Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **март–апрель** **Том 60 № 2**

УДК 512.554.32

Т. С. БУСЕЛ, И. Д. СУПРУНЕНКО

БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА ОБРАЗОВ УНИПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В НЕПРИВОДИМЫХ МОДУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

(Представлено академиком В. И. Янчевским)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
tbusel@gmail.com; suprunenko@im.bas-net.by

Определена блочная структура образов унипотентных элементов в модулярных неприводимых p-ограниченных представлениях классических алгебраических групп размерности ≤ 100. Предложенные подходы к определению такой структуры могут быть использованы при решении аналогичной задачи для представлений бóльших размерностей, а полученная новая информация – для выдвижения обоснованных гипотез о поведении унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп. Изучение такого поведения важно для решения задач распознавания представлений и линейных групп. В настоящее время мало известно о блочной структуре образов произвольных элементов в представлениях классических групп, поэтому детальное изучение таких образов для представлений малых размерностей оказывается полезным.

Ключевые слова: унипотентные элементы, размерности блоков Жордана, представления малой размерности.

T. S. BUSEL, I. D. SUPRUNENKO

THE JORDAN BLOCK STRUCTURE OF THE IMAGES OF UNIPOTENT ELEMENTS IN IRREDUCIBLE MODULAR REPRESENTATIONS OF CLASSICAL ALGEBRAICAL GROUPS OF SMALL DIMENSIONS

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
tbusel@gmail.com; suprunenko@im.bas-net.by

For unipotent elements of prime order, the Jordan block structure of their images in the infinitesimally irreducible representations of the classical algebraic groups in odd characteristic, whose dimensions are at most 100, is determined. The approach proposed can be applied for solving a similar problem for representations of larger dimensions. Detailed information on small cases is important for stating reasonable conjectures on the behavior of unipotent elements in irreducible representations of the classical algebraic groups.

Keywords: unipotent elements, Jordan block sizes, representations of small dimension.

Введение. Определена блочная структура образов унипотентных элементов в модулярных неприводимых p-ограниченных представлениях классических алгебраических групп размерности ≤ 100. Заметим, что во многих случаях картина существенно отличается от аналогичных представлений в характеристике 0 даже при сохранении размерности представления с определенным старшим весом. Предложенные подходы к определению такой структуры могут быть использованы при решении аналогичной задачи для представлений бóльших размерностей, а полученная новая информация – для выдвижения обоснованных гипотез о поведении унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп. Изучение такого поведения важно для решения задач распознавания представлений и линейных групп. В настоящее время мало известно о блочной структуре образов произвольных элементов в представлениях классических групп, поэтому детальное изучение таких образов для представлений малых размерностей оказывается полезным.

Основная часть. Далее K – алгебраически замкнутое поле нечетной характеристики p, G – простая односвязная алгебраическая группа классического типа над K, l – ранг группы G, $W(G)$ –

группа Вейля группы G, ω_i и α_i, $1 \le i \le l$, – фундаментальные веса и простые корни группы G, $\Lambda(G)$ ($\Lambda(M)$) – множество весов группы G (модуля M), $\varphi(\omega)$ – неприводимое представление со старшим весом ω, $\omega(\varphi)$ – старший вес неприводимого представления φ, $<\lambda, \mu>$ – значение веса λ на корне μ, ρ – полусумма положительных корней группы G, V – стандартный (естественный) модуль группы G, $\Lambda^r V$, $S^r(V)$ и $S^{r,p}(V)$ – r-я внешняя, r-я симметрическая и усеченная симметрическая степени модуля V соответственно. Предполагается, что $l > 1$ при $G = A_l(K)$ или $C_l(K)$, $l > 2$ при $G = B_l(K)$ и $l > 3$ при $G = D_l(K)$.

Ниже символами $M(\lambda)$, $V(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ и $T(\lambda)$ обозначаем соответственно неприводимый модуль, модуль Вейля, комодуль Вейля и неразложимый тилтинг-модуль со старшим весом λ. Напомним, что G-модуль называется тилтинг-модулем, если у него существуют и фильтрация модулями Вейля, и фильтрация комодулями Вейля.

При определении блочной структуры образов унипотентных элементов в рассматриваемых представлениях существенно используются следующие леммы.

Л е м м а 1 [1, лемма 1.1].

(а) Любой тилтинг-модуль есть прямая сумма неразложимых тилтинг-модулей вида $T(\lambda)$.

(б) Прямое слагаемое тилтинг-модуля – тилтинг-модуль.

