

УДК 535.51

Член-корреспондент А. А. АФАНАСЬЕВ, Ю. А. КУРОЧКИН,
академик А. Н. РУБИНОВ

**ПОНДЕРОМОТОРНАЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ
НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ПЛАСТИНКУ**

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск

Поступило 01.12.2014

Введение. Проблема взаимодействия лазерного излучения с диэлектрическими частицами размеров, лежащих в диапазоне от нескольких десятых долей до нескольких десятков длин волн излучения, вызывает в последние десятилетия большой интерес [1–4]. Данная задача особенно актуальна с точки зрения возможных применений лазерного излучения в биологии. При этом во многих задачах такого рода достаточно использовать классическую электромагнитную теорию. Более того, классический подход обладает рядом преимуществ. Он применим там, где неприменима квантовая теория. Например, когда частицы представляют собой среду с потерями.

Ниже будет рассмотрена задача о балансе импульса электромагнитного поля в простейшем случае нормального падения плоской электромагнитной волны на диэлектрическую плоскую пластинку. При этом будут исследованы возникающие здесь силы, действующие на пластинку. Достоинством рассматриваемой задачи является то, что она является точно решаемой. Очевидно, такая задача может быть сведена к одномерной, если падающая волна поляризована линейно. В этом случае она может рассматриваться как задача взаимодействия одномерного диэлектрического объекта конечных размеров со скалярной волной.

Как известно, точно решаемые задачи играют важную роль в физике как эталонные. Они служат основой многих качественных соображений в том случае, когда точный расчет характеристик не может быть реализован.

Поле в пластинке и вне ее. Основные обозначения.

Для расчета баланса импульса электромагнитного поля плоской волны, когда в него помещена плоскопараллельная диэлектрическая пластинка, расположенная так, что ее грани перпендикулярны направлению распространения волны будем использовать результаты решения граничной задачи и обозначения работы [5]. Уравнение грани пластинки, на которую падает волна (\mathbf{qr}) = $z = 0$, параллельной ей грани (\mathbf{qr}) = $z = d$, \mathbf{q} – внутренняя нормаль к первой грани пластинки, \mathbf{r} – радиус-вектор точек на верхней и нижней гранях пластинки соответственно, d – толщина пластинки (рис. 1). Вследствие помещения в трехмерное евклидово пространство пластинки пространство разбивается на три области: I – над пластинкой, II – внутри пластинки и III – под пластинкой. Показатель преломления пластинки (область II) – n , показатель преломления областей I и III – $n_0 = 1$, т. е. пространство вне пластинки представляет собой вакуум.

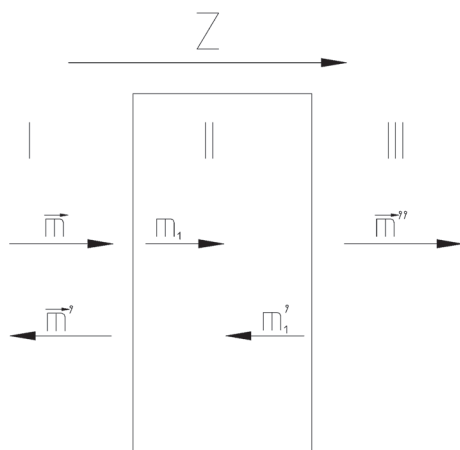


Рис. 1. Геометрия падения, отражения и прохождения плоской волны через плоскопараллельную диэлектрическую пластинку. Векторы рефракции $\vec{m}, \vec{m}', \vec{m}_1, \vec{m}_1', \vec{m}''$ соответствуют падающей, отраженной, прошедшей, прошедшей отраженной и прошедшей через пластинку волнам

Следуя обозначениям, принятым в [5], результирующая волна в области I является суперпозицией

$$\mathbf{E}^{(I)} = C_1 \mathbf{h}_1 \exp(-ik_0 \mathbf{m}' \mathbf{r}) + C_1' \mathbf{h}_1 \exp(-ik_0 \mathbf{m} \mathbf{r}) = C_1 \mathbf{h}_1 \exp(-ik_0 \mathbf{m} \mathbf{r}) + C_1' \mathbf{h}_1 \exp(ik_0 \mathbf{m} \mathbf{r}), \quad (1)$$

где учтено, что $\mathbf{m} = -\mathbf{m}'$.

