Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 март–апрель Том 60 № 2

УДК 517.977

А. И. АСТРОВСКИЙ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ НАБЛЮДЕНИЯ СО СКАЛЯРНЫМ ВЫХОДОМ К ФОРМЕ ШВАРЦА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь
aastrov@tut.by

Для линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом получены необходимые и достаточные условия приводимости к системам наблюдения в форме Шварца с помощью непрерывно дифференцируемой группы.

Ключевые слова: линейная нестационарная система наблюдения, каноническая форма, форма Шварца.

A. I. ASTROVSKII

TRANSFORMATION OF LINEAR TIME-VARYING OBSERVATION SYSTEMS WITH SCALAR OUTPUT TO THE SCHWARZ FORM

Belarusian State Economic Universiry, Minsk, Belarus
aastrov@tut.by

The necessary and sufficient conditions for linear time-varying observation systems with scalar output to be transformed to the Schwarz form under the action of a linear continuously differentiable group are obtained.

Keywords: linear time-varying observation system, canonical form, Schwarz form.

Введение. Исследование структурных свойств динамических систем часто основывается на преобразовании их к некоторой простейшей (канонической) форме. Выбор группы преобразований и вида канонической системы определяется изучаемыми свойствами. Общая концепция исследования линейных систем управления-наблюдения, основанная на классификации их относительно действия различных групп преобразований, изложена в [1]. Реализация этой концепции достаточно полно разработана в [2–9].

В данной работе, продолжающей исследования [1–9], получены необходимые и достаточные условия приводимости линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом к форме Шварца [10–12]. Важность систем Шварца в первую очередь состоит в том, что для них достаточно просто находятся функции Ляпунова.

Функции Ляпунова для систем Шварца. Рассмотрим на полупрямой $\mathbb{R}_+$ линейную нестационарную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ – n-вектор-столбец состояний, а $A(t)$ – непрерывная на $\mathbb{R}_+$ $(n \times n)$-матрица.

Для системы (1) функции Ляпунова чаще всего строятся в виде квадратичной формы, что приводит к необходимости решать матричное уравнение Ляпунова

$$\frac{dP(t)}{dt} + A'(t)P(t) + P(t)A(t) = Q(t), \tag{2}$$

в котором $Q(t) = (q_{ij}(t))$ – непрерывная симметричная отрицательно определенная $(n \times n)$-матрица. Решение уравнения Ляпунова (2) сильно упрощается, если матрица $A(t)$ представлена в форме Шварца

$$A(t) = H(t) = \begin{pmatrix} 0 & h_0(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h_1(t) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-2}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & h_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где $h_i(t)$ − непрерывные на $\mathbb{R}_+$ функции. Например, если $n = 3$ и матрица $H(t)$ стационарна, то элементы p_{ij} матрицы P при условии $h_i \neq 0$ $(i = 0,1,2)$ определяются следующим образом:

$$p_{12} = \frac{q_{11}}{2}, \quad p_{23} = \frac{q_{22} - h_0 q_{11}}{2}, \quad p_{33} = \frac{q_{33} - h_1 q_{22} + h_0 h_1 q_{11}}{2h_2}, \quad p_{13} = \frac{2q_{13} - q_{22} - (h_1 - h_0) q_{11}}{2h_2},$$

$$p_{22} = \frac{2h_2 q_{23} - q_{33} - 2h_0 q_{13} + (h_0 + h_1 - h_2^2) q_{22} + (h_0 h_2^2 - h_0^2) q_{11}}{2h_1 h_2},$$

$$p_{11} = \frac{q_{33} + (h_0^2 + h_1^2 - h_0 h_1 - h_0 h_2^2) q_{11} + (h_2^2 - h_0) q_{22} + 2(h_0 - h_1) q_{13} - 2h_2 q_{23} + 2h_1 h_2 q_{12}}{2h_0 h_1 h_2}.$$