(в) Тензорное произведение тилтинг-модулей – тилтинг-модуль.

Л е м м а 2 [2]. *Пусть* λ *– доминантный вес полупростой алгебраической группы* Γ *и модуль Вейля* $V(\lambda)$ *неприводим. Предположим, что* λ *– максимальный вес* Γ*-модуля* U *и весовое подпространство этого веса одномерно в* U*. Тогда* $U = V \oplus M(\lambda)$.

Л е м м а 3. *Пусть* $A \subset G$ *– связная полупростая замкнутая подгруппа,* M *– неприводимый* G*-модуль со старшим весом* ω*. Предположим, что ограничения на* A *неприводимых* G*-модулей с фундаментальными старшими весами – тилтинг-модули и что* $<\omega + \rho, \alpha> \le p$ *для всех корней* α *группы* G*. Тогда* $M|A$ *– тилтинг-модуль.*

Л е м м а 4. *Пусть* $G = A_l(K)$, $A \subset G$ *– образ вполне приводимого представления группы* $A_1(K)$ *с* p*-ограниченными неприводимыми компонентами,* M *и* ω *удовлетворяют условиям леммы 3 и* $\omega = \sum_{i=1}^{p-1} m_i\omega_i$*. Тогда* $M|A$ *– тилтинг-модуль.*

Л е м м а 5. *Пусть* $H = A_1(K)$, X *и* Y *– корневые элементы алгебры Ли группы* H*, ассоциированные с положительным и отрицательным корнями соответственно, и* $0 \le s < p - 2$*. Тогда* H*-модуль* $T(p + s)$ *содержит вектор* u *веса* $p - s - 2$ *такой, что* $Y^{s+1}X^{s+1}u \ne 0$*, а модуль* $V(p + s) \oplus \Delta(p + s)$ *не содержит таких векторов.*

В предложениях 1 и 2 и леммах 6 и 7 $G = A_l(K)$.

П р е д л о ж е н и е 1 [3, ч. 2, п. 2.15]. *При* $1 \le r \le l$ *пространство* $\Lambda^r V$ *– неприводимый* G*-модуль со старшим весом* ω_r*. Все весовые подпространства этого модуля одномерны.*

П р е д л о ж е н и е 2 [4, предложение 1.2]. *Пусть* k *и* j *– целые неотрицательные числа и* $j \le p - 1$, $r = k(p - 1) + j \le (l + 1)(p - 1)$*. Тогда* r*-я усеченная симметрическая степень* $S^{r,p}(V)$ *является неприводимым* G*-модулем со старшим весом* $(p - 1 - j)\omega_k + j\omega_{k+1}$*. Все весовые подпространства этого модуля одномерны. В частности, при* $r < p$ *пространство* $S^r(V)$ *– неприводимый* G*-модуль со старшим весом* $r\omega_1$.

Л е м м а 6. *При* $p \nmid (l + 1)$ *модуль* $M(\omega_1 + \omega_l)$ *является прямым слагаемым в тензорном произведении естественного и дуального к нему модулей.*

Следующий факт известен и вытекает из неприводимости модулей Вейля со старшими весами ω_2 и $2\omega_1$ ([3, ч. 2, предложение 2.14] и [5, утверждение 1.15i]).

Л е м м а 7. *При* $p > 2$ *тензорный квадрат естественного модуля изоморфен прямой сумме его внешнего квадрата и симметрического квадрата.*

Множество весов группы типа A_1 канонически отождествляется с множеством целых чисел, а множество ее доминантных весов – с множеством целых неотрицательных чисел.

Л е м м а 8 [6, лемма 7]. *Пусть* U *–* $A_1(K)$*-модуль и* $|a| < p$ *для всех весов* $a \in \Lambda(U)$*. Тогда модуль* U *вполне приводим.*

Следующие леммы и предложение описывают строение некоторых модулей Вейля и тилтинг-модулей для группы $A_1(K)$.

Л е м м а 9 [1, леммы 1.2, 1.3]. *При* $0 \le c < p$ *модуль* $T(c) \cong V(c) \cong M(c)$. *При* $p \le c \le 2p - 2$ *положим* $c = r + p$. *Тогда максимальный подмодуль* M *модуля* $V(c)$ *изоморфен* $M(p - r - 2)$ и $V(c) / M \cong M(c)$. *В модуле* $T(c)$ *имеется фильтрация*

$$T(c) = M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset M_4 = 0 \text{ с } M_1 / M_2 \cong M_3 \cong M(p - r - 2) \text{ и } M_2 / M_3 \cong M(r + p);$$

$\dim(T(c)) = 2p$. *В этом случае модуль* $T(c)$ *проективен для группы* $A_1(p)$.

