Доклады Национальной академии наук Беларуси
2014 сентябрь–октябрь Том 58 № 5

УДК 513.51

Е. А. РОВБА, Е. В. ДИРВУК

ОБ ОДНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-РАЦИОНАЛЬНОГО ТИПА ПО УЗЛАМ ЧЕБЫШЕВА–МАРКОВА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы *Поступило 29.09.2014*

Различные обобщения квадратурных формул типа Гаусса являются предметом исследований многих авторов. При этом использование интерполирования – классический способ построения таких формул. Особый интерес представляет задача построения квадратурных формул, часть узлов которых задается заранее, другая же часть узлов может быть взята произвольно. Если фиксируются оба конца рассматриваемого отрезка, то такая квадратурная формула называется квадратурной формулой типа Лобатто, если один – квадратурной формулой типа Радо. В настоящем сообщении мы исследуем одну из квадратурных формул типа Лобатто.

Пусть $a_k, k = 0, 1..., 2n-1$, являются действительными и $a_k \in (-1, 1)$, либо попарно комплексно сопряженными, $a_0 = 0$. Обозначим через $U_n(x)$ рациональную дробь Чебышева–Маркова второго рода

$$U_n(x) = \frac{\sin \mu_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \ \mu_{2n}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-1} \arccos\frac{x+a_k}{1+a_k x},$$

где

$$\mu'_{2n}(x) = -\frac{\lambda_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \ \lambda_{2n}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Рациональная дробь $U_n(x)$ имеет вид (см., напр., [1, с. 47])

$$U_n(x) = \frac{p_{n-1}(x)}{\sqrt{\prod_{k=0}^{2n-1}(1+a_k x)}},$$

где $p_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени не выше $n-1$ с вещественными коэффициентами. Нули дроби $U_n(x)$ расположены на интервале $(-1, 1)$ таким образом, что

$$-1 < x_{n-1} < x_{n-2} < \ldots < x_1 < 1, \ \mu_{2n}(x_k) = k\pi, \ k = 1, \ldots, n-1.$$

Пусть $x_0 = 1$, $x_n = -1$. Тогда для всякой функции *f*, определенной на отрезке $[-1, 1]$, можно построить следующую рациональную функцию:

$$H_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) h_k(x) + \sum_{k=1}^{n-1} y_k \delta_k(x), \tag{1}$$

где

$$h_k(x) = \frac{1-x^2}{1-x_k^2}\left[1 - \left(\frac{U''(x_k)}{U'(x_k)} - \frac{2x_k}{1-x_k^2}\right)(x - x_k)\right] l_k^2(x), \ k = 1, \ldots, n-1;$$

$$h_0(x) = \frac{1+x}{2}\frac{U_n^2(x)}{U_n^2(1)}, \ h_n(x) = \frac{1-x}{2}\frac{U_n^2(x)}{U_n^2(-1)};$$

$$l_k(x)=\frac{U_n(x)}{U_n'(x_k)(x-x_k)},\ k=1,2,...,n-1;$$

$$\delta_k(x)=\frac{1-x^2}{1-x_k^2}(x-x_k)l_k^2(x),\ y_k\in\mathbb{R},\ k=1,2,...,n-1.$$

Справедливы следующие утверждения относительно свойств функции (1).

Л е м м а 1. *Функция $H_n(x, f)$ является рациональной порядка не выше $2n-1$ и имеет вид*

$$\frac{p_{2n-1}(x)}{\prod_{k=1}^{2n-1}(1+a_kx)},\tag{2}$$

где $p_{2n-1}(x)$ – некоторый полином степени не выше $2n-1$.