Пусть матрица $H(t)$ нестационарна и

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) & 0 \\ q_{12}(t) & q_{22}(t) & q_{23}(t) \\ 0 & q_{23}(t) & q_{33}(t) \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде $P(t) = \mathrm{diag}(p_1(t), p_2(t), p_3(t))$. Простые вычисления показывают, что в этом случае

$$p_1(t) = \int_{t_0}^{t} q_{11}(\tau) d\tau + C_1, \quad p_2(t) = \int_{t_0}^{t} q_{22}(\tau) d\tau + C_2, \quad p_3(t) = q_{23}(t) - h_1(t) \left(\int_{t_0}^{t} q_{22}(\tau) d\tau + C_2 \right),$$

$$q_{12}(t) = h_0(t) \left(\int_{t_0}^{t} q_{11}(\tau) d\tau + C_1 \right) + \int_{t_0}^{t} q_{22}(\tau) d\tau + C_2,$$

$$q_{33}(t) = \dot{q}_{23}(t) + 2h_2(t) q_{23}(t) - \dot{h}_1(t) \left(\int_{t_0}^{t} q_{22}(\tau) d\tau + C_2 \right) - h_1(t) \left(q_{22}(t) + 2h_2(t) \left(\int_{t_0}^{t} q_{22}(\tau) d\tau + C_2 \right) \right).$$

Форма Шварца для систем наблюдения. Присоединим к системе (1) скалярный выход

$$y(t) = c(t) x(t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \qquad (4)$$

с непрерывной n-вектор строкой $c(t)$. Для краткости систему наблюдения (1), (4) отождествим с парой (A, c).

Пусть $\mathcal{G}$ – группа всех невырожденных при каждом $t \in T$ квадратных $(n \times n)$-матриц $G(t)$, принадлежащих $C^1(T, R^{n \times n})$. Действие группы $\mathcal{G}$ на паре (A, c) зададим стандартным образом

$$G * (A, c) = (G^{-1} A G - G^{-1} \dot{G}, cG), \quad G \in \mathcal{G}, \qquad (5)$$

а символом $\mathcal{O}(A, c)$ будем обозначать орбиту пары (A, c) относительно действия группы $\mathcal{G}$.

Говорят, что система (1), (4) обладает формой Шварца, если в множестве $\mathcal{O}(A, c)$ существует система (H, c^0), где $H(t)$ матрица вида (3), а $c^0 = (0, 0, ..., 1)$.

Отметим, что если в орбите $\mathcal{O}(A, c)$ пары (A, c) существует форма Шварца, то, вообще говоря, она не является единственной. Например, если $n = 3$ и для системы (A, c) существует форма Шварца

$$H(t) = \begin{pmatrix} 0 & h_0(t) & 0 \\ 1 & 0 & h_1(t) \\ 0 & 1 & h_2(t) \end{pmatrix},$$

то у этой системы имеется множество форм Шварца

$$H_g(t) = \begin{pmatrix} 0 & h_0(t) \pm g(t) & 0 \\ 1 & 0 & h_1(t) \mp g(t) \\ 0 & 1 & h_2(t) \end{pmatrix},$$

где $g(t) = \exp\left(C - \int\limits_{t_0}^{t} h_2(\tau) d\tau \right)$, C – произвольная постоянная. Других форм Шварца, кроме указанных, в данном случае нет.

З а м е ч а н и е. *Если предположить, что* $h_0(t) \equiv 1$, *то при* $n = 2, 3, 4$ *форма Шварца единственна.*