Л е м м а 10 [1, лемма 1.4]. *Пусть* $0 \le r \le p - 2$. *Положим* $c = r + p$, $d = p - r - 2$. *Предположим, что композиционные факторы* $A_1(K)$*-модуля* U *изоморфны либо* $M(c)$, *либо* $M(d)$. *Тогда* $U = T(c)^q \oplus V(c)^s \oplus \Delta(c)^t \oplus M(c)^u \oplus M(d)^v$. *При этом модуль* U *самодуален тогда и только тогда, когда* $s = t$.

Ниже Fr – морфизм Фробениуса группы G, задаваемый возведением элементов поля K в степень p.

П р е д л о ж е н и е 3 [7, пример 2]. *Пусть* $m \ge p$. *Тогда* $T(m) \cong T(p - 1 + r) \otimes T(s)^{Fr}$, *где* r *и* s *определяются из равенства* $m + 1 - p = r + ps$, $0 \le r \le p - 1$.

В теоремах 1–3 $G = C_l(K)$.

Т е о р е м а 1 [8]. *Неприводимые представления группы* G *со старшими весами* $\omega_{l-1} + \frac{p-3}{2}\omega_l$ и $\frac{p-1}{2}\omega_l$ *имеют размерности* $\frac{p^l-1}{2}$ и $\frac{p^l+1}{2}$ *соответственно, и все их веса имеют кратность* 1.

Т е о р е м а 2 [5, 8.1]. *Неприводимые представления группы* G *со старшими весами* $a\omega_1$ *при* $a < p$ *или* $a\omega_i + (p - 1 - a)\omega_{i+1}$, *где* $1 \le i < l$ *и* $a \ne 0$ *для* $i = l - 1$, *эквивалентны ограничениям на* G *неприводимых представлений группы* A_{2l-1} *с такими же старшими весами.*

Т е о р е м а 3 [9, теорема 5.1]. *Пусть* $M = M(\omega_2)$. *Тогда* $\dim M = 2l^2 - l - 2$ *при* $p \mid l$ *и* $\dim M = 2l^2 - l - 1$ *при* $p \nmid l$. *Если* pl, *то ограничение на* G *внешнего квадрата естественного модуля группы* $A_{2l-1}(K)$ *изоморфно прямой сумме модуля* M *и тривиального модуля.*

В теоремах 4–6 $G = B_l(K)$ или $D_l(K)$.

Т е о р е м а 4 (см., напр., [10, предложение 2.34]). *Пусть* $t = 2l - 1$, $i < l - 1$ *при* $G = D_l(K)$ *и* $t = 2l$, $i < l$ *при* $G = B_l(K)$. *Тогда неприводимое представление группы* G *со старшим весом* ω_i *эквивалентно ограничению на* G *неприводимого представления группы типа* $A_t(K)$ *с таким же старшим весом.*

Т е о р е м а 5 [10, лемма 2.23]. *Пусть* $G = D_l(K)$, $f + g = l - 1$ *и* $B \cong B_f(K)B_g(K)$ (*здесь положим* $B_0(K) = 1$) – *естественно вложенная подгруппа в* G. *Тогда ограничения на* B *представлений* $\varphi(\omega_l)$ *и* $\varphi(\omega_{l-1})$ *неприводимы. При* $B \cong B_{l-1}(K)$ *эти ограничения эквивалентны спинорному представлению* $\varphi(\omega_{l-1})$.

Т е о р е м а 6 [9, теорема 5.1]. *Пусть* $t = 2l$ *при* $G = B_l(K)$ *и* $t = 2l - 1$ *при* $G = D_l(K)$. *Положим* $M = M(2\omega_1)$. *Если* $p \nmid (t + 1)$, *то* $\dim M = 2l^2 + 3l$ *при* $G = B_l(K)$ *и* $\dim M = 2l^2 + l - 1$ *при* $G = D_l(K)$. *В этой ситуации ограничение на* G *симметрического квадрата естественного модуля группы* $A_t(K)$ *эквивалентно прямой сумме модуля* M *и тривиального модуля. Если* $p \mid t + 1$, *то* $\dim M = 2l^2 + 3l - 1$ *при* $G = B_l(K)$ *и* $\dim M = 2l^2 + l - 2$ *при* $G = D_l(\mathrm{K})$.