Л е м м а 2. *Рациональная функция $H_n(x, f)$ является квази-интерполяционной функцией Эрмита–Фейера, т. е. имеют место равенства*

$$H_n(x_k, f)=f(x_k),\ k=0,1,...,n;$$
$$H_n'(x_k, f)=y_k,\ k=1,2,...,n-1.$$

Л е м м а 3. *Квази-интерполяционная рациональная функция Эрмита–Фейера (1) является точной для всякой рациональной функции вида (2), т. е.*

$$H_n(x, r_{2n-1})\equiv r_{2n-1}(x),$$

при условии, что $y_k=r_{2n-1}'(x_k),\ k=1,2,...,n-1.$

Отметим, что функцию $H_n(x, f)$ мы построили по аналогии с работой Г. Мина [2]. Однако в [2] эта функция имеет вид

$$\frac{p_{2n-1}(x)}{\prod_{k=1}^{n-1}(1+a_kx)^2},\tag{3}$$

т. е. она содержит полюсы второй кратности и их в два раза меньше.

Теперь введем следующие числа:

$$A_k=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1-x^2}{1-x_k^2}l_k^2(x)dx,\ k=1,2,...,n-1,$$

$$A_0=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1+x}{2}\frac{U_n^2(x)}{U_n^2(1)}dx,\ A_n=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1-x}{2}\frac{U_n^2(x)}{U_n^2(-1)}dx,\tag{4}$$

$$l_k(x)=\frac{U_n(x)}{U_n'(x_k)(x-x_k)},\ k=1,2,...,n-1.$$

Тогда для всякой функции *f*, интегрируемой на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(x)=1/\sqrt{1-x^2}$, можно построить следующую квадратурную формулу типа Лобатто:

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx A_0f(1)+\sum_{k=1}^{n-1}A_kf(x_k)+A_nf(-1).\tag{5}$$

Квадратурные формулы типа Лобатто в полиноминальном случае рассматривались в [3], а в рациональном – в [2], там же доказана точность этой формулы для всякой рациональной функции вида (3).

Заметим, что в работе [2] не рассматривались вопросы явного вида коэффициентов A_k, $k=0,1,...,n$, и оценки остатка квадратурной формулы (5). Следует заметить также, что Г. Мин [2] построил квадратурную формулу (5) несколько иначе, не используя в явном виде рациональные дроби Чебышева–Маркова.

В настоящей работе найдены явные выражения для коэффициентов квадратурной формулы (5) A_k, $k = 0, 1, ..., n$, и получена оценка скорости приближения рассматриваемой квадратурной формулы. Сравнение скорости приближения различными видами квадратурных формул проиллюстрировано на конкретном примере.

Основная часть. Имеет место

Т е о р е м а. *Квадратурная формула (5) имеет вид*

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{f(-1)}{2\lambda_{2n}(-1)}\pi + \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{\lambda_{2n}(x_k)}\pi + \frac{f(1)}{2\lambda_{2n}(1)}\pi \tag{6}$$

и для всякой непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ *функции f справедлива следующая оценка ее остатка:*

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx - \frac{f(-1)}{2\lambda_{2n}(-1)}\pi - \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{\lambda_{2n}(x_k)}\pi - \frac{f(1)}{2\lambda_{2n}(1)}\pi \right| \le 2\pi R_{2n-1}(f; a), \tag{7}$$

где

$$R_{2n-1}(f; a) = \inf \left\| f(x) - r_{2n-1}(x) \right\|_{C[-1,1]},$$

точная нижняя грань берется по всем рациональным функциям $r_{2n-1}(x)$ *вида (2).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что несложные подсчеты позволяют представить квадраты функций $l_k(x)$, необходимых для вычисления коэффициентов A_k, $k = 1, 2, ..., n-1$, в следующем виде:

$$l_k^2(x) = \frac{(1-x_k^2)^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)} \frac{\sin^2 \mu_{2n}(x)}{(1-x^2)(x-x_k)^2}, \; k = 1, 2, ..., n-1.$$

Для вычисления коэффициентов A_0, A_n найдем значения дробей Чебышева–Маркова второго рода $U_n(x)$ на концах отрезка

$$U_n(1) = \lim_{x \to 1} \frac{\sin \mu_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \lambda_{2n}(1), \; U_n(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{\sin \mu_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = (-1)^{n+1} \lambda_{2n}(-1).$$

