Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 **сентябрь–октябрь** **Том 58 № 5**

УДК 517+530.1

С. В. ЖЕСТКОВ

НОВЫЙ АНЗАЦ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

(Представлено членом-корреспондентом В. И. Корзюком)

Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова *Поступило 08.07.2013*

В [1] с помощью эллиптических функций Якоби получены точные решения оптической системы, описывающей распространение лазерного луча в нелокальной нелинейной среде. При $m \to 1$ функции Якоби превращаются в гиперболические функции, а периодические волновые решения становятся солитонными решениями.

Цель работы – получение солитонных решений новой формы и законов их распространения для указанной системы с произвольными постоянными и переменными коэффициентами.

I. Для полноты изложения рассмотрим оптическую систему из [1] с произвольными действительными коэффициентами

$$iu_z + pu_{xx} + qun = 0, \quad n - dn_{xx} = R|u|^2. \tag{1}$$

При $d = 0$ система (1) переходит в обобщенное уравнение Шредингера с керровской нелинейностью. Используя прямой метод из [2], солитонное решение системы (1) будем строить в виде

$$u(z,x) = v(\xi)\exp(i\eta), \quad \xi = \alpha z + \beta x + \varphi, \quad \eta = \omega z + kx + \psi, \\ n(z,x) = f(\xi), \tag{2}$$

где $v(\xi)$, $f(\xi)$ – неизвестные волновые функции; $\alpha, \beta, \varphi, k, \omega, \psi$ – произвольные действительные числа. Подставляя (2) в (1), получим систему определяющих уравнений

$$\left(\alpha + 2p\beta k\right)v'(\xi) = 0, \quad f''(\xi) = A\left[f(\xi) - Rv^2(\xi)\right], \quad v''(\xi) = Bv(\xi) - Cv(\xi)f(\xi), \\ A = \frac{1}{d\beta^2}, \quad B = \frac{\omega + pk^2}{p\beta^2}, \quad C = \frac{q}{p\beta^2}. \tag{3}$$

Исследуем систему (3). Пусть $v(\xi) = \mathrm{const} \equiv v_0$. Тогда из (3) найдем

$$f(\xi) = \mathrm{const} = f_0 = B/C, \quad v_0^2 = \frac{f_0}{R} = \frac{B}{CR}.$$

Таким образом, система (1) имеет элементарное решение вида

$$u(z,x) = \pm\sqrt{\frac{B}{CR}}\exp(i\eta), \quad n(z,x) = \frac{B}{C}, \quad \frac{B}{CR} > 0.$$

Пусть выполнено условие

$$\alpha + 2p\beta k = 0. \tag{4}$$

Тогда система (3) сводится к нелинейной системе из двух уравнений

$$f'' = A(f - Rv^2), \quad v'' = Bv - Cvf, \tag{5}$$

причем, если $v(\xi)$ – решение системы (5), то и $(-v(\xi))$ – решение системы (5). Это значит, что система (5) наследует аналогичное свойство уравнения Шредингера с керровской нелинейностью.

Решение системы (5) строится в виде [3]

$$f(\xi) = M\Phi^{-1}(\xi), \quad v(\xi) = N\Phi^{-1}(\xi), \tag{6}$$

где M, N – неизвестные параметры,

$$\Phi(\xi) = \lambda_0 + \lambda_1 \exp(\xi) + \lambda_2 \exp(-\xi), \tag{7}$$

$\lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Подставляя (6), (7) в (5), получим систему определяющих уравнений относительно коэффициентов системы (5) и параметров солитона

$$A = 1, \quad 3\lambda_0 M = RN^2, \quad \lambda_0^2 = 4\lambda_1\lambda_2, \quad B = 1, \quad 3\lambda_0 = CM, \tag{8}$$

т. е., справедлива

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы уравнение (1) имело решение вида (2), (6), (7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (4), (8).*

Соотношения (4), (8) являются законами распространения указанного солитонного решения и представляют интерес для приложений. В частности, из (8) следует, что

$$RN^2 = CM^2 \text{ или } \left(\frac{M}{N}\right)^2 = \frac{R}{C}.$$

Отметим, что искомые функции $f(\xi)$, $v(\xi)$ удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$f(\pm\infty) = v(\pm\infty) = 0,$$

которые характерны для огибающих светлого солитона.

