1}$, $\mu\in C^\infty([0,+\infty))$, *то задача (1)–(3) однозначно разрешима в классе* $C^\infty(\overline{Q})$, *тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:*

$$\mathrm{d}^k\left(e^{\frac{(b-b_1)(l-y)}{a}}\left[(l-y)\mathrm{d}\varphi_0(2l-y)+\frac{b(l-y)-a}{a}\varphi_0(2l-y)+\frac{l-y}{a}\varphi_1(2l-y)\right]+\right.$$

$$\left.e^{\frac{b_1(y-l)}{a}}\mu\left(\frac{y-l}{a}\right)+\frac{1}{4a^2}\int_0^{2l-y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)|_{y=l}= \tag{6}$$

$$\mathrm{d}^k\left(\frac{1}{4a^2}\int_0^y\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)|_{y=l},\ k\ge 0;$$

$$\mathrm{d}^k\left(e^{-\frac{by}{a}}\left[\mathrm{d}\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+b\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+a\psi_1\left(-\frac{y}{a}\right)\right]-\frac{1}{2a}\int_0^{-y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}dz\right)|_{y=0}=$$

$$\mathrm{d}^k\left(\varphi_1(y)+b\varphi_0(y)+a\mathrm{d}\varphi_0(y)-\frac{1}{2a}\int_0^y\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}dz\right)|_{y=0},\ k\ge 0, \tag{7}$$

$$\mathrm{d}^k\left(e^{-\frac{by}{a}}\left[\frac{y}{a}\mathrm{d}\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+\frac{by+a}{a}\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+y\psi_1\left(-\frac{y}{a}\right)\right]-\right.$$

$$\left.\frac{1}{4a^2}\int_0^{-y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)|_{y=0}= \tag{8}$$

$$\mathrm{d}^k\left(\varphi_0(y)-\frac{1}{4a^2}\int_0^y\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)|_{y=0},\ k\ge 0,$$

где $\Phi(y)=\varphi_2(y)+2b\varphi_1(y)+2a\mathrm{d}\varphi_1(y)+b^2\varphi_0(y)+2ab\mathrm{d}\varphi_0(y)+a^2\mathrm{d}^2\varphi_0(y)$, $y\in[0,l]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой общего решения (4) и подставим ее в начальные условия (2), в результате получим систему уравнений

$$\begin{gathered}f_1(x)+f_3(x)=\varphi_0(x),\\ -b^{(1)}f_1(x)+a\mathrm{d}f_1(x)+f_2(x)-bf_3(x)-a\mathrm{d}f_3(x)=\varphi_1(x),\\ (b_1)^2f_1(x)-2ab_1\mathrm{d}f_1(x)+a^2\mathrm{d}^2f_1(x)-2bf_2(x)-\\ 2a\mathrm{d}f_2(x)+b^2f_3(x)+2ab\mathrm{d}f_3(x)+a^2\mathrm{d}^2f_3(x)=\varphi_2(x),\end{gathered} \tag{9}$$

при $x\in[0,l]$. Решив систему (9), получаем выражения для функций функций f_i, $i=\overline{1,3}$, на отрезке $[0,l]$

$$f_3(y)=\varphi_0(y)-\frac{1}{4a^2}\int_0^y \Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz+\Psi_3(y,C_1,C_2),$$

$$f_2(y)=\varphi_1(y)+b\varphi_0(y)+a\mathrm{d}\varphi_0(y)-$$

$$\frac{1}{2a}\int_0^y \Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}dz+\Psi_2(y,C_1,C_2), \qquad (10)$$

$$f_1(y)=\frac{1}{4a^2}\int_0^y \Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz+\Psi_1(y,C_1,C_2),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Таким образом, функции $f_i,\ i=\overline{1,3},$ однозначно определяются из начальных условий (2) на отрезке $[0,l]$ с точностью до констант C_1, C_2. Несмотря на то что выражения для функций $f_i(y),\ i=\overline{1,3},$ на отрезке $[0,l]$ содержат константы C_1 и C_2, при подстановке в формулу общего решения (4) они взаимосокращаются (см. лемму 2) и мы получаем единственное решение в области $Q_0=\{(t,x)\,|\,t\ge 0, 0\le x+at\le l, 0\le x-at\le l\}$ задачи (1)–(3), которое определяется формулой

$$u(t,x)=e^{-bt}(t[\varphi_1(x-at)+b\varphi_0(x-at)+a\varphi_0'(x-at)]+\varphi_0(x-at))+$$

$$\frac{1}{4a^2}e^{\frac{-ab_1-ab}{2a}t}\int_{x-at}^{x+at}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(x-z)}(x+at-z)dz.$$

