Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 ноябрь–декабрь Том 58 № 6

УДК 519.6+517.983.54

П. П. ЗАБРЕЙКО[1], О. В. МАТЫСИК[2]

ТЕОРЕМА КРАСНОСЕЛЬСКОГО И ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено членом-корреспондентом Л. А. Яновичем)

[1]Белорусский государственный университет, Минск
[2]Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина
Поступило 15.09.2014

В работе [1] было показано, что известная теорема М. А. Красносельского о сходимости последовательных приближений для уравнения второго рода $x = Bx + f$ с самосопряженным оператором B в гильбертовом пространстве X в случае, если это уравнение некорректно, позволяет получить для этого уравнения типичные утверждения теории некорректных задач. В частности, установить условия сходимости приближенных решений к точному, условия сходимости к нулю невязок и поправок, выяснить поведение приближений в случае истокообразных точных решений или истокообразных правых частей f в уравнении $x = Bx + f$ и т. д.

Цель сообщения – показать, что из результатов статьи [1] вытекают основные результаты о поведении различных итераций при приближенном решении некорректных уравнений первого рода $Ax = y$ с самосопряженным оператором A в гильбертовом пространстве, описать основную общую конструкцию для перехода от уравнения $Ax = y$ к уравнению $x = Bx + f$, а затем применить результаты [1] к полученному уравнению. Установленные таким образом теоремы будут содержать ряд классических результатов об итерационных процедурах решения некорректных задач и ряд новых.

1. Пусть A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X. Рассматривается линейное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где $y \in X$. Нас будет интересовать случай, когда 0 является точкой спектра SpA оператора A.

Пусть $\varphi(\lambda)$ – некоторая вещественная и аналитическая на спектре оператора A функция, принимающая в нулевой точке значение 1; тогда

$$\varphi(\lambda) = 1 - \lambda\psi(\lambda),$$

где $\psi(\lambda)$ тоже вещественная и аналитическая на SpA функция. Простейшими примерами таких функций могут служить полиномы или рациональные функции.

Для каждой функции $\varphi(\lambda)$ описанного вида определен оператор $\varphi(A)$; он также является самосопряженным. Определен также и оператор $\psi(A)$. Очевидно равенство

$$x - \varphi(A)x = \psi(A)Ax.$$

Из этого уравнения вытекает, что каждое решение x уравнения (1) является решением уравнения

$$x = \varphi(A)x + \psi(A)y. \tag{2}$$

Обратное тоже верно при дополнительном предположении, что 0 не является собственным значением оператора $\psi(A)$. Действительно, (2) можно переписать в виде

$$\psi(A)(Ax - y) = 0,$$

откуда следует, что x является и решением уравнения (2). Предположение, что 0 не является собственным значением оператора $\psi(A)$ эквивалентно тому, что 1 не является собственным значением оператора $\varphi(A)$. Последнее, очевидно, означает, что решение уравнения (2), если оно существует, единственно. Таким образом, если уравнение (1) имеет единственное решение x_*, то оно является единственным решением уравнения (2), и наоборот, если уравнение (2) имеет единственное решение, то оно будет и единственным решением уравнения (1). Отметим, что в общем случае (без предположения, что 0 не является собственным значением оператора A) в случае разрешимости уравнения (1) решение x уравнения (2) не обязательно является решением уравнения (1), однако решением уравнения (1) в этом случае обязательно является элемент $x+\varphi(A)(\xi - x)$, где ξ – произвольное решение уравнения (1).

Итак, вместо анализа свойств разрешимости уравнения (1) можно исследовать уравнение (2). Однако последнее уравнение имеет вид $x = Bx + f$ с $B = \varphi(A)$, $f = \psi(A)y$, и для его исследования естественно использовать отмеченную выше теорему М. А. Красносельского. Условия последней будут выполнены, если $\|\varphi(A)\| = 1$ и -1 не является собственным значением оператора $\varphi(A)$. Так как по теореме Данфорда [2] $Sp\,\varphi(A) = \varphi(SpA)$, и оператор $\varphi(A)$ является самосопряженным, то равенство $\|\varphi(A)\| = 1$ эквивалентно неравенству

$$|\varphi(\lambda)| \le 1 \quad (\lambda \in SpA) \tag{3}$$

(напомним, что $\varphi(0) = 1$ и потому (3) означает $\|\varphi(A)\| = 1$). Второе условие означает, что никакой корень уравнения $\varphi(\lambda)+1 = 0$ не является собственным значением оператора A. Итак, верна

Т е о р е м а 1. *Пусть A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X и его область значений не является замкнутой. Пусть $\varphi(\lambda)$ – аналитическая в окрестности SpA функция, для которой*

а) $\varphi(\lambda) = 1 - \lambda\psi(\lambda)$;

б) $|\varphi(\lambda)| \le 1 \quad (\lambda \in SpA)$;

в) нули функции $\varphi(\lambda)+1$ не являются собственными значениями оператора A.

