Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 сентябрь–октябрь Том 58 № 5

УДК 517.986

А. Б. АНТОНЕВИЧ, А. Н. ГЛАЗ

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

(Представлено членом-корреспондентом Я. В. Радыно)

Белорусский государственный университет, Минск

Поступило 22.09.2014

Почти периодические функции описывают многие важные в приложениях процессы и структуры [1–4]. Обычно рассматривается не вся алгебра почти периодических функций, а некоторые ее подалгебры. Такие подалгебры обычно являются коммутативными C^*-алгебрами, и поэтому однозначно определяются по пространству максимальных идеалов. Существуют подалгебры, у которых пространство максимальных идеалов является конечномерным тором (такие подалгебры называются *квазипериодическими*), и существуют подалгебры, у которых пространство максимальных идеалов устроено более сложно (беконечномерный тор, соленоид). Структура кристаллов или квазикристаллов описывается с помощью некоторой квазипериодической подалгебры, при этом совокупность линейных отображений, сохраняющих такую подалгебру, задает группу симметрии рассматриваемой квазикристаллической структуры, которая задает геометрию квазикристалла [2–4]. В связи с этим представляет интерес построение квазипериодических подалгебр, инвариантных относительно линейных отображений.

В работе рассмотрена следующая задача. Пусть $\mathcal{A}_0$ есть некоторая квазипериодическая подалгебра на $\mathbb{R}^m$ и $\alpha:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\alpha(x) = Mx$ – линейное отображение, задаваемое квадратной матрицей размера m. Линейное отображение α порождает *оператор сдвига*, действующий в пространстве почти периодических функций по формуле

$$Wa(x) = a(\alpha(x)). \tag{1}$$

Существует наименьшая замкнутая подалгебра $\mathcal{A}^+$, содержащая $\mathcal{A}_0$ и инвариантная относительно α. Если отображение α обратимо, то существует наименьшая замкнутая подалгебра $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{A}_0$, инвариантная относительно α и α^{-1}. В работе получены условия на линейное отображение α, при котором эти подалгебры являются квазипериодическими.

Алгебру $CAP(\mathbb{R}^m)$ почти периодических функций на $\mathbb{R}^m$ можно определить как замыкание относительно равномерной нормы множества квазиполиномов, т. е. функций на $\mathbb{R}^m$, представимых в виде конечных сумм $u(x) = \sum_j a_j e^{i2\pi<h_j,x>}$, где $x \in \mathbb{R}^m$, $h_j \in \mathbb{R}^m$ и $<\cdot,\cdot>$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

Известно [1; 5], что каждой почти периодической функции a соответствует формальный ряд Фурье $a(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} C_j e^{i2\pi<h_j,x>}$.

Векторы h_j называются *частотами*, а множество векторов h_j называется *спектром* функции a.

Если A некоторая замкнутая и симметричная подалгебра алгебры $CAP(\mathbb{R}^m)$, то объединение спектров всех функций из A является подгруппой в $\mathbb{R}^m$ (как группы по сложению). Эта подгруппа обозначается H_A и называется *группой частот алгебры A*.

Подалгебра A называется *квазипериодической с N квазипериодами*, если H_A есть группа с конечным числом N образующих, в этом случае $H_A \approx \mathbb{Z}^N$. Пространство максимальных идеалов такой алгебры есть тор $\mathbb{T}^N$, а группа H_A изоморфна группе характеров тора $\mathbb{T}^N$ [1; 5].

Обозначим через $L(H_{\mathcal{A}_0})$ линейную оболочку группы $H_{\mathcal{A}_0}$, где $\mathcal{A}_0$ – рассматриваемая квазипериодическая алгебра.

