Доклады Национальной академии наук Беларуси
2014 ноябрь–декабрь Том 58 № 6

УДК 517.544

Т. М. УРБАНОВИЧ

ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА

(Представлено академиком В. И. Корзюком)

Полоцкий государственный университет, Новополоцк
Поступило 08.10.2014

Обозначим $H(E)$ класс всех функций $\varphi(z)$, заданный на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{C}$ и удовлетворяющих условию Гельдера, т. е. оценке

$$\left|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)\right| \le C\left|z_1 - z_2\right|^{\mu}, \ z_1, z_2 \in E,$$

с некоторыми положительными постоянными C и $\mu \le 1$.

Пусть Γ – простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость комплексного переменного на внутреннюю область D^+ и внешнюю D^-; F – конечное множество точек контура Γ; $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ – заданное семейство комплексных чисел.

По определению функция φ принадлежит классу $H_\lambda(\Gamma, F)$, если $\varphi \in H(\Gamma_0)$, где $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \setminus F$, и на каждой дуге Γ_τ с концом τ, не содержащей других точек из F, представима в виде

$$\varphi(t) = \left|t - \tau\right|^{\lambda_\tau} \varphi_1(t),$$

где $\varphi_1(t) \in H(\Gamma_\tau)$.

Будем говорить, что функция $\varphi \in H_\lambda(\Gamma, F)$ обратима, если $\varphi(t) \ne 0$, $t \in \Gamma \setminus F$, и $1/\varphi(t) \in H_{-\lambda}(\Gamma, F)$.

По определению функция $\varphi(z)$ принадлежит классу $H_\lambda(\overline{D}^\pm, F)$, если в каждой замкнутой области $\overline{D}_0 \subseteq \overline{D}^\pm \setminus F$ она принадлежит классу $H(\overline{D}_0)$, а в каждой области $D_\tau^\pm \subseteq D^\pm$, для которой $\overline{D}_\tau^\pm \cap F = \{\tau\}$ представима в виде

$$\Phi(z) = (z - \tau)^{\lambda_\tau} \Phi_1(z),$$

где $\Phi_1(z) \in H(\overline{D}_\tau^\pm)$, причем в определение класса $\Phi \in H_\lambda(\overline{D}^-, F)$ входит условие конечности функции $\Phi(z)$ на бесконечности. А именно, порядок функции Φ на бесконечности не превосходит целого n, если в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки выполняется оценка $\left|\Phi(z)\right| \le C\left|z\right|^n$.

Будем говорить, что функция $\Phi \in H_\lambda(\overline{D}^\pm, F)$ обратима, если $\Phi(z) \ne 0$, $z \in D^\pm$, и $1/\Phi(z) \in H_{-\lambda}(\overline{D}^\pm, F)$.

Постановка задачи. Пусть $\alpha = (\alpha_\tau, \tau \in F)$ – семейство комплексных чисел и задана функция

$$A(z) = \prod_{\tau \in F} (z - \tau)^{\alpha_\tau}, \ z \in \overline{D}^+.$$

Пусть также заданы семейства комплексных чисел $\lambda^+ = (\lambda_\tau^+, \tau \in F)$, $\lambda^- = (\lambda_\tau^-, \tau \in F)$, и выполняется равенство

$$\lambda^+ - \lambda^- = \alpha. \tag{1}$$

Найти аналитическую вне Γ функцию $\Phi(z) \in H_{\lambda^\pm}(\overline{D}^\pm, F)$, исчезающую на бесконечности, по краевому условию

$$\Phi^+(t) - A(t)G_0(t)\Phi^-(t) = g(t), \tag{2}$$

где правая часть $g(t) \in H_{\lambda^+}(\Gamma, F)$, функция $G_0(t) \in H_0(\Gamma, F)$ и обратима, причем

$$\operatorname{Re}(\lambda_\tau^+ - \alpha_\tau) \neq \frac{1}{2\pi}\left[(\arg G_0)(\tau-0) - (\arg G_0)(\tau+0)\right](\operatorname{mod}\mathbb{Z}). \tag{3}$$

Задача (2) в случае целых α_τ рассматривалась многими авторами. Она носит название задачи Римана в исключительном случае. Полное описание решения при $\alpha_\tau \in \mathbb{Z}$ дано, например, в [1, с. 130–137].