Интересно, что при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_0 = 2$ решение $u(z, x)$ можно записать в виде

$$u(z, x) = 4N ch^{-2}\left(\frac{\xi}{2}\right)\exp(i\eta). \tag{9}$$

Решение (9) отличается от классического светлого солитона степенью (–2). Наличием этого свойства система (1) отличается от классического уравнения Шредингера с керровской нелинейностью.

II. Анализ системы (5) на основе *th*-метода и баланса порядка старших производных с нелинейными членами показывает, что в качестве ее решения можно взять анзац вида

$$f(\xi) = \lambda_2 th^2\xi + \lambda_1 th\xi + \lambda_0, \quad v(\xi) = \chi_2 th^2\xi + \chi_1 th\xi + \chi_0, \tag{10}$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \chi_0, \chi_1, \chi_2$ – неизвестные действительные числа. Подставляя (10) в (5), получим следующую систему определяющих уравнений:

$$\begin{aligned}
&2\lambda_2 = A[\lambda_0 - R\chi_0^2], && 2\chi_2 = (B - C\lambda_0)\chi_0,\\
&-2\lambda_1 = A[\lambda_1 - 2R\chi_0\chi_1], && -2\chi_1 = B\chi_1 - C(\chi_0\lambda_1 + \lambda_0\chi_1),\\
&-8\lambda_2 = A[\lambda_2 - R(\chi_1^2 + 2\chi_0\chi_2)], && -8\chi_2 = B\chi_2 - C(\chi_0\lambda_2 + \lambda_1\chi_1 + \lambda_0\chi_2),\\
&\lambda_1 = -AR\chi_1\chi_2, && 2\chi_1 = -C(\chi_1\lambda_2 + \lambda_1\chi_2),\\
&\lambda_2 = -AR\chi_2^2, && 6 = -C\lambda_2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы система (1) имела решение вида (2), (10) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (4), (11).*

Разрешимость системы (11) обеспечивает существование солитонных решений указанной формы (10).

Рассмотрим частный случай, когда $\lambda_1 = \chi_1 = 0, p = 1/2, q = 1, R = 1, \beta = 1$. В этом случае $C = 2, A = 1/d, \lambda_2 = -3$. Кроме того, из системы (11) найдем

$$\lambda_0 = 3, \quad \chi_0 = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \chi_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}, \quad d = \frac{1}{4}, \quad A = 4, \quad B = 4.$$

Таким образом, система

$$iu_z + \frac{1}{2}u_{xx} + un = 0, \quad n - \frac{1}{4}n_{xx} = |u|^2$$

имеет решение

$$u(z,x)=\frac{3}{\sqrt{2}}ch^{-2}\xi\exp(i\eta),\quad n(z,x)=3ch^{-2}\xi.$$

III. Рассмотрим оптическую систему с зависящими от z коэффициентами

$$iu_z+p(z)u_{xx}+q(z)un=0,\quad n-dn_{xx}=R|u|^2, \tag{12}$$

где $p(z), q(z)$ – непрерывные интегрируемые на всей числовой оси функции; R, d – константы. Решение системы (12) строится в виде [4]

$$u(z,x)=v(\xi)\exp(i\eta),\quad \xi=\int_0^z\alpha(s)ds+\beta x+\varphi,\quad \eta=\int_0^z\omega(s)ds+kx+\psi,$$
$$n(z,x)=f(\xi), \tag{13}$$

где $\alpha(s), \omega(s)$ – непрерывные интегрируемые на всей числовой оси функции. Подставляя (13) в (12), получим

$$[\alpha(z)+2\beta kp(z)]v'(\xi)=0,\quad f''(\xi)=A\left[f(\xi)-Rv^2(\xi)\right],\quad v''(\xi)=B(z)v(\xi)-$$
$$C(z)v(\xi)f(\xi),\quad A=\frac{1}{\beta^2 d},\quad B(z)=\frac{\omega(z)+k^2p(z)}{\beta^2p(z)},\quad C(z)=\frac{q(z)}{\beta^2p(z)}. \tag{14}$$