Тогда, если уравнение (1) разрешимо, то последовательные приближения

$$x_{n+1} = \varphi(A)x_n + \psi(A)y \quad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{4}$$

сходятся к одному из решений уравнения (1).

Выбирая различные, удовлетворяющие условиям а), б), в) теоремы 1, функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$, получим разнообразные итерационные схемы приближенного построения решений уравнения (1). В частности, (см. [3]) выбрав $\varphi(\lambda) = (1-\alpha\lambda)^k$ (k – натуральное число), получим $\psi(\lambda) = \dfrac{1-(1-\alpha\lambda)^k}{\lambda}$ и, далее, если $SpA \subseteq \left[0, \dfrac{2}{\alpha}\right]$ и $\lambda = \dfrac{2}{\alpha}$ – не собственное значение оператора A, приходим к явному методу итераций $x_{n+1} = (E-\alpha A)^k x_n + A^{-1}[E-(E-\alpha A)^k]y$. Аналогично, выбрав $\varphi(\lambda) = \dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}$ (k – снова натуральное число), получим $\psi(\lambda) = \dfrac{2\alpha\lambda^{k-1}}{1+\alpha\lambda^k}$. Итерационный метод (4) при этом совпадает с неявным методом итераций, определяемым равенствами $(E+\alpha A^k)x_{n+1} = (E-\alpha A^k)x_n + 2\alpha A^{k-1}y$. При $\alpha > 0$ и нечетном k получаем, что условия теоремы 1 выполнены, если $SpA \subset [0,\infty)$; при $\alpha > 0$ и четном k получаем, что условия теоремы 1 выполнены всегда. В случае $\alpha < 0$ ситуация иная; при k нечетном условия теоремы 1 выполнены, если $SpA \subset (-\infty, 0]$, а в случае когда k – четное, условия теоремы 1 выполнены, если $SpA = \{0\}$.

Естественно возникает вопрос о скорости сходимости приближений (4). Приведем здесь вычисления из [1], модифицированные непосредственно для уравнения (2). Из (4), очевидно, вытекает

$$x_n = \varphi^n(A)x_0 + (E+\varphi(A)+\varphi^2(A)+\ldots+\varphi^{n-1}(A))\psi(A)y \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

а из (2) –

$$x_* = \varphi^n(A)x_* + (E+\varphi(A)+\varphi^2(A)+\ldots+\varphi^{n-1}(A))\psi(A)y \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Вычитая (6) из (5), получим

$$x_n - x_* = \varphi^n(A)(x_0 - x_*) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и далее

$$\|x_n - x_*\|^2 = \int\limits_{SpA} |\varphi(\lambda)|^{2n} (dE_\lambda (x_0 - x_*), x_0 - x_*). \qquad (7)$$

Отметим, что из формулы (7) вытекает сходимость приближений x_n к x_* в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла для сходящейся почти всегда к нулю последовательности. Из этой формулы следует, что эта сходимость тем быстрее, чем «меньше» функция на спектре оператора A. При этом эта скорость существенно зависит от свойств «гладкости» начальной ошибки $x_0 - x_*$, а эти последние – от свойств «гладкости» правой части y и свойств «некорректности» оператора A.

2. Рассмотрим теперь вопрос о поведении невязок $Ax_n - y$ и поправок $x_{n+1} - x_n = \varphi(A)x_n + \psi(A)y - x_n$ для приближений (4).

Из (5) следует

$$Ax_n = \varphi^n(A)Ax_0 + (E + \varphi(A) + \varphi^2(A) + \ldots + \varphi^{n-1}(A))A\psi(A)y =$$
$$\varphi^n(A)Ax_0 + (E + \varphi(A) + \varphi^2(A) + \ldots + \varphi^{n-1}(A))(E - \varphi(A))y =$$
$$\varphi^n(A)Ax_0 + (E - \varphi^n(A))y,$$

и значит,

$$Ax_n - y = \varphi^n(A)(Ax_0 - y).$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\|Ax_n - y\|^2 = \int\limits_{SpA} |\varphi(\lambda)|^{2n} (dE_\lambda (Ax_0 - y), Ax_0 - y). \qquad (8)$$