Общая схема определения блочной структуры образов унипотентных элементов в рассматриваемых представлениях.

Объем сообщения не позволяет привести полные доказательства даже основных результатов. Ниже изложена схема этих доказательств.

Список неприводимых представлений классических алгебраических групп размерностей, меньших 100, взят из работы Любека [9, теорема 5.1 и таблицы в § 6]. Ясно, что можно не рассматривать стандартные и тривиальные модули, а также модули, получаемые из стандартных с помощью графовых автоморфизмов группы. Учитывая это, заключаем, что интересующие нас представления имеются у групп $A_l(K)$, $l \le 13$, $B_l(K)$, $l \le 6$, $C_l(K)$ и $D_l(K)$, $l \le 7$.

Известно, что если $G \ne D_l(K)$ или унипотентный элемент $x \in G$ имеет хотя бы один блок нечетной размерности в стандартной реализации группы, то класс сопряженности элементов, содержащий x, однозначно определяется жордановой формой этих элементов в стандартной реализации. При $G = D_l(K)$, если в стандартной реализации размерности всех блоков Жордана унипотентного элемента четны, то множество элементов с такой формой Жордана разбивается на два класса сопряженности.

Кроме того, унипотентный элемент из группы $SL_n(K)$ сопряжен с элементом из группы $Sp_n(K)$ тогда и только тогда, когда кратности всех блоков Жордана нечетной размерности четны, и сопряжен с элементом из $SO_n(K)$ тогда и только тогда, когда кратности блоков четной размерности четны (см., напр., [11, лемма 2.3 и замечание после предложения 2.8]).

Известно, что каждый элемент $x \in G$ порядка p содержится в замкнутой связной подгруппе A_x со следующими свойствами: $A_x \cong A_1(K)$, для некоторого максимального тора $T \subset G$ подгруппа $T_x = T \cap A_x$ – максимальный тор в A_x и ограничение весов с T на T_x задает гомоморфизм $\tau_x\colon \Lambda(G) \to \mathbb{Z}$ с $\tau_x(\alpha_i) \in \{0, 1, 2\}$. При этом значения $\tau_x(\alpha_i)$ равны соответствующим меткам на помеченной схеме Дынкина элемента x (см., напр., [1, предложение 2.2]).

Т а б л и ц а 1. **Группы типа A_l**

G	$\dim \varphi$	$\omega(\varphi)$	p	$J(\varphi(x))$
A_5	84	$\omega_1 + \omega_4$	7	(7^{12})
			11	$(11^4, 10, 8, 6^2, 4^2, 2)$
			13	$(13^2, 10^2, 8^2, 6^2, 4^2, 2)$
			≥ 17	$(14, 12, 10^2, 8^2, 6^2, 4^2, 2)$
A_6	84	$3\omega_1$	7	(7^{12})
			11	$(11^7, 7)$
			13	$(13^5, 9, 7, 3)$
			17	$(17^2, 13, 11, 9, 7^2, 3)$
			≥ 19	$(19, 15, 13, 11, 9, 7^2, 3)$
A_7	70	ω_4	11	$(11^5, 9, 5, 1)$
			13	$(13^3, 11, 9, 5^2, 1)$
			≥ 17	$(17, 13, 11, 9^2, 5^2, 1)$
A_8	80	$\omega_1 + \omega_8$	11	$(11^7, 3)$
			13	$(13^5, 7, 5, 3)$
			≥ 17	$(17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3)$
	84	ω_3	11	$(11^7, 7)$
			13	$(13^5, 9, 7, 3)$
			17	$(17^2, 13, 11, 9, 7^2, 3)$
			≥ 19	$(19, 15, 13, 11, 9, 7^2, 3)$
A_9	99	$\omega_1 + \omega_9$	11	(11^9)
			13	$(13^7, 5, 3)$
			17	$(17^3, 13, 11, 9, 7, 5, 3)$
			≥ 19	$(19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3)$
A_{11}	78	$2\omega_1$	13	(13^6)
			17	$(17^4, 7, 3)$
			19	$(19^3, 11, 7, 3)$
			≥ 23	$(23, 19, 15, 11, 7, 3)$
A_{12}	78	ω_2	13	(13^6)
			17	$(17^4, 7, 3)$
			19	$(19^3, 11, 7, 3)$
			≥ 23	$(23, 19, 15, 11, 7, 3)$
	91	$2\omega_1$	13	(13^7)
			17	$(17^5, 5, 1)$
			19	$(19^4, 9, 5, 1)$
			23	$(23^2, 17, 13, 9, 5, 1)$
			≥ 29	$(25, 21, 17, 13, 9, 5, 1)$
A_{13}	91	ω_2	17	$(17^5, 5, 1)$
			19	$(19^4, 9, 5, 1)$
			23	$(23^2, 17, 13, 9, 5, 1)$
			≥ 29	$(25, 21, 17, 13, 9, 5, 1)$

