

УДК 519.63

П. П. МАТУС<sup>1</sup>, В. Т. К. ТУЕН<sup>2</sup>, Ф. Ж. ГАСПАР<sup>3</sup>**МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА**

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

<sup>1</sup>Институт математики НАН Беларуси, Минск<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Минск<sup>3</sup>Университет Сарагосы, Испания

Поступило 01.10.2014

**Введение.** Монотонные разностные схемы играют важную роль при математическом моделировании прикладных задач, так как они позволяют получить численное решение без нефизических осцилляций. Для линейных задач под монотонностью понимаются схемы с положительными коэффициентами или схемы, удовлетворяющие сеточному принципу максимума [1]. При этом важно сохранить второй порядок аппроксимации по пространственной переменной. При построении вычислительных алгоритмов для параболических уравнений с краевыми условиями второго и третьего рода обычно используется аппроксимация уравнения на границе области. Однако монотонность таких алгоритмов в научной литературе не установлена. Более часто используются фиктивные узлы  $x_0 = -\frac{h}{2}$ ,  $x_{N+1} = l + \frac{h}{2}$ . В случае краевых условий третьего рода монотонные схемы для параболических уравнений исследованы в [7].

В настоящей работе для параболических уравнений со смешанными условиями первого и второго рода строятся схемы, которые являются монотонными. Кроме того, для них устанавливается важное следствие принципа максимума, на основании которого можно сделать вывод об устойчивости алгоритма в равномерной норме. В основе конструкции лежит идея использования полуцелых узлов в граничных точках задания краевых условий второго или третьего рода.

Полученные результаты обобщаются для построения аналогичных алгоритмов для уравнений пороупругости в одномерном случае.

**Монотонные разностные схемы для линейного параболического уравнения с граничными условиями смешанного типа.** В области  $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$ ,  $\bar{\Omega} = \{x : 0 \leq x \leq l\}$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ,  $\partial\Omega = \{x = 0, x = l\}$  для линейного неоднородного параболического уравнения рассмотрим начально-краевую задачу со смешанными граничными условиями следующего типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \quad t \in (0, T]. \quad (3)$$

Для построения монотонных алгоритмов поток  $\frac{\partial u}{\partial x}$  естественно относить к полуцелым узлам по пространству, а приближенное решение будем вычислять как обычно в целых узлах. Для заданных граничных условий это приводит к необходимости введения следующей равномерной пространственно-временной сетки  $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ :

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, \quad i = \overline{0, N+1}, \quad h = \frac{l}{N+1/2}, \quad x_{N+1/2} = l \right\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \left\{ t_n = n\tau, \quad n = \overline{0, N_0}, \quad \tau N_0 = T \right\}.$$

Предполагается, что решение задачи (1)–(3) может быть непрерывным образом продолжено в область  $\tilde{Q}_T = \tilde{\Omega} \times [0, T]$ ,  $\tilde{\Omega} = \left\{ x: 0 \leq x \leq l + \frac{h}{2} \right\}$ .

На сетке  $\bar{\omega}_{h\tau}$  исходную дифференциальную задачу аппроксимируем чисто неявной разностной схемой:

$$y_{t,i} = \hat{y}_{\bar{x}\bar{x},i} + \hat{f}_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N+1}, \quad (5)$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \quad y_{\bar{x}, N+1}^{n+1} = 0. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что схема (4)–(6) аппроксимирует дифференциальную задачу с порядком  $O(h^2 + \tau)$  во всех узлах сетки, включая и граничную точку  $x_{N+1/2} = l$ :

$$\Psi_{N+1}^{n+1} = u_{\bar{x}, N+1}^{n+1} - \frac{\partial u}{\partial x}(x_{N+1/2}, t_{n+1}) = O(h^2).$$

В дальнейшем исключим фиктивную точку  $x_{N+1}$  из рассмотрения при помощи разностного уравнения (4) при  $i = N$  и второго граничного условия (6). Для доказательства монотонности схемы и получения двусторонних оценок запишем ее в каноническом виде [1]:

$$A_i y_{i-1}^{n+1} - C_i y_i^{n+1} + B_i y_{i+1}^{n+1} = -F_i^n \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (7)$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \quad C_N y_N^{n+1} = A_N y_{N-1}^{n+1} + F_N^{n+1}. \quad (8)$$