Аналогично, из (5) для поправок $x_{n+1} - x_n$ имеем

$$x_{n+1} - x_n = \varphi^n(A)(\varphi(A) - E)x_0 + \varphi^n(A)\psi(A)y = \varphi^n(A)(\varphi(A)x_0 + \psi(A)y - x_0)$$

или

$$x_{n+1} - x_n = \varphi^n(A)(x_1 - x_0).$$

Отсюда

$$\|x_{n+1} - x_n\|^2 = \int\limits_{SpA} |\varphi(\lambda)|^{2n} (dE_\lambda (x_1 - x_0), x_1 - x_0). \qquad (9)$$

В результате из (8) и (9) получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $Py = 0$, где P – ортопроектор на множество собственных векторов оператора $\varphi(A)$, отвечающих собственному значению 1. Тогда невязки $Ax_n - y$ и поправки $x_{n+1} - x_n$ для последовательных приближений (4) при любом начальном условии $x_0 \in X$ сходятся к нулю.*

Как показывают равенства (7), (8), (9) скорость сходимости последовательных приближений к точному решению, невязок и поправок к нулю существенно зависит от правой части y уравнения (1). Оценить эти скорости сходимости можно более точно для функций y из некоторых (обычно незамкнутых!) подпространств $\widetilde{X}$ пространства X. Среди таких подпространств наиболее простыми являются подпространства истокообразно представимых функций. Эти подпространства определяются при помощи некоторой определенной на SpA функции $\theta(\lambda)$ равенством $X(\theta) = \theta(A)X$ элементов вида $\xi = \int\limits_{SpA} \theta(\lambda) dE_\lambda h \quad (h \in X)$. Тогда

$$\|x_n - x_*\|^2 = \int\limits_{SpA} |\varphi(\lambda)|^{2n} |\theta(\lambda)|^2 (dE_\lambda h, h).$$

Отсюда

$$\|x_n - x_*\| \le \gamma_n \|h\| \; (x_0 - x_* = \theta(A)h, \; h \in X), \qquad (10)$$

где $\gamma_n = \max\limits_{\lambda \in SpA} |\varphi(\lambda)|^n |\theta(\lambda)|$.

Если $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$, то (10) дает квалифицированную оценку скорости сходимости приближений (4) к решению уравнения (1) сразу для всех функций x_0 и y, для которых $x_0 - x_* \in X(\theta)$ или $x_1 - x_0 \in X(\theta)$. Первое из этих условий $x_0 - x_* \in X(\theta)$ трудно проверяемо, так как x_* неизвестно. Однако оно выполняется, если $Ax_0 - y \in X(\tilde{\theta})$, где функции θ и $\tilde{\theta}$ связаны равенством $\theta(\lambda) = \lambda\tilde{\theta}(\lambda)$. В результате вместо (10) мы имеем оценку

$$\|x_n - x_*\| \le \tilde{\gamma}_n \|h\| \quad (Ax_0 - y \in X(\tilde{\theta})), \tag{11}$$

где $\tilde{\gamma}_n = \max\limits_{\lambda \in SpA} |\varphi(\lambda)|^n |\tilde{\theta}(\lambda)|$.

Формулы (8) и (9), в свою очередь, приводят к оценкам

$$\|Ax_n - y\| \le \gamma_n \|h\| \quad (Ax_0 - y \in X(\theta)), \tag{12}$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \gamma_n \|h\| \quad (x_1 - x_0 \in X(\theta)), \tag{13}$$

где последовательность γ_n снова определяется равенством (10).

Тем самым, доказана

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда:*

а) если θ – определенная на спектре SpA функция, для которой из $|\varphi(\lambda)| = 1$ вытекает $\theta(\lambda) = 0$, то $\gamma_n \to 0$ и, следовательно, при $x_0 - x_* \in X(\theta)$ скорость сходимости приближений (4) к соответствующему решению x_* уравнения (1) оценивается неравенством (10);

б) если θ – определенная на спектре SpA функция, для которой из $|\varphi(\lambda)| = 1$ вытекает $\tilde{\theta}(\lambda) = 0$, где $\tilde{\theta}(\lambda) = \lambda^{-1}\theta(\lambda)$, то $\tilde{\gamma}_n \to 0$ и, следовательно, при $Ax_0 - y \in X(\tilde{\theta})$ скорость сходимости приближений (4) к соответствующему решению x_* уравнения (1) оценивается неравенством (11);

в) если θ – определенная на спектре SpA функция, для которой из $|\varphi(\lambda)| = 1$ вытекает $\theta(\lambda) = 0$, то $\gamma_n \to 0$ и, следовательно, при $Ax_0 - y \in X(\theta)$ скорость сходимости невязок для приближений (4) к нулю оценивается неравенством (12), и при $x_1 - x_0 \in X(\theta)$ скорость сходимости поправок для приближений (4) к нулю оценивается неравенством (13).