Учитывая найденные представления, коэффициенты (4) квадратурной формулы (5) будут равны

$$A_k = \frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)} \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2 \mu_{2n}(x)}{(x-x_k)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \; k = 1, 2, ..., n-1,$$

$$A_0 = \frac{1}{2\lambda_{2n}^2(1)} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{\sin^2 \mu_{2n}(x)}{1-x^2} dx, \; A_n = \frac{1}{2\lambda_{2n}^2(-1)} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{\sin^2 \mu_{2n}(x)}{1-x^2} dx.$$

Вначале рассмотрим интеграл

$$I_k = \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2 \mu_{2n}(x)}{(x-x_k)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Сделаем замену $x = (1-y^2)/(1+y^2)$. Известно [4, с. 246], что

$$\sin \mu_{2n}\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right) = \sin \Phi_{2n}(y)$$

– синус-дробь Бернштейна с нулями в точках $\pm y_k$, $y_k = \sqrt{(1-x_k)/(1+x_k)}$, $k = 1, \ldots, n$.

Таким образом,

$$1-x^2 = \frac{4y^2}{(1+y^2)^2}, \; x - x_k = \frac{-2(y^2-y_k^2)}{(1+y^2)(1+y_k^2)}, \; dx = \frac{-4y}{(1+y^2)^2} dy,$$

$$I_k = \frac{(1+y_k^2)^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \Phi_{2n}(y)(1+y^2)}{(y^2-y_k^2)^2} dy.$$

Далее используем метод, предложенный в [1, с. 92]. Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$J_k(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \Phi_{2n}(y)(1+y^2)}{(y^2 - z^2)^2} dy,$$

а затем интеграл I_k найдем с помощью предельного перехода

$$I_k = \frac{(1+y_k^2)^2}{4} \lim_{z \to y_k,\ \operatorname{Im} z > 0} J_k(z). \tag{8}$$

Синус-дробь Бернштейна можно представить в виде [1, с. 49]

$$\sin \Phi_{2n}(y) = \frac{1}{2i}(\chi_n(y) - \chi_n^{-1}(y)), \tag{9}$$

где $\chi_n(y) = \prod_{j=0}^{2n-1} \frac{y - z_j}{y - \overline{z_j}}$, точки z_k являются корнями уравнения $y^2 + \frac{1+a_k}{1-a_k} = 0$, $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = 0, 1, ..., 2n-1$. При этом ограничения, налагаемые на параметры a_k, $k = 0, 1, ..., 2n-1$, влекут выполнение следующих условий:

1) $z_0 = i$,

2) паре комплексно сопряженных параметров из множества $\{a_k\}_{k=0}^{2n-1}$ соответствует пара симметричных относительно мнимой оси параметров из множества $\{z_k\}_{k=0}^{2n-1}$.

Из представления (9) несложно получить

$$\sin^2 \Phi_{2n}(y) = -\frac{1}{4}(\chi_n^2(y) - 2 + \chi_n^{-2}(y)).$$

Теперь интеграл $J_k(z)$ представим в виде суммы

$$J_k(z) = -\frac{1}{4}(J_{k1}(z) - 2J_{k2}(z) + J_{k3}(z)),$$

где

$$J_{k1}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^2(y) \frac{1+y^2}{(y^2 - z^2)^2} dy, \ J_{k2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+y^2}{(y^2 - z^2)^2} dy, \ J_{k3}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^{-2}(y) \frac{1+y^2}{(y^2 - z^2)^2} dy.$$

Для вычисления этих интегралов применим теорию вычетов. Из условия $z_0 = i$ следует, что подынтегральная функция интеграла $J_{k1}(z)$ в верхней полуплоскости имеет лишь одну особую точку $y = z$. Поэтому

$$J_{k1}(z) = 2\pi i \operatorname*{res}_{y=z} \chi_n^2(y) \frac{1+y^2}{(y^2 - z^2)^2} = 2\pi i \lim_{y \to z} \frac{d}{dy} \chi_n^2(y) \frac{1+y^2}{(y+z)^2}.$$

Замечая, что

$$\frac{d}{dy} \chi_n(y) = \chi_n(y) \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{z_k - \overline{z_k}}{(y - z_k)(y - \overline{z_k})};$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1+y^2}{(y+z)^2}\right) = \frac{2(yz-1)}{(y+z)^3},$$