Далее находим значения функции f_1 на множестве $[l,+\infty)$, а функций $f_i,\ i=\overline{2,3},$ – на $(-\infty,0]$. Введем обозначения

$$f_1^{(k)}(y)=f_1(y), y\in[kl,(k+1)l],$$

$$f_j^{(k)}(y)=f_j(y), y\in[-kl,(1-k)l],\ j=2,3.$$

В соответствии с данными обозначениями из начальных условий нами были определены функции $f_1^{(0)}(y)$, $f_2^{(0)}(y)$ и $f_3^{(0)}(y)$ формулами (10).

Подставив в граничные условия (3) формулу общего решения (4), получим следующую систему уравнений:

$$e^{-b_1t}f_1(at+l)+e^{-bt}(tf_2(l-at)+f_3(l-at))=\mu(t),\ t\in[0,+\infty),$$

$$e^{-b_1t}f_1(at)+e^{-bt}(tf_2(-at)+f_3(-at))=\psi_0(t),\ t\in[0,+\infty),$$

$$e^{-b_1t}\mathrm{d}f_1(at)+e^{-bt}(t\mathrm{d}f_2(-at)+\mathrm{d}f_3(-at))=\psi_1(t)\ \ t\in[0,+\infty).$$

Рассматривая эту же систему на отрезках $t\in\left[k\frac{l}{a},(k+1)\frac{l}{a}\right]$, где $k=\overline{0,\infty}$, получим

$$f_1^{(k+1)}(y)=e^{b_1\frac{y-l}{a}}\mu\left(\frac{y-l}{a}\right)-e^{(b_1-b)\frac{y-l}{a}}\left(\frac{y-l}{a}f_2^{(k)}(2l-y)+f_3^{(k)}(2l-y)\right),$$
$$y\in[(k+1)l,(k+2)l], \qquad (11)$$

$$f_2^{(k+1)}(y)=e^{-\frac{by}{a}}\left(b\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+\mathrm{d}\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+a\psi_1\left(-\frac{y}{a}\right)\right)-$$
$$(b-b_1)e^{(b_1-b)\frac{y}{a}}f_1^{(k)}(-y)-2ae^{(b_1-b)\frac{y}{a}}\mathrm{d}f_1^{(k)}(-y),\ y\in[-(k+1)l,-kl], \qquad (12)$$

$$f_3^{(k+1)}(y)=e^{-\frac{by}{a}}\left(\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+\frac{by}{a}\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+\frac{y}{a}\mathrm{d}\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+y\psi_1\left(-\frac{y}{a}\right)\right)-$$

$$e^{(b_1-b)\frac{y}{a}}f_1^{(k)}(-y)+(b_1-b)\frac{y}{a}e^{(b_1-b)\frac{y}{a}}f_1^{(k)}(-y)-2ye^{(b_1-b)\frac{y}{a}}\mathrm{d}f_1^{(k)}(-y), \quad (13)$$

$$y\in[-(k+1)l,-kl].$$

Из начальных условий мы установили, что функции $f_i^{(0)}$, $i=\overline{1,3}$, имеют следующий вид:

$$f_i^{(0)}(y)=F_i^{(0)}(y)+\Psi_i(y,C_1,C_2),\ i=\overline{1,3},$$

$F_i^{(0)}(y)$ не зависят от констант C_1 и C_2. Докажем далее, что функции $f_i^{(k)}$ также представимы в таком виде, т. е.

$$f_i^{(k)}(y)=F_i^{(k)}(y)+\Psi_i(y,C_1,C_2),\ i=\overline{1,3},\ k\ge 1, \quad (14)$$

где функции $F_i^{(k)}(y)$ не зависят от констант C_1 и C_2 и определяются однозначно. Отсюда следует, что все функции $f_i^{(k)}$, $i=\overline{1,3}$, $k\ge 0$, также будут содержать в своем аналитическом представлении эти константы. Покажем, что для любого k функции f_i^k будут содержать одно и тоже слагаемое, зависящее от C_j, $j=1,2$.