Пусть M – модуль, в котором реализуется представление φ, $\omega = \omega(M)$. Ясно, что $\tau(\omega) = \max\limits_{\mu\in\Lambda(M)} \tau(\mu)$. Оказывается, что для рассматриваемых представлений $\tau(\omega) \le 3p$ и для большинства из них $\tau(\omega) \le 2p - 2$. Чтобы найти размерности блоков Жордана элемента x на модуле M, определим неразложимые компоненты модуля $M_x = M|A_x$. Сначала находим композиционные факторы модуля M_x. Для этого необходимо знать размерности весовых подпространств модуля M. В ряде рассматриваемых случаев модуль Вейля $V(\omega)$ неприводим, т. е. $M \cong V(\omega)$. Тогда эти размерности вычисляются по известным формулам [12, § 22, п. 3]. Часто M оказывается одним из модулей с одномерными весовыми подпространствами из предложений 1, 2 и теоремы 1. В других ситуациях явно строятся базисы весовых подпространств для всех доминантных весов модуля M. Нетрудно установить, что при $G \ne D_l(K)$ или $\omega = \sum\limits_{i=1}^{l-2} a_i\omega_i$ модуль M_x самодуален.

В ряде случаев леммы 3 и 4 позволяют установить, что M_x – тилтинг-модуль, тогда это прямая сумма модулей $T(\lambda)$. Слагаемые определяются с помощью леммы 9 и предложения 3. В тех ситуациях, когда априори не ясно, является ли M_x тилтинг-модулем, для определения неразложимых компонент модуля M_x используются явные вычисления, рассматривается действие корневых элементов алгебры Ли группы A_x и элементов гипералгебры этой группы на определенные весовые векторы модуля M_x. Существенную роль играют принцип связи [13, теорема 3.6] и лемма 9. Часто приходится выяснять, имеет ли модуль M_x прямое слагаемое вида $T(\lambda) \oplus M(\lambda)$ или $W(\lambda) \oplus \Delta(\lambda)$ при $\lambda = p + a$, $a < p - 1$. Для этого используется лемма 5. Для определения блочной структуры образов элементов, отличных от регулярных, применяется анализ ограничений рассматриваемых представлений на подсистемные и некоторые другие естественно вложенные подгруппы.

Далее, если $x \in \mathrm{GL}(n, K)$ – унипотентный элемент, имеющий k_1 блоков Жордана размерности d_1, k_2 блоков размерности d_2, …, k_t блоков размерности d_t с $d_1 > d_2 > \ldots > d_t$ и $k_1d_1 + k_2d_2 + \ldots + k_td_t = n$, будем писать $J(x) = (d_1^{k_1}, d_2^{k_2}, ..., d_t^{k_t})$.

Объем сообщения позволяет привести лишь часть полученных результатов. В табл. 1–4 указана блочная структура образов регулярных унипотентных элементов в p-ограниченных неприводимых представлениях, размерности которых ≥70, но ≤100. Если два представления получаются друг из друга с помощью графового автоморфизма группы, то указано только одно из них. У авторов имеются аналогичные таблицы для всех p-ограниченных неприводимых представлений размерностей ≤100.

Т а б л и ц а 2. **Группы типа B_l**

G	dim φ	$\omega(\varphi)$	p	$J(\varphi(x))$
B_3	77	$3\omega_1$	7	(7^{11})
			11	(11^7)
			13	$(13^5, 9, 3)$
			17	$(17^2, 13, 11, 9, 7, 3)$
			≥19	(19, 15, 13, 11, 9, 7, 3)
B_4	84	ω_3	11	$(11^7, 7)$
			13	$(13^5, 9, 7, 3)$
			17	$(17^2, 13, 11, 9, 7^2, 3)$
			≥19	$(19, 15, 13, 11, 9, 7^2, 3)$
B_6	78	ω_2	13	(13^6)
			17	$(17^4, 7, 3)$
			19	$(19^3, 11, 7, 3)$
			≥23	(23, 19, 15, 11, 7, 3)
	89	$2\omega_1$	13	$(13^6, 11)$
	90	$2\omega_1$	17	$(17^5, 5)$
			19	$(19^4, 9, 5)$
			23	$(23^2, 17, 13, 9, 5)$
			≥29	(25, 21, 17, 13, 9, 5)