3. Пусть теперь снова для самосопряженного оператора A выполнены условия теоремы 1, причем $\|\varphi(A)\| = 1$ и, следовательно, $\rho(\varphi(A)) = 1$. Пусть уравнение (1) разрешимо. В этом случае последовательные приближения (4) сходятся к одному из решений x_* уравнения (1). Рассмотрим теперь вместо точных приближений (4) приближения для случая, когда правая часть уравнения (1) задана приближенно или когда при вычислениях этих приближений на каждом шаге делается ошибка. В этих случаях новые приближения $\tilde{x}_n$ записываются в виде

$$\tilde{x}_{n+1} = \varphi(A)\tilde{x}_n + \psi(A)y_\delta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

с приближенной правой частью y_δ, $\|y_\delta - y\| \le \delta$, где δ – некоторое малое положительное число. Очевидно, $\|\psi(A)y_\delta - \psi(A)y\| \le c\delta$ $(c = \max\limits_{\lambda \in SpA} |\psi(\lambda)|)$. Отсюда, аналогично [1] получаем

$$\|\tilde{x}_n - x_*\| \le \|\tilde{x}_n - x_n\| + \|x_n - x_*\|,$$

где x_* – точное решение уравнения (1), x_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ – приближения (4). Так как

$$\tilde{x}_n - x_n = (E + \varphi(A) + \varphi^2(A) + \ldots + \varphi^{n-1}(A))\psi(A)(y_\delta - y),$$

то справедливо неравенство

$$\|\tilde{x}_n - x_*\| \le \|x_n - x_*\| + nc\delta.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Опишем те n, при которых $\|\tilde{x}_n - x_*\| < \varepsilon$. Из теоремы 1 следует $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x_*\| = 0$. Пусть $\lambda \in (0, 1)$. Тогда при некотором $n(\lambda\varepsilon)$ из неравенства $n > n(\lambda\varepsilon)$ следует неравенство $\|x_n - x_*\| < \lambda\varepsilon$. С другой стороны, при $n < \dfrac{(1-\lambda)\varepsilon}{c\delta}$ справедливо неравенство $nc\delta < (1-\lambda)\varepsilon$. В результате, если справедливы неравенства

$$n(\lambda\varepsilon) < n < \frac{(1-\lambda)\varepsilon}{c\delta}, \tag{15}$$

то справедливо и неравенство $\|\tilde{x}_n - x_*\| < \varepsilon$.

Неравенства (15) совместны при условии $\frac{(1-\lambda)\varepsilon}{c\delta} > n(\lambda\varepsilon)+1$ или, что тоже самое, $\delta < \frac{(1-\lambda)\varepsilon}{c(n(\lambda\varepsilon)+1)}$. Правая часть последнего неравенства определяет возможную величину погрешности δ. Естественно выбрать число $\lambda \in (0,1)$ так, чтобы эта правая часть была наибольшей из возможных. Положим

$$\delta(\varepsilon) = \sup_{\lambda \in (0,1)} \frac{(1-\lambda)\varepsilon}{c(n(\lambda\varepsilon)+1)}.$$

Из проведенных рассуждений вытекает при $\delta < \delta(\varepsilon)$, что неравенства (15) совместны и при n, удовлетворяющих этим неравенствам, $\|\tilde{x}_n - x_*\| < \varepsilon$.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть либо правая часть уравнения (1) задана с ошибкой* $\delta > 0$, *либо приближения (4) вычисляются с ошибками, не превышающими* $\delta > 0$. *Тогда приближения (14) сходятся к соответствующему решению* x_* *уравнения (1)* (*т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty,\, n\delta\to 0} \|\tilde{x}_n - x_*\| = 0$).

4. Вернемся к анализу последовательных приближений $x_{n+1} = Bx_n + f$ для линейного операторного уравнения $x = Bx + f$ с действующим в гильбертовом пространстве X самосопряженным оператором B в случае, когда $\|B\| = 1$. В ряде задач при исследовании последовательных приближений достаточно установить их сходимость в норме, более слабой, чем исходная норма гильбертова пространства X. Примером таких норм может служить норма

$$\|x\|_0 = \|Tx\|, \tag{16}$$

где T – некоторый оператор с $\mathrm{Ker}T = 0$. При этом наиболее простым оказывается случай, когда оператор T перестановочен с оператором B ($TB = BT$). Среди таких операторов наиболее простыми являются операторы вида

$$T = \pi(B), \tag{17}$$

где π – некоторая функция положительная на SpB. В этом случае (16) является нормой, так как из $Tx = 0$ очевидным образом следует, что $x = 0$.