Напомним, алгебра A называется *инвариантной относительно отображения* α, если

$$a \in A \Rightarrow Wa \in A.$$

Поскольку отображение α – линейно, то $\forall a \in CAP(\mathbb{R}^m) \Rightarrow Wa \in CAP(\mathbb{R}^m)$. Поэтому для любой подалгебры $\mathcal{A}_0$ в $CAP(\mathbb{R}^m)$ алгебра $\mathcal{A}^+$ является C^*-подалгеброй в $CAP(\mathbb{R}^m)$. Тогда по теореме Гельфанда–Наймарка [6] C^*-алгебра $\mathcal{A}^+$ изоморфна алгебре $C(Sp(\mathcal{A}^+))$, где $Sp(\mathcal{A}^+)$ есть (компактное) пространство максимальных идеалов алгебры $\mathcal{A}$. Этот изоморфизм задается с помощью преобразования Гельфанда.

Если алгебра $\mathcal{A}^+$ инвариантна относительно α, то оператор W индуцирует непрерывное сюрьективное отображение $\hat{\alpha} : Sp(\mathcal{A}^+) \to Sp(\mathcal{A}^+)$ пространства $Sp(\mathcal{A}^+)$.

Если W обратимо, т. е. обратимо α, то алгебра $\mathcal{A}$ также является C^*-алгеброй и изоморфна алгебре $C(Sp(\mathcal{A}))$. При этом отображение $\hat{\alpha}$ является гомеоморфизмом.

О п р е д е л е н и е 2. *Матрицу M будем называть целой алгебраической, если существует полином* $P(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k$ *с целыми коэффициентами, такой, что* $a_N = 1$ *и* $P(M) = 0$.

Основные результаты работы сформулируем в виде двух теорем.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\mathcal{A}_0$ *есть квазипериодическая подалгебра в* $CAP(\mathbb{R}^m)$, *такая, что* $L(H_{\mathcal{A}_0}) = \mathbb{R}^m$, *и* $\alpha(x) = Mx$. *Подалгебра* $\mathcal{A}^+$ *является квазипериодической тогда и только тогда, когда матрица M является целой алгебраической.*

Если, кроме того, α *обратимо, то подалгебра* $\mathcal{A}$, *является квазипериодической тогда и только тогда, когда существует такой полином P, что*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k,\ a_N = 1,\ a_0 = \pm 1,\ a_k \in \mathbb{Z},\quad P(M) = 0. \tag{2}$$

Утверждение теоремы 1 верно и при выполнении более слабого условия: если наименьшее векторное подпространство $\mathrm{Inv}(H_{\mathcal{A}_0}, \alpha)$ в $\mathbb{R}^m$, содержащее $H_{\mathcal{A}_0}$ и инвариантно относительно α, есть все $\mathbb{R}^m$. Другими словами, если для матрицы M не существует нетривиальных инвариантных подпространств, содержащих $H_{\mathcal{A}_0}$.

В случае, если $\mathrm{Inv}(H_{\mathcal{A}_0}, \alpha) \neq \mathbb{R}^m$, условия формулируются несколько иначе.

Т е о р е м а 2. *Подалгебра* $\mathcal{A}^+$ $(\mathcal{A})$ *является квазипериодической тогда и только тогда, когда сужение отображения* α *на подпространство* $\mathrm{Inv}(H_{\mathcal{A}_0}, \alpha)$ *задается целой алгебраической матрицей (матрицей, удовлетворяющей соотношению вида (2)).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для построения подалгебр $\mathcal{A}^+$ и $\mathcal{A}$ может быть использована следующая конструкция. Пусть $\mathcal{A}_n^+$ – *алгебраическая оболочка*

$$\mathcal{A}_n^+ = \mathrm{Alg}[\mathcal{A}_0, W(\mathcal{A}_0), \ldots W^n(\mathcal{A}_0)],$$

где $W^k(\mathcal{A}_0) = \{a(\alpha^k(x)) : a \in \mathcal{A}_0\}$ есть образ алгебры $\mathcal{A}_0$ при действии W^k, т. е. $\mathcal{A}_n^+$ – наименьшая замкнутая подалгебра, содержащая функции $a(\alpha^k(x))$, где $a \in \mathcal{A}_0, k = 0, 1, \ldots, n$.