Согласно уравнениям Максвелла, с учетом гармонической зависимости решений от времени магнитная напряженность поля в полупространстве I определяется выражением

$$\mathbf{H}^{(I)} = \frac{i}{k_0} \text{rot} \mathbf{E}^{(I)} = -\frac{i}{k_0} \mathbf{h}_1 \mathbf{m}^x \left[(C_1 (-ik_0) \exp(-k_0 \mathbf{m} \mathbf{r}) + C_1' (ik_0) \exp(ik_0 \mathbf{m} \mathbf{r})) \right] = [\mathbf{m} \mathbf{h}_1] (C_1 \exp(-ik_0 \mathbf{m} \mathbf{r}) - C_1' \exp(ik_0 \mathbf{m} \mathbf{r})). \quad (2)$$

Здесь учтено, что оператор \mathbf{m}^x определяется как $\mathbf{m}^x \mathbf{h}_1 = [\mathbf{m} \mathbf{h}_1]$, а квадратные скобки обозначают векторное произведение векторов \mathbf{m} и \mathbf{h} . Нам понадобится также выражение для комплексно сопряженного вектора магнитной напряженности, который очевидно равен

$$\mathbf{H}^{(I)*} = [\mathbf{m} \mathbf{h}_1] (C_1^* \exp(ik_0 \mathbf{m} \mathbf{r}) - C_1'^* \exp(-ik_0 \mathbf{m} \mathbf{r})), \quad (3)$$

Электрическая и магнитная напряженности в пластинке определяются следующим образом:

$$\mathbf{E}^{(II)} = A_1 \mathbf{h}_1 \exp(-ik_0 \mathbf{m} \mathbf{r}) + A_1' \mathbf{h}_1 \exp(-ik_0 \mathbf{m}' \mathbf{r}) = A_1 \mathbf{h}_1 \exp(-ik_0 \mathbf{m}_1 \mathbf{r}) + A_1' \mathbf{h}_1 \exp(ik_0 \mathbf{m}_1 \mathbf{r}), \quad (4)$$

$$\mathbf{H}^{(II)} = [\mathbf{m} \mathbf{h}_1] (A_1 \mathbf{h}_1 \exp(-ik_0 \mathbf{m}_1 \mathbf{r}) - A_1' \mathbf{h}_1 \exp(ik_0 \mathbf{m}_1 \mathbf{r})), \quad (5)$$

при этом

$$\mathbf{H}^{(II)*} = [\mathbf{m} \mathbf{h}_1] (A_1^* \mathbf{h}_1 \exp(ik_0 \mathbf{m}_1 \mathbf{r}) - A_1'^* \mathbf{h}_1 \exp(-ik_0 \mathbf{m}_1 \mathbf{r})). \quad (6)$$

Волна, вышедшая из пластинки, имеет следующие выражения для электрической и магнитной напряженностей:

$$\mathbf{E}^{(III)} = C_1'' \mathbf{h}_1 \exp(-ik_0 \mathbf{m}'' \mathbf{r}) = C_1'' \mathbf{h}_1 \exp(-ik_0 \mathbf{m} \mathbf{r}), \quad (7)$$

$$\mathbf{H}^{(III)} = C_1'' [\mathbf{m} \mathbf{h}_1] \exp(-ik_0 \mathbf{m} \mathbf{r}). \quad (8)$$

В формулах (1)–(5) \mathbf{m} , \mathbf{m}' , \mathbf{m}_1 , \mathbf{m}_1' , \mathbf{m}'' – векторы рефракции падающей, отраженной, прошедшей в пластинку, отраженной от нижней грани пластинки и прошедшей волн соответственно.