Напомним [1], что справедливы равенства

$$x_n = B^n x_0 + (E + B + \ldots + B^{n-1}) f,$$
$$x_* = B^n x_* + (E + B + \ldots + B^{n-1}) f.$$

Откуда

$$x_n - x_* = B^n (x_0 - x_*), \tag{18}$$

здесь x_n – последовательные приближения $x_{n+1} = Bx_n + f$ с $x_0 \in X$, x_* – точное решение уравнения $x = Bx + f$.

Из равенства (18) для нормы (16) (с T, определенным равенством (17)) имеем равенство

$$\|x_n - x_*\|_0 = \left\|\pi(B)B^n(x_0 - x_*) + \alpha B^n P_0 (x_0 - x_*)\right\|,$$

и, далее,

$$\|x_n - x_*\|_0^2 = \int\limits_{SpB} |\pi(\lambda)|^2 |\lambda|^{2n} (dE_\lambda (x_0 - x_*), x_0 - x_*),$$

откуда,

$$\|x_n - x_*\|_0 \le \gamma_n \|x_0 - x_*\|,$$

где $\gamma_n = \max\limits_{\lambda \in SpB} |\pi(\lambda)||\lambda|^n$.

Повторяя рассуждения из [1], приходим к следующему утверждению, дополняющему теорему М. А. Красносельского.

Т е о р е м а 5. *Пусть B – самосопряженный оператор с* $\|B\| = 1$ *в гильбертовом пространстве X, не имеющем* -1 *собственным значением. Пусть* $\pi(1) = \pi(-1) = 0$ *и уравнение* $x = Bx + f$ *разрешимо. Тогда последовательные приближения* $x_{n+1} = Bx_n + f$ *при любом начальном условии* $x_0 \in X$ *сходятся в норме (16) к решению* x_* *уравнения* $x = Bx + f$, *для которого* $P_0 x_* = P_0 x_0$, *где* P_0 – *ортопроектор на множество собственных векторов оператора B, отвечающих собственному значению* 1. *При этом эта сходимость равномерна относительно* $x_0 - x_* \in X$ *на каждом ограниченном шаре.*

Достаточно показать, что $\gamma_n \to 0$. Действительно, если задано $\varepsilon > 0$, то можно выбрать $\delta > 0$ такое, что $|\pi(\lambda)| < \varepsilon$ при $1 - \delta \le |\lambda| \le 1$. Тогда при этих λ верно неравенство $|\pi(\lambda)| < \varepsilon$ и, значит, $|\pi(\lambda)||\lambda|^n < \varepsilon$. При остальных λ верно неравенство $|\lambda| \le 1 - \delta$ и, значит, $|\pi(\lambda)||\lambda|^n \le M(1-\delta)^n$, $M = \max_{\lambda \in SpB} |\pi(\lambda)|$. Поэтому при таких λ из $n > \dfrac{\ln\varepsilon - \ln M}{\ln(1-\delta)}$ вытекает, что также $|\pi(\lambda)||\lambda|^n < \varepsilon$. Таким образом, при больших n для всех $\lambda \in [-1, 1]$ верно неравенство $|\pi(\lambda)||\lambda|^n < \varepsilon$ и, значит, $\gamma_n \to 0$.

Подчеркнем, что в условиях теоремы 5 отсутствует требование об истокообразной представимости точного решения или правой части уравнения (1).

Теорема 5 позволяет сформулировать аналоги теорем 2–4 о сходимости к нулю ошибок, невязок и поправок в нормах $X(\theta)$ при соответствующем выборе функций θ для уравнений первого рода (1).

Литература

1. *Забрейко П. П., Матысик О. В.* // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 5. С. 12–17.
2. *Данфорд Н., Шварц Д.* Линейные операторы. Спектральная теория. М., 1966.
3. *Матысик О. В.* Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач. Брест, 2014.
4. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М., 1986.

P. P. ZABREIKO, O. V. MATYSIK

zabreiko@mail.ru, matysikoleg@mail.ru

KRASNOSELSKI'S THEOREM AND ITERATION PROCEDURES FOR SOLUTION OF ILL-POSED PROBLEMS WITH SELF-ADJOINT OPERATORS

Summary

In this article, the main results on the behavior of various iterations for approximate solution of ill-posed equations with self-adjoint operators in a Hilbert space are presented: sufficient conditions for iteration convergence are obtained, the behavior of residuals and corrections is studied on subspaces of sourcewise representable functions, the convergence of the approximations in the Hilbert space norm weaker than the original one is established.