Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 ноябрь–декабрь Том 58 № 6

УДК 517.982.3:517.986.62

Р. В. ДЫБА

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ ФЕФФЕРМАНА НА СЛУЧАЙ КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

(Представлено членом-корреспондентом Я. В. Радыно)

Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины *Поступило 05.11.2014*

Введение. Ставшая уже классической теорема двойственности Ч. Феффермана [1] устанавливает топологический изоморфизм между пространством функций ограниченной средней осцилляции на группе $\boldsymbol{R}^n$ и сопряженным к пространству Харди H^1 на этой группе. Аналогичный результат (также называемый теоремой двойственности Ч. Феффермана) справедлив и для группы вращений окружности (см., напр., [2, с. 269]). В данной работе приводится обобщение этой теоремы на случай компактной абелевой группы с линейно упорядоченной группой характеров. Рассмотрения основаны на результатах работ [3] и [4].

Обозначения и вспомогательные сведения. Всюду ниже G есть нетривиальная связная компактная абелева группа с нормированной мерой Хаара m и линейно упорядоченной группой характеров X, X_+ – положительный конус в X. Тоже можно выразить, сказав, что в группе X выделена подполугруппа X_+, содержащая единичный характер $\mathbf{1}$ и такая, что $X_+ \cap X_+^{-1} = \{\mathbf{1}\}$ и $X_+ \cup X_+^{-1} = X$. При этом полугруппа X_+ индуцирует в X линейный порядок, согласованный со структурой группы, по правилу $\xi \le \chi$, если $\chi\xi^{-1} \in X_+$. Далее мы положим $X_- = X_+^{-1} \setminus \{\mathbf{1}\}$ $(= X \setminus X_+)$. В приложениях в роли X часто выступают подгруппы аддитивной группы $\boldsymbol{R}^n$, наделенные дискретной топологией, так что G является боровской компактификацией группы X. В частности, в качестве X можно взять группу $\boldsymbol{Z}^n$, наделенную лексикографическим порядком. В этом случае $G = \boldsymbol{T}^n$ – n-мерный тор. Другие примеры см. в [5].

Через $\hat{\varphi}$ мы будем обозначать преобразование Фурье функции φ из $L^1(G)$, т. е.

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_G \varphi\bar{\xi}dm, \ \ \xi \in \mathrm{X}_+.$$

Определение 1. *Пространство Харди $H^p(G)$ $(1 \le p \le \infty)$ над G определяется следующим образом* (см., напр., [6]):

$$H^p(G) = \{f \in L^p(G) : \hat{f}(\chi) = 0 \forall \chi \in X_-\}.$$

При этом X является ортонормированным базисом пространства $L^2(G)$, X_+ – ортонормированным базисом пространства $H^2(G)$. Через P_+ мы будем обозначать ортопроектор из $L^2(G)$ на $H^2(G)$. Положим также

$$H_0^\infty(G) = \{f \in H^\infty(G) : \int_G fdm = 0\}.$$

Далее нам потребуется преобразование Гильберта на группе G. Для случая линейного порядка на X соответствующая теория принадлежит С. Бохнеру и Г. Хелсону (см., напр., [6, глава 8]), более общий подход изложен в [7, глава 6] и [8]. Как показано в этих работах, для любой функции u из $L^2(G, \boldsymbol{R})$ существует единственная функция $\tilde{u}$ из $L^2(G, \boldsymbol{R})$, такая, что $u + i\tilde{u} \in H^2(G)$ и $\tilde{u}(\mathbf{1}) = 0$. Функция $\tilde{u}$ называется *гармонически сопряженной* с u. Линейное отображение, получаемое в результате продолжения отображения $u \mapsto \tilde{u}$ на (комплексное) $L^2(G)$ по линейности, называется *преобразованием Гильберта* на группе G. Этот оператор ограничен в $L^2(G)$.

О п р е д е л е н и е 2 [4]. *Определим пространства BMO*(G) *функций ограниченной средней осцилляции* и *BMOA*(G) *функций ограниченной средней осцилляции аналитического типа на группе G следующим образом*:

$$BMO(G) := \{f + \tilde{g} : f, g \in L^\infty(G)\},$$
$$BMOA(G) := BMO(G) \cap H^1(G),$$
$$\|\varphi\|_{BMO} := \inf\{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty : \varphi = f + \tilde{g}, f, g \in L^\infty(G)\} \ \ (\varphi \in BMO(G)).$$

Норма пространства *BMOA*(G) индуцирована нормой $\|\cdot\|_{BMO}$.

Л е м м а 1 [3, Предложение 3]. *Справедливо равенство векторных пространств* $BMOA(G) = P_+L^\infty(G)$, *причем норма*

$$\|\varphi\|_{*BMOA} := \inf\{\|g_1\|_\infty : \varphi = P_+g_1, g_1 \in L^\infty(G)\}$$

в пространстве BMOA(G) *эквивалентна норме* $\|\cdot\|_{BMO}$.