Т а б л и ц а 3. **Группы типа C_l**

G	dim φ	ω(φ)	p	$J(\varphi(x))$
C_6	78	$2\omega_1$	13	(13^6)
			17	$(17^4, 7, 3)$
			19	$(19^3, 11, 7, 3)$
			≥23	(23, 19, 15, 11, 7, 3)
C_7	90	ω_2	17	$(17^5, 5)$
			19	$(19^4, 9, 5)$
			23	$(23^2, 17, 13, 9, 5)$
			≥29	(25, 21, 17, 13, 9, 5)

Т а б л и ц а 4. **Группы типа D_l**

G	dim φ	ω(φ)	p	$J(\varphi(x))$
D_6	77	$2\omega_1$	11	(11^7)
			13	$(13^5, 11, 1)$
			17	$(17^3, 11, 9, 5, 1)$
			19	$(19^2, 13, 11, 9, 5, 1)$
			≥23	(21, 17, 13, 11, 9, 5, 1)
D_7	91	ω_2	13	(13^7)
			17	$(17^4, 13, 7, 3)$
			19	$(19^3, 13, 11, 7, 3)$
			≥23	(23, 19, 15, 13, 11, 7, 3)

Заключение. Определена блочная структура образов унипотентных элементов в модулярных неприводимых p-ограниченных представлениях классических алгебраических групп размерности ≤100. Размерности блоков Жордана этих образов существенно зависят от характеристики поля.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция» (2011–2015) и частично поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект Ф14Р-109).

Список использованной литературы

1. *Seitz, G. M.* Unipotent elements, tilting modules, and saturation / G. M. Seitz // Invent. Math. – 2000. – Vol. 141, N 3. – P. 467–502.

2. *Velichko, M. V.* On the behaviour of the root elements in irreducible representations of simple algebraic groups / M. V. Velichko // Тр. Ин-та математики. – 2005. – Т. 13, № 2. – С. 116–121.

3. *Jantzen, J. C.* Representations of algebraic groups (2 ed.) / J. C. Jantzen // Mathematical Surveys and Monographs. – 2003. – Vol. 107. – 576 p.

4. *Залесский, А. Е.* Срезанные симметрические степени естественных реализаций групп $SL_m(P)$ и $Sp_m(P)$ и их ограничения на подгруппы / А. Е. Залесский, И. Д. Супруненко // Сиб. математ. журн. – 1990. – Т. 31, № 4. – С. 33–46.

5. *Seitz, G. M.* The maximal subgroups of classical algebraic groups / G. M. Seitz // Memoirs Amer. Math. Soc. – 1987. – Vol. 67, N 365. – P. iv–286.

6. *Супруненко, И. Д.* О блочной структуре регулярных унипотентных элементов из подсистемных подгрупп типа $A_1 \times A_2$ в представлениях специальной линейной группы / И. Д. Супруненко // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2011. – Т. 388. – С. 247–269.

7. *Donkin, S.* On tilting modules for algebraic groups / S. Donkin // Math. Zeits. – 1993. – Vol. 212. – P. 39–60.

8. *Залесский, А. Е.* Представления размерности $(p^n + 1) / 2$ симплектической группы степени $2n$ над полем характеристики p / А. Е. Залесский, И. Д. Супруненко // Вести АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1987. – № 6. – Р. 9–15.

9. *Lubeck, F.* Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic / F. Lubeck // LMS J. Comput. Math. – 2001. – Vol. 4. – P. 135–169.

10. *Suprunenko, I. D.* The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic / I. D. Suprunenko // Memoirs Amer. Math. Soc. – 2009. – Vol. 200, N 939. – 154 p.

11. *Seitz, G. M.* Unipotent and nilpotent classes in simple algebraic groups and Lie algebras / G. M. Seitz, M. W. Liebeck // Mathematical Surveys and Monographs. – 2012. – Vol. 180. – 380 p.

12. *Хамфрис, Дж.* Введение в теорию алгебр Ли и их представлений / Дж. Хамфрис. – М.: МЦНМО, 2003. – 216 с.

13. *Humphreys, J.* Modular representations of finite groups of Lie types / J. Humphreys. – UK: LMS Lecture Note Series 326, 2006. – 233 p.

Поступило в редакцию 19.10.2015