Предположим, что это выполняется для некоторого $k\ge 1$, тогда согласно формулам (11)–(13) для $k+1$ функции $f_i^{(k+1)}$ определяются соотношениями

$$f_1^{(k+1)}(y)=F_1^{(k+1)}(y)-e^{(b_1-b)\frac{y-l}{a}}\left(\frac{y-l}{a}\Psi_2(2l-y)+\Psi_3(2l-y)\right),\ y\in[(k+1)l,(k+2)l],$$

$$f_2^{(k+1)}(y)=F_2^{(k+1)}(y)-(b-b_1)e^{(b_1-b)\frac{y}{a}}\Psi_1(-y)-2ae^{(b_1-b)\frac{y}{a}}\mathrm{d}\Psi_1(-y),\ y\in[-(k+1)l,-kl],$$

$$f_3^{(k+1)}(y)=F_3^{(k+1)}(y)-e^{(b_1-b)\frac{y}{a}}\Psi_1(-y)+$$

$$(b_1-b)\frac{y}{a}e^{(b_1-b)\frac{y}{a}}\Psi_1(-y)-2ye^{(b_1-b)\frac{y}{a}}\mathrm{d}\Psi_1(-y),\ y\in[-(k+1)l,-kl].$$

Непосредственными вычислениями для значений функций Ψ_i, $i=\overline{1,3}$, доказываются следующие формулы:

$$\Psi_1(y,C_1,C_2)=-e^{(b_1-b)\frac{y-l}{a}}\left(\frac{y-l}{a}\Psi_2(2l-y)+\Psi_3(2l-y)\right),$$

$$\Psi_2(y,C_1,C_2)=-(b-b_1)e^{(b_1-b)\frac{y}{a}}\Psi_1(-y)-2ae^{(b_1-b)\frac{y}{a}}\mathrm{d}\Psi_1(-y),$$

$$\Psi_3(y,C_1,C_2)=-e^{(b_1-b)\frac{y}{a}}\Psi_1(-y)+$$

$$(b_1-b)\frac{y}{a}e^{(b_1-b)\frac{y}{a}}\Psi_1(-y)-2ye^{(b_1-b)\frac{y}{a}}\mathrm{d}\Psi_1(-y).$$

Таким образом, отсюда следует, что если для функций $f_i^{(k)}$, $i=\overline{1,3}$, $k=\overline{1,\infty}$, справедливо представление (14), то функции $f_i^{(k+1)}$, $i=\overline{1,3}$, также представимы в таком виде, т. е.

$$f_1^{(k+1)}(y)=F_1^{(k+1)}(y)+\Psi_1(y,C_1,C_2),\ y\in[(k+1)l,(k+2)l],$$

$$f_j^{(k+1)}(y)=F_j^{(k+1)}(y)+\Psi_j(y,C_1,C_2),\ y\in[-(k+1)l,-kl],\ j=2,3.$$

Так как для функции $f_i^{(0)}$, $i=\overline{1,3}$, это представление также имеет место (см. (10)), то, следовательно, оно выполняется для любого $k=\overline{1,\infty}$. Из доказанного утверждения и леммы 2 следует, что решение $u(t,x)$ в каждой точки области Q не будет в своем аналитическом представлении содержать C_1 и C_2.

Пользуясь этими формулами определим функции $f_1^{(1)}$, $f_2^{(1)}$ и $f_3^{(1)}$

$$f_1^{(1)}(y)=e^{\frac{(b-b_1)(l-y)}{a}}\left[\int_0^{2l-y}\frac{e^{\frac{(b_1-b)(2l-y-z)}{2a}}(y-z)\Phi(z)}{4a^2}dz+(l-y)\mathrm{d}\varphi_0(2l-y)+\right.$$

$$\left.\frac{b(l-y)-a}{a}\varphi_0(2l-y)+\frac{l-y}{a}\varphi_1(2l-y)\right]+e^{\frac{b_1(y-l)}{a}}\mu\left(\frac{y-l}{a}\right)+\Psi_1(y,C_1,C_2),$$

$$f_2^{(1)}(y)=e^{-\frac{by}{a}}\left[\mathrm{d}\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+b\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+a\psi_1\left(-\frac{y}{a}\right)-\int_0^{-y}\frac{e^{\frac{b(y+z)+b_1(y-z)}{2a}}\Phi(z)}{2a}dz\right]+\Psi_2(y,C_1,C_2),$$

$$f_3^{(1)}(y)=e^{-\frac{by}{a}}\left[\int_0^{-y}-\frac{(y-z)e^{\frac{b(y+z)+b_1(y-z)}{2a}}\Phi(z)}{4a^2}dz+\frac{y}{a}\mathrm{d}\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+\frac{by+a}{a}\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+y\psi_1\left(-\frac{y}{a}\right)\right]+$$
$$\Psi_3(y,C_1,C_2).$$