Тогда очевидно, что если $\mathcal{A}_0$ подалгебра в $B(\mathbb{R}^m)$, α – линейное отображение, W – оператор (1), то имеют место включения $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1^+ \subset \ldots \subset \mathcal{A}_n^+ \subset \ldots$ и множество $\mathcal{A}^+ = \overline{\bigcup \mathcal{A}_n^+}$ является наименьшей замкнутой подалгеброй, инвариантной относительно отображения α и содержащей $\mathcal{A}_0$.

В случае обратимого α аналогично рассмотрим алгебраические оболочки

$$\mathcal{A}_n = Alg[W^{-n}(\mathcal{A}_0), \ldots, W^{-1}(\mathcal{A}_0), \mathcal{A}_0, W(\mathcal{A}_0), \ldots W^n(\mathcal{A}_0)].$$

Имеют место включения $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_n \subset \ldots$, а множество $\mathcal{A} = \overline{\bigcup \mathcal{A}_n}$ является наименьшей замкнутой подалгеброй, инвариантной относительно отображений α и α^{-1} и содержащей $\mathcal{A}_0$.

В общем случае все подалгебры $\mathcal{A}_n^+$ $(\mathcal{A}_n)$ различны и алгебра $\mathcal{A}^+$ $(\mathcal{A})$ может иметь достаточно сложное строение, примеры таких алгебр описаны, например, в [7], посвященной исследованию обратимых расширений необратимых динамических систем. В этой работе рассматривается аналогичная конструкция инвариантных алгебр для произвольных исходных отображений и произвольных алгебр. При этом показано, что если исходить из очень простых необратимых отображений, то в результате могут получаться пространства максимальных идеалов со сложным поведением индуцированного отображения $\widehat{\alpha}$, такие, как подкова Смейла, аттрактор Плыкина и др.

Общая закономерность проявляется в том, что чем меньше поведение функций $a_0 \in \mathcal{A}_0$ согласовано с отображением α, тем сложнее устроены алгебры $\mathcal{A}_n^+$ и $\mathcal{A}^+$, $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}$. Соответственно, труднее построение пространств $Sp(\mathcal{A}^+)$ и $Sp(\mathcal{A})$. С этой точки зрения представляет интерес выделение ситуаций, когда пространство $Sp(\mathcal{A})$ устроено сравнительно просто.

Будем говорить, что цепочка алгебр $\mathcal{A}_n^+$ *стабилизируется в положительном направлении*, если при некотором N алгебра $\mathcal{A}_N^+$ инвариантна относительно α. В этом случае $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}_N^+$ для $n \geq N$, и тогда $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}_N^+$. В случае, когда α обратимо, будем говорить, что цепочка алгебр $\mathcal{A}$, *стабилизируется*, если при некотором N алгебра $\mathcal{A}_N$ инвариантна относительно α и α^{-1}. В этом случае $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_N$ для $n \geq N$, и тогда $\mathcal{A} = \mathcal{A}_N$.

В рассматриваемой задаче условие квазипериодичности алгебры $\mathcal{A}^+$ равносильно условию стабилизируемости в положительном направлении цепочки алгебр $\mathcal{A}_n^+$, а условие квазипериодичности алгебры $\mathcal{A}$ равносильно условию стабилизируемости цепочки алгебр $\mathcal{A}_n$.

Запишем условие стабилизируемости цепочки алгебр $\mathcal{A}_n$. Пусть $\{h_1, \ldots, h_q\}$ – образующие группы частот $H_{\mathcal{A}_0}$ алгебры $\mathcal{A}_0$ и M^T – матрица, транспонированная к M. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ алгебры $\mathcal{A}_n^+$ и $\mathcal{A}_n$ квазипериодические, а наборы $\{(M^T)^j h_k,\ k = 1, \ldots, q;\ j = 0, \ldots n\}$ и $\{(M^T)^j h_k, k = 1, \ldots, q;\ j = -n, \ldots n\}$ являются образующими для групп частот $H_{\mathcal{A}_n^+}$ и $H_{\mathcal{A}_n}$ соответственно.