Здесь

$$A_i = B_i = \frac{\tau}{h^2} > 0, \quad D_i = C_i - A_i - B_i = 1, \quad F_i^n = y_i^n + \tau f_i^{n+1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (9)$$

$$A_N = \frac{\tau}{h^2}, \quad C_N = 1 + A_N, \quad F_N^n = y_N^n + \tau f_N^{n+1}. \quad (10)$$

Так как выполнены все условия положительности коэффициентов (9), (10), то разностная схема (7), (8) является монотонной. Замечательным свойством данного вычислительного алгоритма является выполнение равенства  $D_N = C_N - A_N = 1$ , с помощью которого на основании использования стандартной техники принципа максимума [1; 3] устанавливается оценка устойчивости решения в равномерной норме

$$\max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|y(t)\|_{\bar{C}} \leq \max \left\{ \max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \{ \mu_1(t), \|u_0\|_{\bar{C}} \} + T \max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|f(t)\|_{\bar{C}} \right\},$$

где как обычно  $\|y\|_C = \max_{1 \leq i \leq N-1} |y_i|$ ,  $\|y\|_{\bar{C}} = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i|$ .

Для изучения скорости сходимости разностного решения рассмотрим задачу для погрешности  $z$ , которая получается из системы уравнений (4)–(6) после подстановки  $y = z + u$ :

$$z_{t,i} = \hat{z}_{\bar{x}\bar{x},i} + \hat{\psi}_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (11)$$

$$z_i^0 = 0, \quad i = \overline{0, N}, \quad z_0^{n+1} = 0, \quad z_{\bar{x}, N+1}^{n+1} = \psi_{N+1}^{n+1}, \quad (12)$$

где

$$\psi_i^{n+1} = -u_{t,i} + u_{\bar{x}\bar{x},i}^{n+1} + f_i^{n+1} = O(h^2 + \tau).$$

Используя теперь стандартную технику метода энергетических неравенств для решения задачи (11), (12) в предположения достаточной гладкости исходного решения получим оценку для погрешности метода в сеточном аналоге соболевской нормы  $L_2$ :

$$\max_n \|z^n\| \leq c(h^2 + \tau), \quad c = \text{const} > 0, \quad \|z\|^2 = \sum_{i=1}^N h z_i^2,$$

которая гарантирует сходимость со вторым порядком по пространственной переменной.

**Двусторонняя оценка.** Для получения аналогичных результатов для квазилинейных параболических уравнений, а также для уравнений пороупругости, нам понадобится следующая важная лемма о свойствах разностного решения, обобщающая принцип максимума.

**Л е м м а 1.** Для решения разностной схемы (7), (8) имеет место двусторонняя оценка вида:

$$m_1 \leq y_i^n \leq m_2, \quad i = \overline{0, N}, \quad n = \overline{0, N_0},$$

где

$$m_1 = \min \left\{ \min_{0 \leq n \leq N_0-1} \mu_1^{n+1}, \min_{0 \leq i \leq N} u_{0,i} \right\} + \min_{0 \leq n \leq N_0-1} \sum_{k=0}^n \tau \min_{1 \leq i \leq N} f_i^{k+1},$$

$$m_2 = \max \left\{ \max_{0 \leq n \leq N_0-1} \mu_1^{n+1}, \max_{0 \leq i \leq N} u_{0,i} \right\} + \max_{0 \leq n \leq N_0-1} \sum_{k=0}^n \tau \max_{1 \leq i \leq N} f_i^{k+1}.$$

Доказательство леммы проводится в соответствии с математическим аппаратом, предложенным в [4].

**Монотонные алгоритмы для уравнений пороупругости.** Рассмотрим следующую математическую модель, описывающую процессы пороупругой среды в одномерном случае [5; 6]:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \beta p + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = q(x, t),$$

с заданными начальными и смешанными граничными условиями

$$\left( \phi \beta p + \frac{\partial u}{\partial x} \right) (x, 0) = 0, \tag{13}$$

$$p(x, t) = \mu_1(t), \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} (x, t) = -s_0(t), \quad \text{при } x = 0, \tag{14}$$

$$u(x, t) = \mu_2(t), \quad \frac{\partial p}{\partial x} (x, t) = 0, \quad \text{при } x = l,$$

где  $u = u(x, t)$  – функция смещения;  $p = p(x, t)$  – давление;  $\lambda, \mu = \text{const} > 0$  – коэффициенты Ламе;  $\kappa, \eta = \text{const} > 0$  – соответственно проницаемость пористой среды и вязкость. Тривиальным следствием системы (13), (14) является следующее уравнение для давления:

$$p(x, t) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} (x, t) + \mu_1(t) + s_0(t). \tag{15}$$

Для простоты дальнейших исследований также будем полагать, что  $\phi, \beta$  – положительные постоянные.