Исследуем систему (14). Ее решение строится в виде (6), (7). Тогда из (8) найдем следующие соотношения:

$$A=\frac{1}{\beta^2d}=1,\quad 3\lambda_0M=RN^2,\quad \lambda_0^2=4\lambda_1\lambda_2,$$
$$\frac{\omega(z)+k^2p(z)}{\beta^2p(z)}\equiv\text{const}=1,\quad 3\lambda_0=c_0M, \tag{15}$$

где

$$\frac{q(z)}{\beta^2p(z)}\equiv\text{const}=c_0.$$

Соотношения (15) являются законами распространения солитонного решения (13), (6), (7) системы (12). Из них, в частности, следует, что функции $\omega(z)$, $q(z)$, $p(z)$ должны быть линейно зависимыми.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия (15). Тогда система (12) имеет солитонное решение*

$$u(t,x)=N\left[\lambda_0+\lambda_1\exp\left(\int_0^z\alpha(s)ds+\beta x+\varphi\right)+\lambda_2\exp\left(-\left[\int_0^z\alpha(s)ds+\beta x+\varphi\right]\right)\right]^{-1}\times$$
$$\exp\left\{i\left[\int_0^z\omega(s)ds+kx+\psi\right]\right\},$$
$$n(z,x)=M\left[\lambda_0+\lambda_1\exp\left(\int_0^z\alpha(s)ds+\beta x+\varphi\right)+\lambda_2\exp\left(-\left[\int_0^z\alpha(s)ds+\beta x+\varphi\right]\right)\right]^{-1}.$$

IV. Исследуем вопрос о существовании решения (10) для системы (12). Для этого подставим (10) в (14) и предположим, что

$$\frac{\omega(z)+k^2p(z)}{\beta^2p(z)}\equiv\text{const}=b_0,\quad \frac{q(z)}{\beta^2p(z)}\equiv\text{const}=c_0. \tag{16}$$

Тогда соотношения (11) примут вид

$$
\begin{aligned}
&2\lambda_2 = A[\lambda_0 - R\chi_0^2], && 2\chi_2 = (b_0 - c_0\lambda_0)\chi_0,\\
&-2\lambda_1 = A[\lambda_1 - 2R\chi_0\chi_1], && -2\chi_1 = b_0\chi_1 - c_0(\chi_0\lambda_1 + \lambda_0\chi_1),\\
&-8\lambda_2 = A[\lambda_2 - R(\chi_1^2 + 2\chi_0\chi_2)], && -8\chi_2 = b_0\chi_2 - c_0(\chi_0\lambda_2 + \lambda_1\chi_1 + \lambda_0\chi_2),\\
&\lambda_1 = -AR\chi_1\chi_2, && 2\chi_1 = -c_0(\chi_1\lambda_2 + \lambda_1\chi_2),\\
&6\lambda_2 = -AR\chi_2^2, && 6 = -c_0\lambda_2.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия (16), (17). Тогда система (12) имеет решение*

$$u(z,x) = \left[\chi_2 th^2\xi + \chi_1 th\xi + \chi_0\right]\exp(i\eta), \quad n(z,x) = \lambda_2 th^2\xi + \lambda_1 th\xi + \lambda_0,$$

$$\xi = \int_0^z \alpha(s)ds + \beta x + \varphi, \quad \eta = \int_0^z \omega(s)ds + kx + \psi.$$

З а м е ч а н и е. Аналогичные результаты справедливы для системы вида

$$iu_z + pu_{xx} + qun = 0, \quad n - dn_{xx} = R|u|^2 + Q|u|^4.$$

Литература

1. *Zhong W.-P., Belic M., Huang T.* // Applied Physics B. 2011. Vol. 102. P. 53–58.
2. *Жестков С. В.* Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных. Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова, 2006.
3. *Жестков С. В., Новашинская В. С.* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 3. С. 41–46.
4. *Жестков С. В., Новашинская В. С.* // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 4. С. 32–36.

S. V. ZHESTKOV

zhestkov_s@rambler.ru

A NEW ANSATS AND EXACT SOLUTIONS OF GENERIC NONLOCAL OPTICAL SYSTEM

Summary

The direct method of constructing soliton solutions of generic nonlocal optical system is developed.