Таким образом, условие, что цепочка алгебр $\mathcal{A}_n^+$ стабилизируется в положительном направлении, равносильно тому, что при некотором N для группы частот выполнено $H_{A_N} = H_{A_n}, \forall n \geq N$. А это в свою очередь равносильно тому, что для каждого $i = 1, \ldots, q$ вектор $(M^T)^{N+1} h_i$ можно представить в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами элементов $h_1, M^T(h_1), \ldots, (M^T)^N h_1, \ldots,$ $h_q, M^T h_q, \ldots, (M^T)^N h_q$. Аналогичное утверждение верно для $\mathcal{A}$.

Покажем, что сформулированное условие выполняется для целых алгебраических матриц.

Достаточность. Пусть существует полином P с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, такой, что $P(M) = 0$. Отметим, что тогда также $P(M^T) = 0$. Домножив справа равенство $P(M^T) = 0$ на вектор h_i, получаем, что вектор $(M^T)^{N+1} h_i$ можно представить в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами элементов $h_1, M^T(h_1), \ldots, (M^T)^N h_q$, что и требовалось.

Необходимость. Пусть каждый из векторов $(M^T)^{N+1} h_i$, $i = 1, \ldots, q$, можно представить в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами элементов $h_1, M^T(h_1), \ldots, (M^T)^N h_q$. Это условие может быть записано в виде

$$\mathcal{M}^0 \mathcal{H} = \mathcal{O}, \tag{3}$$

где

$$\mathcal{M}^0 = \begin{pmatrix} (M^T)^{N+1} + P_{11}^{(N)}(M^T) & P_{12}^{(N)}(M^T) & \ldots & P_{1q}^{(N)}(M^T) \\ P_{21}^{(N)}(M^T) & (M^T)^{N+1} + P_{22}^{(N)}(M^T) & \ldots & P_{2q}^{(N)}(M^T) \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ P_{q1}^{(N)}(M^T) & P_{q2}^{(N)}(M^T) & \ldots & (M^T)^{N+1} + P_{qq}^{(N)}(M^T) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H} = (h_1 \quad \cdots \quad h_q)^T,$$

т. е. $\mathcal{M}^0$ – квадратная матрица порядка q, элементами которой являются квадратные матрицы порядка m, $\mathcal{H}$ – вектор-столбец, составленный из векторов $h_1, \ldots, h_q$. Под символом $\mathcal{O}$ подразумевается вектор-столбец размера q, элементами кооторого являются действительнозначные нулевые вектор-столбцы размера m. Умножение в (3) есть обычное умножение матриц. Производя с матрицей $\mathcal{M}^0$ «элементарные» преобразования, придем к диагональному виду

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} (M^T)^{N_1+1}+\widetilde{P}_{11}^{(N_1)}(M^T) & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & (M^T)^{N_q}+\widetilde{P}_{qq}^{(N_q)}(M^T) \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{P}_{ii}^{(N_i)}(t)$ – некоторые многочлены степени $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, q$, такие, что $Q(t) = \prod_{i=1}^{q}(t^{N_i+1} + \widetilde{P}_{ii}^{(N_i)}(t))$ является многочленом с целыми коэффициентами, старшим членом 1 и выполнено $Q(M^T)h_i = 0$, $i = 1, \ldots, q$. Из условий $L(H_{\mathcal{A}_0}) = \mathbb{R}^m$ следует, что $Q(M^T) = 0$, т. е. $Q(t)$ – искомый многочлен.

Для доказательства второго утверждения теоремы 1 достаточно применить первую часть теоремы к отображениям α и α^{-1}.

Доказательство теоремы 2 аналогично.