В [2, с. 59–64] исследована задача (2) в двух случаях: наличие одного нуля нецелого порядка на контуре или наличие одной полярной особенности нецелого порядка на контуре. Решение получено в классе функций, интегрируемых на контуре (см. также [3]).

В [4] исследована задача (2) при любых $\alpha_\tau \in \mathbb{R}_+$, допуская конечное число нулей и/или полярных особенностей на контуре. Все исследования выполнены в весовых классах Гельдера с вещественным весом $-1 < \lambda < 0$. Найдена явная формула решения и условия разрешимости. Методом сведения к задаче (2) в [4] исследовано характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае.

В данной работе исследована задача (2) при любых $\alpha_\tau \in \mathbb{C}$, допуская конечное число нулей и/или полярных особенностей на контуре. Эта работа является обобщением работы автора [4]. Здесь все исследования выполнены в весовых классах Гельдера с любым комплексным весом λ, имеющим лишь ограничение (3). Найдена явная формула решения и условия разрешимости.

Заметим, что $A(z) \in H_\alpha(\overline{D}^+, F)$ и обратима.

Запишем (2) в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{A(t)} - G_0(t)\Phi^-(t) = f(t), \tag{4}$$

где $f(t) = g(t)/A(t)$, $f(t) \in H_{\lambda^+ - \alpha}(\Gamma, F)$.

Положим

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Phi(z)/A(z), \ z \in D^+, \\ \Phi(z), \ z \in D^-, \end{cases}$$

и задачу (4) сведем к задаче о скачке

$$\Psi^+(t) - G_0(t)\Psi^-(t) = f(t). \tag{5}$$

Заметим, что $\Psi(z) \in H_{\lambda^+ - \alpha}(\overline{D}^+, F)$ и $\Psi(z) \in H_{\lambda^-}(\overline{D}^-, F)$. Согласно (1), $\Psi(z) \in H_{\lambda^+ - \alpha}(\overline{D}^\pm, F)$.

Построим каноническую функцию $X(z)$ задачи (5). Для этого выберем произвольную непрерывную на $\Gamma \setminus F$ ветвь функции $\ln G_0(t)$, которая принадлежит $H_0(\Gamma, F)$, и положим

$$X_0(z) = e^{\Omega(z)},$$

где

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\ln G_0)(t)dt}{t-z}.$$

Для $q \in H(\Gamma, F)$ обозначим $q(\tau \pm 0)$ однозначные предельные значения в точке τ в соответствии с принятой ориентацией контура. В частности, определены значения $(\ln G_0)(\tau \pm 0)$.

Рассмотрим семейство чисел

$$\delta_\tau = \frac{1}{2\pi i}((\ln G_0)(\tau-0) - (\ln G_0)(\tau+0)), \quad \tau \in F.$$

Согласно [5, с. 92], в секторах $\overline{D}_\tau^\pm$ функцию $\Omega(z)$ можно представить в виде

$$\Omega(z) = \delta_\tau \ln(z-\tau) + h_\tau(z),$$

где $h_\tau(z) \in H(D_\tau^\pm)$.

Отсюда следует, что в секторах $D_\tau^\pm$ функцию $X_0(z)$ можно представить в виде

$$X_0(z) = (z-\tau)^{\delta_\tau} X_\tau^\pm(z),$$

где функции $X_\tau^\pm(z)$ принадлежат классам $H(\overline{D}_\tau^\pm)$ и обратимы в них.