и возвращаясь к вычислению интеграла $J_{k1}(z)$, получим

$$J_{k1}(z) = \frac{\pi i}{z^2} \chi_n^2(y) \left((1+z^2) \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{z_k - \overline{z_k}}{(z - z_k)(z - \overline{z_k})} + \frac{z^2 - 1}{2z} \right).$$

Аналогично вычисляются оставшиеся интегралы $J_{k2}(z)$ и $J_{k3}(z)$

$$J_{k2}(z) = \frac{\pi i}{z^2} \frac{z^2 - 1}{2z}, \ J_{k3}(z) = \frac{\pi i}{z^2} \chi_n^{-2}(y) \left((1+z^2) \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{z_k - \overline{z_k}}{(z - z_k)(z - \overline{z_k})} + \frac{z^2 - 1}{2z} \right).$$

Учитывая, что

$$\prod_{j=0}^{2n-1} \frac{y_k - z_j}{y_k - \overline{z_j}} = 1,$$

и переходя к интегралу (8), получим

$$I_k = -\frac{(1+y_k^2)^2 \pi i}{8y_k^2}(1+y_k^2) \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{z_k - \overline{z_k}}{(y_k - z_k)(y_k - \overline{z_k})}.$$

Преобразуем сумму, стоящую в правой части,

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{z_k - \overline{z_k}}{(y_k - z_k)(y_k - \overline{z_k})} = \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{y_k - z_k} - \frac{1}{y_k - \overline{z_k}} \right) = \frac{-2\lambda_{2n}(x_k)}{i(1+y_k^2)}.$$

Будем иметь

$$I_k = \frac{(1+y_k^2)^2 \lambda_{2n}(x_k)}{4y_k^2} \pi = \frac{\lambda_{2n}(x_k)}{1-x_k^2} \pi$$

и

$$A_k = \frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)} \frac{\lambda_{2n}(x_k)}{1-x_k^2} \pi = \frac{\pi}{\lambda_{2n}(x_k)}. \tag{10}$$

Проделав аналогичные вычисления, найдем

$$A_0 + A_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\lambda_{2n}(1)} + \frac{\pi}{\lambda_{2n}(-1)} \right). \tag{11}$$

Подставив результаты для интегралов (10) и (11) в (5), получим (6).

Выводу неравенства (7) предпошлем следующие леммы.

Л е м м а 4. *Квадратурная формула (6) является точной для всякой рациональной функции $r_{2n-1}(x)$ вида (2).*

Нетрудно видеть, что для доказательства леммы 4 достаточно показать, что

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,(x - x_k) l_k^2(x)\,dx = 0, \;\; k = 1, 2, ..., n-1. \tag{12}$$

Равенства (12) получаются таким же образом, как и (6).

Л е м м а 5. *Квадратурная формула (6) является положительной, т. е.* $A_k > 0,\; k = 0, 1, ..., n$, *и*

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \pi.$$

Первое утверждение этой леммы очевидное, второе следует из точности формулы (6) для $f(x) \equiv 1$.

Теперь легко найти оценку (7). Действительно, пусть $r_{2n-1}^*(x)$ – рациональная функция вида (2), осуществляющая наилучшее равномерное приближение функции f на $[-1, 1]$:

$$\left| f(x) - r_{2n-1}^*(x) \right| \le R_{2n-1}(f; a), \;\; x \in [-1, 1].$$

Введем следующие обозначения:

$$F_n(f, a) = \frac{f(-1)}{2\lambda_{2n}(-1)}\pi + \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{\lambda_{2n}(x_k)}\pi + \frac{f(1)}{2\lambda_{2n}(1)}\pi,$$

$$\varepsilon_n(f, a) = \left| \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx - F_n(f, a) \right|.$$

Тогда, пользуясь леммой 4, получим

$$\varepsilon_n(f, a) = \left| \int_{-1}^{1} \frac{f(x) - r_{2n-1}^*(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \right| + \left| F_n(r_{2n-1}^*, a) - F_n(f, a) \right| \le \pi R_{2n-1}(f, a) + R_{2n-1}(f, a) F_n(1, a).$$

Ввиду точности квадратурной формулы (6) для функции $f(x) \equiv 1$ будем иметь, что $F_n(1, a) = \pi$. Таким образом неравенство (7) доказано.