П р и м е р 1. Пусть $\mathcal{A}_0$ – алгебра функций на плоскости, периодических с периодом 1 по первой переменной и постоянных по другой. В качестве отображения α возьмем поворот на угол $2\pi\varphi$, т. е.

$$M=\begin{pmatrix} \cos 2\pi\varphi & -\sin 2\pi\varphi \\ \sin 2\pi\varphi & \cos 2\pi\varphi \end{pmatrix}.$$

Когда φ является рациональным числом p/q, то через конечное число оборотов q алгебра перейдет в себя, т. е. цепочка алгебр $\mathcal{A}_n$ стабилизируются при $n = q$. В этом случае соответствующий многочлен имеет вид

$$P(t) = t^q - 1.$$

В рассматриваемом примере существуют повороты с иррациональным числом φ, такие, что цепочка алгебр $\mathcal{A}_n$ (а следовательно, и цепочка алгебр $\mathcal{A}_n^+$) стабилизируется, т. е. пространства максимальных идеалов соответствующей алгебры $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}^+$) является конечномерным тором. Существование таких углов было доказано еще в [8]. В свое время, как говорят авторы этой статьи, это было открытием, так как квазикристаллы с такой группой симметрии не могут быть реализованы и, значит, являются какими-то новыми объектами, неизвестными физикам. Интерес к таким примерам сохраняется до сих пор, этот вопрос рассматривался, например, в [4]. В этой работе повороты на иррациональный угол, при котором алгебра $\mathcal{A}$ является квазипериодической, называются «скрытыми симметриями».

Из теоремы 2 следует, что для того, чтобы алгебра $\mathcal{A}$ была квазипериодической, необходимо и достаточно, чтобы число $z = e^{2\pi i\varphi} \in \mathbb{C}$ было корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами со старшим коэффициентом, равным 1, и младшим, равным ± 1. Заметим, что такие числа $e^{2\pi i\varphi}$ не могут быть корнями многочленов второй степени.

В качестве примера такого числа можно привести

$$z_0 = e^{2\pi i\varphi} = 1 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 2\sqrt{6} - 5},$$

которое является корнем многочлена

$$P(t) = t^8 - 8t^7 - 132t^6 + 584t^5 - 634t^4 + 584t^3 - 132t^2 - 8t + 1.$$

Здесь при записи в виде $z_0 = e^{2\pi i\varphi}$ число φ является иррациональным.

П р и м е р 2. Пусть $X = \mathbb{R}$ и пусть $\mathcal{A}_0$ есть алгебра непрерывных функций, периодических с периодом 1. Эта алгебра с одной образующей – она порождена функцией $e^{i2\pi x}$, и ее пространство максимальных идеалов $Sp(\mathcal{A}_0) = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Рассмотрим алгебры $\mathcal{A}^+$ и $\mathcal{A}$ для класса отображений $\alpha(x) = qx$. Для разных q получаем качественно разные результаты.

П р и м е р 2.1. Если $\alpha(x) = 2x$, то $W(\mathcal{A}_0)$ есть алгебра функций, периодических с периодом $1/2$. Так как $W(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{A}_0$, то алгебра $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}_0$.

Рассмотрим обратное отображение. Получаем, что $\mathcal{A}_n = W^{-n}(\mathcal{A}_0)$ и это есть алгебра функций, периодических с периодом 2^n. Поэтому получаем расширяющуюся цепочку подалгебр периодических функций, т. е. $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_n \subset \ldots$.

В этом примере $Sp(\mathcal{A})$ является так называемым соленоидом [7].

П р и м е р 2.2. Пусть теперь $\alpha(x) = \sqrt{2}x$. Тогда $W(\mathcal{A}_0)$ есть алгебра функций, периодических с периодом $1/\sqrt{2}$ и $W(\mathcal{A}_0) \bigcap \mathcal{A}_0 = \{0\}$.

В этом случае алгебра $\mathcal{A}_1^+$ является квазипериодической с двумя квазипериодами. Число $q = \sqrt{2}$ является корнем полинома $P(t) = t^2 - 2$. При рассмотрении обратного отображения получаем расширяющуюся цепочку квазипериодических алгебр $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_n \subset \ldots$.