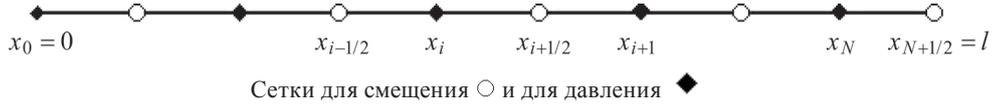
При построении соответствующей монотонной разностной схемы второго порядка аппроксимации в итоге будет использоваться равномерная пространственная сетка с целыми и полуцелыми узлами, лежащими только внутри интервала  $[0, l]$ :

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad h = \frac{l}{N+1/2}, \quad x_{i+1/2} = (i+1/2)h, \quad i = \overline{0, N}, \quad x_{N+1/2} = l \right\}.$$

Для нахождения приближенных значений исходных функций будем использовать следующие сеточные функции:

$$\bar{u}_h = u_{i+1/2}^n = u_h(x_{i+1/2}, t), \quad i = \overline{0, N-1}; \quad p_h = p_i^n, \quad i = \overline{0, N}; \quad \bar{u}_{h\bar{x}, i} = \frac{u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{h}, \quad i = \overline{1, N};$$

т. е. приближенные значения сеточной функции смещения  $u_h$  будем вычислять в полуцелых узлах, а давления  $p_h$  – в целых (рисунок).



На сетке  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$  с использованием фиктивного узла  $x_{N+1} = l + \frac{h}{2}$  исходную дифференциальную задачу аппроксимируем консервативной разностной схемой вида:

$$\begin{aligned} -\left((\lambda + 2\mu)\widehat{u}_{h\bar{x}}\right)_{x,i} + \widehat{p}_{hx,i} &= 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ (\phi\beta p_h + \bar{u}_{h\bar{x}})_t - \left(\frac{\kappa}{\eta} p_{h\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i} &= q^{(\sigma)}, \quad i = \overline{1, N}, \\ \phi\beta p_{h,i}^0 + \bar{u}_{h\bar{x},i}^0 &= 0, \quad i = \overline{0, N}, \\ p_{h,0}^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \quad (\lambda + 2\mu)\bar{u}_{h\bar{x},i}^{n+1} &= -s_0^{n+1}, \\ \bar{u}_{h,N+1/2}^{n+1} = \mu_2^{n+1}, \quad p_{hx,N}^{n+1} &= 0, \end{aligned}$$

где  $q_i^{(\sigma)} = \sigma q_i^{n+1} + (1 - \sigma)q_i^n$ .

Тривиальным следствием данной системы разностных уравнений является аппроксимация уравнения (15):

$$p_{h,i}^{n+1} = (\lambda + 2\mu)\bar{u}_{h\bar{x},i}^{n+1} + \mu_1^{n+1} + s_0^{n+1}. \quad (16)$$

Данная система разностных уравнений аналогично (7), (8) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} A_i p_i^{n+1} - C_i p_i^{n+1} + B_i p_{i+1}^{n+1} &= -F_i^n, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ p_{h,i}^0 &= c_1(\mu_1^0 + s_0^0), \quad i = \overline{0, N}, \\ p_0^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \quad A_N^n p_N^{n+1} &= C_N^n p_{N-1}^{n+1} + F_N^n, \end{aligned}$$