Выберем целые числа n_τ по условию

$$-1 < \operatorname{Re}(\lambda_\tau^+ - \alpha_\tau - \delta_\tau) + n_\tau < 0$$

(дополнительным условием на λ^+ является то, что $\operatorname{Re}(\lambda_\tau^+ - \alpha_\tau - \delta_\tau)$ не принадлежат множеству целых чисел).

В терминах целой части числа

$$n_\tau = [\operatorname{Re}(\delta_\tau + \alpha_\tau - \lambda_\tau^+)].$$

Положим

$$X(z) = X_0(z) \prod_{\tau \in F} (z - \tau)^{-n_\tau}. \tag{6}$$

Так как $\lim\limits_{z\to\infty} \Omega(z) = 0$, то $\lim\limits_{z\to\infty} X_0(z) = 1$. Следовательно, с учетом (6),

$$\lim_{z\to\infty} z^{æ} X(z) = 1,$$

где

$$æ = \sum_{\tau \in F} n_\tau.$$

Таким образом, порядок функции $X(z)$ на бесконечности равен $-æ$.

Т е о р е м а. *Пусть $X(z)$ – каноническая функция задачи (2), определяемая равенством (6),*

$$æ = \sum_{\tau \in F} n_\tau, \;\; n_\tau = [\operatorname{Re}(\delta_\tau + \alpha_\tau - \lambda_\tau^+)].$$

Тогда при $æ \ge 0$ общее решение задачи (2), исчезающее на бесконечности, в классе $H_{\lambda^\pm}(\overline{D}^\pm, F)$, с правой частью $g(t) \in H_{\lambda^+}(\Gamma, F)$ дается формулой

$$\Phi(z) = \begin{cases} A(z)\Psi(z), \, z \in D^+, \\ \Psi(z), \, z \in D^-, \end{cases} \tag{7}$$

где функция $\Psi(z)$ имеет вид

$$\Psi(z) = X(z)\left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(t)dt}{A(t)X^+(t)(t-z)} + P(z) \right),$$

степень произвольного многочлена $P(z)$ не выше $æ - 1$ (при $æ = 0$ положим $P(z) = 0$).

При $æ < 0$ решение задачи (2) единственно и дается формулой (7) при выполнении условий ортогональности

$$\int_\Gamma \frac{g(t)}{A(t)X^+(t)} t^j dt = 0, \;\; j = 0, 1, \ldots, -æ - 1.$$

Доказательство теоремы основано на свойствах интеграла типа Коши с весом и на свойствах весовых классов Гельдера. В доказательстве устанавливается принадлежность полученного решения требуемому классу.

Замечание 1. Методом сведения к задаче (2) можно исследовать соответствующее характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае. Полученное решение в свою очередь может быть использовано при исследовании полного сингулярного интегрального уравнения и краевых задач уравнений смешанного типа.

Замечание 2. В данной работе исследована задача (2) со степенной особенностью коэффициента. Однако изложенный подход может быть использован при решении задачи с логарифмической особенностью коэффициента.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф14Каз-034).

Литература

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. *Усманов Н.* Сингулярные граничные задачи сопряжения: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Душанбе, 2004. – 312 с.
3. *Михайлов Л. Г., Усманов Н.* // Докл. АН. 2002. Т. 387, № 3. С. 309–313.
4. *Урбанович Т. М.* // Математические заметки Якутского гос. ун-та. 2012. Т. 19, вып. 2. С. 155–161.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. – 512 с.

T. M. URBANOVICH

UrbanovichTM@gmail.com

SPECIAL CASE OF THE RIEMANN BOUNDARY-VALUE PROBLEM

Summary

The Riemann boundary-value problem (linear conjugation problem) is studied in the case when the coefficient of the problem admits a finite number of zeros and/or polar singularities on the contour. The solvability conditions and the explicit formula of the solution are obtained. All studies are performed in the weighted Hölder classes with complex weight.