Условия существования формы Шварца. Анализ соотношения (5) показывает, что для существования формы Шварца (H, c^0) необходимо выполнение условий

$$c \in C^1(T, R^n) \text{ и } c(t) \neq 0, \ t \in T.$$

Считая их выполненными, определим функции $b_{ij}(t)$ и n-вектор функции $p_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ по правилу

$$b_{10}(t) = \|c(t)\|, \quad p_1(t) = \frac{c(t)}{\|c(t)\|}, \quad b_{nn}(t) = (p_1(t)A(t) + \dot{p}_1(t))p_1'(t),$$

$$b_{n,n-1}(t) = \|p_1(t)A(t) + \dot{p}_1(t) - b_{nn}(t)p_1(t)\|, \quad p_2(t) = \frac{p_1(t)A(t) + \dot{p}_1(t) - b_{nn}(t)p_1(t)}{b_{n,n-1}(t)}, \ldots,$$

$$b_{n+1-i,n+1-j}(t) = (p_i(t)A(t) + \dot{p}_i(t))p_j'(t), \quad (j = 1, 2, \ldots, i),$$

$$b_{n+1-i,n-i}(t) = \left\| p_i(t)A(t) + \dot{p}_i(t) - \sum_{k=1}^{i} b_{n+1-i,n+1-k}(t)p_k(t) \right\|,$$

$$p_{i+1}(t) = \frac{p_i(t)A(t) + \dot{p}_i(t) - \sum_{k=1}^{i} b_{n+1-i,n+1-k}(t)p_k(t)}{b_{n+1-i,n-i}(t)},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Справедлива

Т е о р е м а 1. *Пусть элементы* $(n \times n)$*-матрицы* $A(t)$ $(2n - 2)$ *раза, а элементы* n*-вектор функции* $c(t)$ $(2n - 1)$ *раз непрерывно дифференцируемы на* T. *Система* (A, c) *обладает формой Шварца тогда и только тогда, когда выполняются условия* $b_{i,i-1}(t) \neq 0, \quad t \in T \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Формы Шварца тесно связаны с каноническими формами Фробениуса (A^0, c^0), $A^0(t) = (\delta_{i,j+1} + \delta_{nj}\alpha_{i-1}(t))_{i,j=1}^{n}$ (δ_{ij} – символ Кронекера), которые широко используются в математической теории систем [1; 2; 13; 14]. Например, для систем пятого порядка форма Шварца (H, c^0) преобразуется к канонической форме Фробениуса с помощью следующей матрицы:

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h_0(t) & -\dot{h}_0(t) & \ddot{h}_0(t) + h_0^2(t) + h_0(t)h_1(t) \\ 0 & 1 & 0 & h_0(t) + h_1(t) & -2\dot{h}_0(t) - \dot{h}_1(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & h_0(t) + h_1(t) + h_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом функции, определяющие каноническую форму Фробениуса, находятся по формулам

$$\alpha_4(t) = h_4(t), \quad \alpha_3(t) = h_0(t) + h_1(t) + h_2(t) + h_3(t),$$

$$\alpha_2(t) = -3\dot{h}_0(t) - 2\dot{h}_1(t) - \dot{h}_2(t) - h_4(t)(h_0(t) + h_1(t) + h_2(t)),$$

$$\alpha_1(t) = 3\ddot{h}_0(t) + \ddot{h}_1(t) + h_4(t)(2\dot{h}_0(t) + \dot{h}_1(t)) - h_0(t)h_2(t) - h_3(t)(h_0(t) + h_1(t)),$$

$$\alpha_0(t) = -\dddot{h}_0(t) + \dot{h}_0(t)h_2(t) + h_0(t)\dot{h}_2(t) - h_4(t)(\ddot{h}_0(t) - h_0(t)h_2(t)) + \dot{h}_0(t)h_3(t).$$

Заметим, что несмотря на неединственность формы Шварца, из всех таких форм, находящихся в орбите $\mathcal{O}(A, c)$, получается одна и та же каноническая форма Фробениуса.

Форма Шварца для равномерно наблюдаемых систем. Рассмотрим равномерно наблюдаемую систему (A, c) класса n [1; 2]. Для нее существует непрерывно дифференцируемая невырожденная при каждом $t \in T$ матрица наблюдаемости $S(t)$, строки которой находятся по рекуррентным формулам

$$s_0(t) = c(t), \quad s_{i+1}(t) = s_i(t)A(t) + \dot{s}_i(t) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Пусть $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) = s_n(t)S^{-1}(t)$ [1; 2] – полный инвариант пары (A, c) относительно действия группы $\mathcal{G}$.