Для того чтобы решение (4) принадлежало классу $C^{\infty}(Q)$, небходимо чтобы функции $f_i(y)$, $i=\overline{1,3}$, были бесконечно дифференцируемы на своих областях определения. Поскольку функции f_i состоят из функций $f_i^{(k)}$, $i=\overline{1,3}$, $k=\overline{0,\infty}$, то и $f_i^{(k)}$ должны быть бесконечно дифференцируемыми. Кроме того, $f_i^{(k)}$ и все их производные должны совпадать в общих точках пересечения отрезков, на которых они определены. Это означает, что должны выполняться следующие условия непрерывности:

$$\begin{gathered}\mathrm{d}^i f_1^{(k)}((k+1)l)=\mathrm{d}^i f_1^{(k+1)}((k+1)l),\\ \mathrm{d}^i f_j^{(k)}(-kl)=\mathrm{d}^i f_j^{(k+1)}(-kl),\ j=2,3,\\ i=\overline{0,\infty},\ k=\overline{0,\infty}.\end{gathered}\tag{15}$$

Условия (15) выполняются для всех $k=\overline{0,\infty}$ тогда и только тогда, когда они выполняются для $k=0$. Это видно из представления значений $f_j^{(k+1)}(y)$ через значения $f_j^k(y)$ функций f_j (см. (11)–(13)).

Далее, условия (15) для $k=0$ выполняются тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (6)–(8). Действительно, подставив значения функций $f_i^{(j)}$, $i=\overline{1,3}$, $j=0,1$, в (15) при $k=0$ и сократив функции $\Psi_i(y,C_1,C_2)$, а также их производные в левой и правой частях равенств, получим равенства (6)–(8).

Таким образом, теорема 1 доказана.

Заключение. В данном сообщении были найдены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости однородной задачи (1)–(3) в классе бесконечно дифференцируемых функций, когда функции из начальных и граничных условий также являются бесконечно дифференцируемыми. Также было получено классическое решение этой задачи, позволяющее находить значение искомой функции и ее производных в каждой точке полуполосы Q. Также интерес для дальнейшего исследования представляет данная задача в случае неоднородного уравнения (1), а также вопрос разрешимости задачи (1)–(3) в классе трижды непрерывно дифференцируемых функций.

Список использованной литературы

1. *Руденко, О. В.* Теоретические основы нелинейной акустики / О. В. Руденко, С. И. Солуян. – М., 1975.

2. *Варламов, В. В.* Об одной задаче распространения волн сжатия в вязкой среде / В. В. Варламов // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1988. – Т. 25, № 10. – С. 1561–1565.

3. *Варламов, В. В.* Об одной начально-краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка / В. В. Варламов // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 8. – С. 1455–1457.

4. *Корзюк, В. И.* Задача Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений третьего порядка / В. И. Корзюк, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 8. – С. 1448–1450.

5. *Корзюк, В. И.* Энергетическое неравенство для граничной задачи гиперболического уравнения с волновым оператором третьего порядка / В. И. Корзюк // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 6. – С. 1014–1022.

6. *Корзюк, В. И.* Граничная задача для гиперболического уравнения с волновым оператором 3-го порядка / В. И. Корзюк // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 2. – С. 208–215.

7. *Thomee, V.* Estimates of the Friedrichs–Lewy type for a hyperbolic equation with three characteristics / V. Thomee // Math. Scand. – 1955. – Vol. 3. – P. 115–123.

8. *Thomee, V.* Estimates of the Friedrichs–Lewy type for mixed problems in the theory of linear hyperbolic differential equation in two independent variables / V. Thomee // Math. Scand. – 1957. – Vol. 5. – P. 93–113.

9. *Thomee, V.* Existence proofs for mixed problems for hyperbolic differential equations in two independent variables by means of the continuity method / V. Thomee // Math. Scand. – 1958. – Vol. 6, N 1. – P. 5–32.

10. *Корзюк, В. И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с волновым оператором / В. И. Корзюк, А. А. Мандрик // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 4. – С. 492–504.

11. *Корзюк, В. И.* Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 700–709.

Поступило в редакцию 05.10.2015