Зависимость всех волн от времени гармоническая, т. е. определяется множителем $\exp(i\omega t)$, $k_0 = \frac{\omega}{c}$, где c – скорость света. Для векторов рефракции в данной задаче выполняются следующие определения и соотношения $\mathbf{m} = -\mathbf{m}' = n_0 \mathbf{q}$, $\mathbf{m}_1 = -\mathbf{m}_1' = n \mathbf{q}$, $\mathbf{m}'' = n_0 \mathbf{q}$. Амплитуды C' , C_1'' , A_1 , A_1' в формулах (1)–(8) следующим образом выражаются через амплитуду падающей волны [4]:

$$A_1 = \frac{1}{2} [(1+n)C_1 + (1-n)C_1'],$$

$$A_1' = \frac{1}{2} [(1-n)C_1 + (1+n)C_1'],$$

$$C_1' = \frac{[(1-n^2) \exp(-i\delta) + (1-n^2) \exp(i\delta)] C_1}{(1+n)^2 \exp(i\delta) + (1-n)^2 \exp(-i\delta)},$$

$$C_1'' = \frac{4nC_1}{(1+n)^2 \exp(i\delta) + (1-n)^2 \exp(-i\delta)},$$

где $\delta = k_0 n d$. Области I и III являются вакуумом и, следовательно, их показатель преломления равен единице.

Выражение для плотности импульса поля в трех областях (I – над пластинкой, II – в пластинке, III – за пластинкой). Определим усредненное за период колебаний волны выражение вектора Умова–Пойнтинга – плотности импульса поля согласно формуле

$$\mathbf{U} = -\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*].$$

Тогда в области I с учетом того, что

$$\operatorname{Re}[\mathbf{E}^{(I)}\mathbf{H}^{(I)*}] = \mathbf{m}(C_1 C_1^* - C_1' C_1'^*) = \mathbf{m}(|C_1|^2 - |C_1'|^2),$$

для плотности импульса поля в единицу времени получим

$$\mathbf{U}^{(I)} = \mathbf{m} \frac{c}{8\pi} (|C_1|^2 - |C_1'|^2). \quad (9)$$

В пластинке (область II)

$$\operatorname{Re}[\mathbf{E}^{(II)}\mathbf{H}^{(II)*}] = \mathbf{m}(|A_1|^2 - |A_1'|^2) = 2n^2 \mathbf{q} (|C_1|^2 - |C_1'|^2),$$

$$\mathbf{U}^{(II)} = 2n^2 \mathbf{q} \frac{c}{8\pi} (|C_1|^2 - |C_1'|^2). \quad (10)$$

В области вышедшей волны (область III)

$$\mathbf{U}^{(III)} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[\mathbf{E}^{(III)}\mathbf{H}^{(III)*}] = \mathbf{m} \frac{c}{8\pi} |C_2''|^2 = \mathbf{q} \frac{c}{8\pi} |C_2''|^2.$$

Выраженные через амплитуду C_1 исходной падающей волны векторы $U^{(I)}$ и $U^{(III)}$, определенные формулами (9), (10), совпадают и примут вид

$$\mathbf{U}^{(I)} = \mathbf{q} \frac{c}{8\pi} (|C_1|^2 - |C_1'|^2) = \mathbf{q} \frac{c}{8\pi} \frac{16n^2 |C_1|^2}{16n^2 + 4(n+1)^2 (n-1)^2 \sin^2 2\delta}.$$

Для $U^{(II)}$ справедливо выражение аналогичное выражению $U^{(I)}$ (9), отличающееся от последнего только множителем n^2 .