Т е о р е м а 2. *Форма Шварца для равномерно наблюдаемых систем* (A, c) *класса* n *существует тогда и только тогда, когда* $f_i \in C^{i-1}(T, R) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

Например, для системы третьего порядка функции $h_0(t), h_1(t), h_2(t)$, определяющие форму Шварца, находятся по формулам

$$h_2(t) = f_3(t), \quad h_0(t) = f_2(t) - h_1(t) - 2f_3(t),$$

$$h_1(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} f_3(\tau)d\tau\right)\left(C + \int_{t_0}^{t} (f_1(\tau) + f_3(\tau)f_2(\tau) - \ddot{f}_3(\tau) - 2f_3(\tau)\dot{f}_3(\tau))\exp\left(-\int_{t_0}^{t} f_3(\xi)d\xi\right)d\tau\right),$$

где C – произвольная постоянная. Коэффициенты же канонической формы Фробениуса в данном случае имеют вид

$$\alpha_2(t) = f_3(t), \quad \alpha_1(t) = f_2(t) - 2f_3(t), \quad \alpha_0(t) = f_1(t) - \dot{f}_2(t) + \ddot{f}_3(t).$$

Список использованной литературы

1. *Гайшун, И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем / И. В. Гайшун. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

2. *Астровский, А. И.* Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений / А. И. Астровский, И. В. Гайшун. – Минск: Беларус. навука, 2013.

3. *Астровский, А. И.* Связь между каноническими формами линейных дифференциальных систем наблюдения и каноническими формами их дискретных аппроксимаций / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. − 2011. − Т. 47, № 7. − С. 954–962.

4. *Астровский, А. И.* Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения с квазидифференцируемыми коэффициентами относительно различных групп преобразований / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. − 2011. − Т. 47, № 2. − С. 254–263.

5. *Астровский, А. И.* Один способ построения канонических форм Фробениуса линейных нестационарных систем наблюдения / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. − 2010. − Т. 46, № 10. − С. 1479–1487.

6. *Астровский, А. И.* Квазидифференцируемость и канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. − 2010. − Т. 46, № 3. − С. 423–431.

7. *Астровский, А. И.* Преобразование линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом к каноническим формам Фробениуса / А. И. Астровский // Докл. НАН Беларуси. − 2009. − Т. 53, № 6. − С. 16–21.

8. *Астровский, А. И.* Квазидифференцируемость и наблюдаемость линейных нестационарных систем / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. − 2009. − Т. 45, № 11. − С. 1567–1576.

9. *Астровский, А. И.* Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения и хессенбергова наблюдаемость / А. И. Астровский // Докл. РАН. − 2002. − Т. 383, № 4. − С. 439–442.

10. *Chen, C. F.* A matrix for evaluating Schwarz's form / C. F. Chen, H. Chu // IEEE Trans. Autom. Control. – 1966. – Vol. AC-11, N 2. – P. 303–305.

11. *Lab, M.* On Schwarz canonical form for large system simplification / M. Lab // IEEE Trans. Autom. Control. – 1975. – Vol. AC-20, N 2. – P. 262–263.

12. *Anderson, B. D. O.* Schwarz matrix properties for continuous and discrete systems / B. D. O. Anderson, E. I. Jury, M. Mansour // Int. J. Control. – 1976. – Vol. 23, N 1. – P. 1–16.

13. *Д'Анжело, Г.* Линейные системы с переменными параметрами / Г. Д'Анжело. – М.: Машиностроение, 1974.

14. *Silverman, L. M.* Transformation time-variable systems to canonical (phase-variable) form / L. M. Silverman // IEEE Trans. Autom. Control. – 1966. – Vol. AC-11, N 2. – P. 300–303.

Поступило в редакцию 27.01.2016