З а м е ч а н и е 1. *Полагая* $a_k = 0,\ k = 0, ..., 2n-1$, *получим известную квадратурную формулу полиномиального типа* [3]

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n}\left(\frac{f(-1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right) + \frac{f(1)}{2}\right). \qquad (13)$$

З а м е ч а н и е 2. *Квадратурная формула (6) по форме совпадает с квадратурной формулой, полученной в [5]. Однако формула (6) содержит в два раза больше параметров и естественно является более точной.*

Проиллюстрируем эффективность полученной квадратурной формулы (6) на следующем примере.

П р и м е р. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{\pi x/1{,}1}{\sin(\pi x/1{,}1)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (14)$$

Такой интеграл рассматривался в качестве примера в [6]. Результаты из [6] получены с помощью квадратурных формул типа Гаусса, при этом узлы в конечных точках не задавались.

Вычислим интеграл (14) с помощью квадратурных формул (6), (13) и сравним с результатами из [6]. Для применения рациональных квадратурных формул (6) определим последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k=0}^{2n-1}$ следующим образом:

$$a_{2n-1} = a_0 = 0,\ a_k = 1 - e^{-k/\sqrt{\alpha n}},\ a_{2n-1-k} = -a_k,\ k = 1, 2, ..., n-1.$$

Некоторые числа α, зависящие от n, представлены ниже в таблице.

Относительные погрешности рассматриваемых квадратурных формул для интеграла (14)

n	α	Error1	Error2	Error3
2	0,55034	1,19e-07	1,42e-02	1,99e-01
4	0,88041	5,83e-10	7,68e-05	3,18e-02
8	0,91157	4,66e-14	1,24e-12	9,04e-04
16	1,37741	5,99e-18	2,45e-16	7,48e-07
32	2,59	3,26e-26	3,68e-16	5,14e-11

П р и м е ч а н и е. Вычисления выполнены при помощи программного пакета Maple 18.

Относительную погрешность квадратурных формул вычислим по формуле

$$\text{Error} = \left|\frac{I_n(f) - I_\mu(f)}{I_n(f)}\right|,$$

где $I_\mu(f)$ – приближенное значение интеграла; $I_n(f)$ – точное значение интеграла.

В таблице приведены относительные погрешности при применении квадратурных формул типа Лобатто (Error1 в рациональном случае, Error3 в полиномиальном случае) и квадратурных формул, рассмотренных в [6] (Error2).

Заключение. В работе найдены явные выражения для коэффициентов квадратурной формулы (6) $A_0, A_1, ..., A_n$ и получена оценка скорости приближения рассматриваемой квадратурной формулы.

Литература

1. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1979.
2. *Min G.* // J. of Computational and Applied Mathematics. 1998. N 94. P. 1–12.
3. *Ермолаева Л. Б.* // Изв. вузов. Математика. 2000. № 3. С. 25–28.
4. *Турецкий А. Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск: Высш. шк., 1968.
5. *Ровба Е. А., Смотрицкий К. А.* // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 5. С. 11–15.
6. *Van Deun J., Bultheel A., Vera P. G.* // Math. Comp. 2006. N 75. P. 307–326.

Y. A. ROVBA, Y. V. DIRVUK

rovba.ea@gmail.com; dirvuk@gmail.com

QUADRATURE FORMULAS BASED ON RATIONAL INTERPOLATION WITH NODES CHEBYSHEV–MARKOV

Summary

In the paper we construct a Lobatto-type quadrature formulas on the segment $[-1, 1]$ by weight $1/\sqrt{1-x^2}$ by using quasi-Hermite-type rational interpolation with nodes Chebyshev–Markov. The coefficients of quadrature formulas of Lobatto-type were calculated and estimation of their error in particular. We give example of the use of these quadrature formula and compare the rate of approximation of various types of quadrature formulas.