Нормировка решений. Импульс поля в пластинке и вне ее. Нормировку решений осуществим так, чтобы в результате энергия и импульс исходной плоской волны имели конечное значение. Заключим исходную падающую плоскую волну в прямоугольный параллелепипед объема $V = SL$, где S – площадь основания этого параллелепипеда, параллельного сторонам пластинки (L – длина параллелепипеда в направлении распространения волны, рис. 2). Сделаем замену

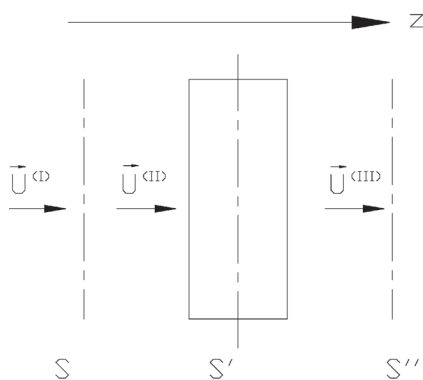


Рис. 2. Поток вектора Умова–Пойнтинга в направлении, нормальном к грани пластинки

$$C_1 \rightarrow \frac{C_1}{\sqrt{V}} = \frac{C_1}{\sqrt{SL}}.$$

Тогда импульс плоской волны во всем пространстве

$$\int d^3 r \mathbf{m} \frac{C_1 C_1^*}{SL} = \mathbf{m} |C_1|^2.$$

Импульс поля в области I:

$$\mathbf{P}^{(I)} = \int \mathbf{U}^{(I)} d^3 r = \mathbf{q} \frac{c}{8\pi} \frac{16n^2 |C_1|^2}{[16n^2 + 4(n+1)^2 (n-1)^2 \sin^2 2\delta] 2L} = \frac{c\mathbf{q}}{16\pi L} \frac{16n^2 |C_1|^2}{[16n^2 + 4(n+1)^2 (n-1)^2 \sin^2 2\delta]}. \quad (11)$$

Импульс поля в пластинке (область II):

$$\mathbf{P}^{(II)} = \mathbf{q} \frac{cn^2 d}{L8\pi} \frac{16n^2 |C_1|^2}{[16n^2 + 4(n+1)^2(n-1)^2 \sin^2 2\delta]}. \quad (12)$$

Импульс поля в области III:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(III)} &= \mathbf{q} \frac{c}{8\pi} \frac{L/2-d}{L} \frac{16n^2 |C_1|^2}{[16n^2 + 4(n+1)^2(n-1)^2 \sin^2 2\delta]} = \\ &= \mathbf{q} \frac{c}{8\pi} \frac{L/2-d}{L} \frac{16n^2 |C_1|^2}{[16n^2 + 4(n+1)^2(n-1)^2 \sin^2 2\delta]}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из выражений (11)–(13) видно, что импульс поля в области (II, III) с пластинкой на величину

$$\Delta \mathbf{P} = \frac{c\mathbf{q}(n^2-1)d}{8L\pi} \frac{16n^2 |C_1|^2}{[16n^2 + 4(n+1)^2(n-1)^2 \sin^2 2\delta]}, \quad (14)$$

(где $n > 1$) больше импульса в полупространстве I падающей волны. Таким образом, только приписав пластинке импульс, равный $\Delta \mathbf{P}$ с противоположным знаком, можно добиться выполнения закона сохранения импульса системы поле–пластинка. Используя дифференциальное уравнение, выражающее закон сохранения энергии–импульса – теорему Умова–Пойнтинга, можно установить связь передачи импульса (14) с силой, действующей на пластинку. Действительно,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} = \text{div}(\mathbf{U} / c), \quad (15)$$

где w – плотность энергии поля. Перейдем к интегральным выражениям. Проинтегрируем выражение (15) по объему, тогда левая его часть равна

$$\int \frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} d^3 r = \frac{d}{dt} \int (w / c) d^3 r = \frac{d}{dt} (W / c), \quad (16)$$

где W – полная энергия поля, а W / c – модуль импульса поля в вакууме.