где

$$A_i = B_i = \frac{\tau c_4}{h^2}, \quad C_i = 1 + A_i + B_i, \quad F_i^n = p_i^n + \tau f_i^{n+1}, \quad f_i = c_3(q_i + c_2(\mu_{1t} + s_{0t})), \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$C_N = 1 + \frac{\tau c_4}{h^2}, \quad A_N = \frac{\tau c_4}{h^2}, \quad F_N^n = p_N^n + \tau f_N^{n+1}, \quad f_N = c_3(q_N + c_2(\mu_{1t} + s_{0t})),$$

$$c_1 = \frac{1}{1 + \phi\beta(\lambda + 2\mu)}, \quad c_2 = \frac{1}{\lambda + 2\mu}, \quad c_3 = \frac{1}{\phi\beta + c_2}, \quad c_4 = c_3 \frac{\kappa}{\eta}.$$

Решение данной алгебраической системы уравнений находится по методу прогонки. Приближенное значение функции смещения находится из (16) с учетом граничного условия  $u_{h,N+1/2}^{n+1} = \mu_2^{n+1}$ :

$$u_{h,i-1/2}^{n+1} = \mu_2^{n+1} - c_2 \left( \sum_{k=i}^N h p_{h,k}^{n+1} - (l - x_{i-1/2})(\mu_1^{n+1} + s_0^{n+1}) \right), \quad i = \overline{1, N}. \quad (17)$$

Используя лемму 1 и уравнение (17), можно доказать двусторонние оценки для разностного решения:

$$\begin{aligned} m_1 \leq p_i^{n+1} \leq m_2, \\ \mu_2^{n+1} - c_2(l - x_{i+1/2})(m_2 - \mu_1^{n+1} - s_0^{n+1}) \leq u_{h,i+1/2}^{n+1} \leq \mu_2^{n+1} - c_2(l - x_{i+1/2})(m_1 - \mu_1^{n+1} - s_0^{n+1}), \quad i = \overline{0, N}, \end{aligned} \quad (18)$$

где константы  $m_1, m_2$  определяются через входные данные задачи

$$m_1 = \min \left\{ \min_{0 \leq n \leq N_0-1} \mu_1^{n+1}, c_1(\mu_1^0 + s_0^0) \right\} + \min_{0 \leq n \leq N_0-1} \sum_{k=0}^n \tau \min_{1 \leq i \leq N} f_i^{k+1},$$

$$m_2 = \max \left\{ \max_{0 \leq n \leq N_0-1} \mu_1^{n+1}, c_1(\mu_1^0 + s_0^0) \right\} + \max_{0 \leq n \leq N_0-1} \sum_{k=0}^n \tau \max_{1 \leq i \leq N} f_i^{k+1}.$$

Например, в случае  $\lambda + 2\mu = 1$ ,  $\phi\beta = 0$ ,  $\frac{\kappa}{\eta} = 1$ ,  $\mu_1(t) = \mu_2(t) = q(x, t) = 0$ ,  $s_0(t) = 1$ ,  $l = 1$ , оценки (18) примут вид

$$0 \leq p_i^{n+1} \leq 1, \quad 0 \leq u_{h,i+1/2}^{n+1} \leq 1 - x_{i+1/2}, \quad i = \overline{0, N}.$$

## Литература

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П. Разностные схемы с операторными множителями. М.: Наука, 1998.
3. Самарский А. А., Мажукин В. И., Малафеев Д. А., Матус П. П. // ЖВМ и МФ. 2001. Т. 41, № 3.
4. Matus P. // Comput. Methods Appl. Math. 2014. Vol. 14, N 3. P. 361–371.
5. Naumovich A. Efficient numerical methods for the Biot poroelasticity system in multilayered domains: genehmigte Dissertation, 2007.
6. Gaspar F. J., Lisbona F. J., Vabishchevich P. N. // Applied Numerical Mathematics. 2003. Vol. 44. P. 487–506.
7. Matus P., Martsynkevich G. // Comput. Meth. Appl. Math. 2004. Vol. 4, N 3.

*P. P. MATUS, VO THI KIM TUYEN, FRANCISCO GASPAR*

matus@im.bas-net.by

## MONOTONE DIFFERENCE SCHEMES FOR LINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

### Summary

In this paper, for parabolic equations with mixed boundary conditions monotone schemes are constructed. Moreover we establish an important corollary of the maximum principle for them. On the basis of this corollary one can make a conclusion about the stability of the algorithm in the uniform norm. The idea is to use half-integer nodes at boundary points of the boundary conditions with the second or third order. The obtained results are generalized to construct the similar algorithm for equations of poroelasticity in the one-dimensional case.