Получаем, что пространство $Sp(\mathcal{A})$ есть декартов квадрат соленоидов.

П р и м е р 2.3. Пусть теперь $\alpha(x) = \pi x$. Так как число π является трансцендентным, все алгебры $W^k(\mathcal{A}_0)$ существенно различны. Анализ показывает, что в этом примере алгебра $\mathcal{A}^+$ изоморфна алгебре непрерывных функций на бесконечномерном торе.

П р и м е р 3. Пусть $\mathcal{A}_0$ алгебра функций на $\mathbb{R}^3$, периодических с периодом 1 по каждой переменной. Пусть матрица M, задающая отображение α, имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$. Для матрицы M выполнено

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = 0,$$

т. е. M является целой алгебраической матрицей и, следовательно, по теореме 1 алгебра $\mathcal{A}^+$ является квазипериодической.

В этом примере группа $H_{\mathcal{A}_0}$ порождена векторами $h_1 = (1, 0, 0)$, $h_2 = (0, 1, 0)$ и $h_3 = (0, 0, 1)$. Группа $H_{\mathcal{A}^+}$ порождена векторами h_i и векторами $(0,\gamma,0),(0,0,\gamma)$ и $(0,0,\gamma^2)$ – образами h_i при действии степеней матрицы M. Таким образом, алгебра $\mathcal{A}^+$ порождена функциями, периодическими с периодом 1 по первой координате, периодическими с периодами 1 и $1/\gamma$ по второй переменной, с периодами 1, $1/\gamma$ и $1/\gamma^2$ по третьей переменной. Здесь возможны три качественно различных случая.

1) Если $\gamma \in \mathbb{Z}$, то исходная алгебра инвариантна относительно α.

2) Если $\gamma = p/q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ и p/q – несократимая дробь, то все равно группа $H_{\mathcal{A}^+}$ имеет три образующих $(1,0,0),(0,1/q,0)$ и $(0,0,1/q^2)$.

3) Если же $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то группа $H_{\mathcal{A}^+}$ имеет шесть образующих: векторы h_i и векторы $(0,\gamma,0),(0,0,\gamma)$ и $(0,0,\gamma^2)$.

Литература

1. *Шубин М. А.* // УМН. 1978. Т. 33, вып. 2 (200). С. 560–587.
2. *Дынников И. А., Новиков С. П.* // УМН. 2005. Т. 60, вып. 1(361). С. 3–28.
3. *Новиков С. П.* // УМН. 1999. Т. 54, вып. 5 (329). С. 147–148.
4. *Frank A. Farris.* // Notices of American Mathematical Society. 2013. Vol. 59, N 10. P. 1386–1390.
5. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М., 1978.
6. *Мерфи Дж.* C*-алгебры и теория операторов. М., 1997.
7. *Квасневски Б., Лебедев А. В.* // Матем. сб. 2008. Т. 199, № 11. С. 45–74.
8. *Ле Т. К. Т., Пиухин С. А., Садов В. А.* // УМН. 1993. Т. 48, вып. 1. С. 41–102.

A. B. ANTONEVICH, A. N. GLAZ

antonevich@bsu.by, anna-glaz@yandex.ru

QUASI-PERIODIC ALGEBRAS INVARIANT UNDER A LINEAR MAP

Summary

In this paper we consider the following problem. Let $\mathcal{A}_0$ be some quasi-periodic subalgebra of the algebra of almost periodic functions on $\mathbb{R}^m$ and $\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\alpha(x) = Mx$, is a linear map defined by a square matrix of size m. There exists the smallest closed subalgebra $\mathcal{A}^+$ containing $\mathcal{A}_0$ and invariant under α, and there exists the smallest closed subalgebra $\mathcal{A}$ containing $\mathcal{A}_0$, invariant under α and α^{-1}. We obtain conditions on the linear map α when these subalgebras are quasi-periodic.