Проинтегрируем правую часть уравнения (15) и воспользуемся теоремой Гаусса, тогда

$$\int d^3 r \text{div}(\mathbf{U} / c) = \frac{1}{c} \int U_q d\sigma = \frac{S}{c} (U^{(I)} - U^{(II)}). \quad (17)$$

При расчете интеграла (17) учтено, что поток через боковые грани параллелепипеда (рис. 2) равен нулю. Из сравнения выражений (16), (17) видно, что поток вектора Умова–Пойнтинга, разделенный на скорость электромагнитной волны U_q / c через поверхность, охватывающую поле, равен силе, определяемой выражением (17) (см. также [6])

$$|F| = - \int U_q / cd \sigma = \frac{(\mathbf{q} \Delta \mathbf{P})}{cd},$$

где $d\sigma$ – элемент площади плоскости (x, y) , перпендикулярной направлению импульса, или с учетом вышесказанного

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{q}(n^2-1)}{8\pi} \frac{16n^2 |C_1|^2}{L[16n^2 + 4(n+1)^2(n-1)^2 \sin^2 2\delta]}. \quad (18)$$

Выражение (18) определяет общую силу, действующую со стороны поля на пластинку. Определим предельные выражения силы (18). Прежде всего, когда $\delta = l\pi$, где l – целое число (толщина пластинки кратна половине длины волны) сила будет максимальна и равна

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{q}(n^2 - 1)|C_1|^2}{8\pi L}. \quad (19)$$

Для случая, когда показатель преломления пластинки незначительно отличается от единицы и может быть представлен как $n = 1 + \Delta n$, где $\Delta n \ll 1$, ограничиваясь первыми степенями по Δn , получим

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{q}\Delta n|C_1|^2}{4\pi L}.$$

Таким образом, при показателях преломления пластинки мало отличных от единицы, сила, действующая на пластинку со стороны нормально падающей плоской волны, не зависит от толщины пластинки, а только от разницы показателей преломления пластинки и среды, в которой она находится и от интенсивности падающей волны.

Теперь рассмотрим случай, когда показатель преломления пластинки много больше единицы (или показателя преломления окружающей пластинку среды). В этом случае следует различать две возможности. Когда $\delta = n\pi$, выражение для силы совпадет с выражением (19), в котором можно пренебречь единицей по сравнению с квадратом показателя преломления пластинки, т. е. в этом случае сила, действующая на пластинку со стороны нормально падающей плоской волны, прямо пропорциональна квадрату показателя преломления пластинки и интенсивности падающей волны.

При толщине пластинки, не кратной половине длины волны падающего на нее излучения ($\delta \neq n\pi$, пренебрегая всюду единицей по сравнению с n^2), получим

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{q}n^2}{8\pi} \frac{4|C_1|^2}{L[4 + n^2 \sin 2\delta]} = \frac{\mathbf{q}|C_1|^2}{2\pi L \sin 2\delta}.$$

Заключение. В заключение сделаем несколько замечаний:

1. Суммарная сила, действующая со стороны электромагнитного поля плоской волны на диэлектрическую пластинку в него помещенную, определяется изменением усредненного за период потока вектора Умова–Пойнтинга через плоскость, параллельную плоскости, ограничивающей пластинку и находящейся в вакууме, и плоскость, ей параллельную, находящуюся внутри пластинки.

2. Метод, основанный на определении силы через изменение импульса электромагнитного поля, универсален и применим для тел, состоящих из поглощающей среды.

Авторы благодарят В. М. Редькова за полезные замечания.

Литература

1. Афанасьев А. А., Рубинов А. Н., Курочкин Ю. А. и др. // Квантовая электроника. 2003. Т. 33, № 3. С. 250.
2. Gordon J. P. // Phys. Rev A. 1973. Vol. 8, N 5. P. 14.
3. Rohrbach A., Steizer E. K. // JOSA A. 2001. Vol. 18, N 4.
4. Сайфер В. А., Котляр В. В., Ханина С. Н. // ЭЧАЯ. 2004. Т. 35, вып. 6. С. 1368–1431.
5. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Минск: Наука и техника, 1978. – 456 с.
6. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989. – 504 с.

A. A. AFANAS'EV, Yu. A. KUROCHKIN, A. A. RUBINOV

y.kurochkin@dragon.bas-net.by

PONDEROMOTIV FORCE ACTING ON THE DIELECTRIC PLATE

Summary

In the present article, the momentum transfer from the field of a plane electromagnetic wave to the plate, which is normal incident on the parallel dielectric plate, and the total force caused by this momentum transfer are calculated.