Следующая теорема является основным утверждением данного сообщения и, как уже отмечалось, представляет собой обобщение теоремы двойственности Ч. Феффермана на случай компактных связных абелевых групп.

Т е о р е м а 1. *Справедливо следующее равенство пространств:*

$$(H^1(G))^* = BMOA(G)$$

(с эквивалентностью норм).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку подпространство $H^1(G)$ замкнуто в $L^1(G)$, то, как известно,

$$(H^1(G))^* = (L^1(G))^* / (H^1(G))^\perp \tag{1}$$

(с равенством норм), где $(H^1(G))^\perp$ – аннулятор подпространства $H^1(G)$. Отождествляя сопряженное пространство $(L^1(G))^*$ с $L^\infty(G)$ посредством полуторалинейной формы $\langle f, g\rangle := \int_G f\,\overline{g}dm$, имеем

$$(H^1(G))^\perp = \{g \in L^\infty(G) : \langle f, g\rangle = 0 \forall f \in H^1(G)\}.$$

Покажем, что $(H^1(G))^\perp = H_0^\infty(G)$. В самом деле, включение $(H^1(G))^\perp \subset H_0^\infty(G)$ следует из того, что $\hat{g}(\chi) = \overline{\langle \chi, g\rangle}$. Если же предположить, что $g \in H_0^\infty(G)$, то $\langle f, g\rangle = 0$ для всех характеров $f \in X_+$, а значит и для всех аналитических полиномов (линейных комбинаций характеров из X_+). Поскольку аналитические полиномы плотны в $H^1(G)$ [5, лемма 1], то последнее равенство верно и для всех f из $H^1(G)$, а потому $g \in (H^1(G))^\perp$.

Итак, равенство (1) может быть записано в виде

$$(H^1(G))^* = L^\infty(G) / H_0^\infty(G)$$

(с равенством норм).

Положим далее $[f] := f + H_0^\infty(G)$ и зададим отображение

$$j : L^\infty(G) / H_0^\infty(G) \to P_+L^\infty(G) : [f] \mapsto P_+\overline{f}.$$

Корректность этого определения легко проверяется. Докажем, что отображение j инъективно. Пусть f и g – такие функции из $L^\infty(G)$, что $[f] \neq [g]$, т. е. $f - g \notin H_0^\infty(G)$. Тогда найдется такой характер $\xi \in X_+^{-1}$, что $\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi) \neq 0$. Используя разложения по базису в $L^2(G)$

$$f = \sum_{\chi \in X} \hat{f}(\chi)\chi, \ \ g = \sum_{\chi \in X} \hat{g}(\chi)\chi,$$

выводим отсюда, что $P_+\overline{f} \neq P_+\overline{g}$, т. е. j инъективно. Сюръективность и линейность этого отображения очевидна. Докажем его изометричность. Для функции $f \in L^\infty(G)$ имеем

$$\|[f]\| = \inf\{\|h\|_\infty : h \in [f]\} \text{ и } \|P_+\overline{f}\|_{*BMOA} := \inf\{\|g\|_\infty : P_+\overline{f} = P_+\overline{g}\}.$$

Поэтому из легко проверяемого равенства

$$[f] = \{g \in L^\infty(G) : P_+\overline{f} = P_+\overline{g}\}$$

вытекает, что $\|[f]\| = \|P_+\overline{f}\|_{*BMOA}$. Таким образом, мы получили (с точностью до изоморфизма) равенство пространств

$$(H^1(G))^* = P_+L^\infty(G)$$

с равенством норм ($P_+L^\infty(G)$ считается наделенным нормой $\|\cdot\|_{*BMOA}$). Равенство пространств $P_+L^\infty(G)$ и $BMOA(G)$ с эквивалентностью норм следует из леммы 1. Теорема доказана.

Благодарю профессора А. Р. Миротина за внимание к данной работе и стимулирующие обсуждения.

Литература

1. *Fefferman C.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77. P. 587–588.
2. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М., 1984.
3. *Дыба Р. В., Миротин А. Р.* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 135–144.
4. *Дыба Р. В., Миротин А. Р.* // XI Белорусская математическая конф.: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 2012. Ч. 1. С. 37–38.
5. *Миротин А. Р.* // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 5. С. 101–116.
6. *Rudin W.* Fourier analysis on groups. New York; London: Intersciense Publishers, 1962.
7. *Миротин А. Р.* Гармонический анализ на абелевых полугруппах. Гомель, 2008.
8. *Mirotin A. R.* // Int. J. Pure Appl. Math. 2009. Vol. 51, N 4. P. 463–474.

R. V. DYBA

rdybabox@yandex.ru

GENERALIZATION OF FEFFERMAN'S DUALITY THEOREM TO THE CASE OF COMPACT ABELIAN GROUPS

Summary

It is proved that the dual of Hardy space $H^1(G)$ over compact and connected Abelian groups G with totally dual is topologically isomorphic to the space $BMOA(G)$ of functions of bounded mean oscillation of analytic type on G.