Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 ноябрь–декабрь Том 58 № 6

УДК 530.12

Е. А. ТОЛКАЧЕВ

ДВОЙНАЯ ДУАЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ БОРНА–ИНФЕЛЬДА И НЕЛИНЕЙНЫЙ ЛАГРАНЖИАН КЭД

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск *Поступило 24.11.2014*

Введение. Как известно, уравнения нелинейной электродинамики Борна–Инфельда (Б–И) [1] инвариантны относительно дуальных преобразований из группы $U(1) \sim SO(2)$, смешивающих напряженности и эффективные индукции электрических и магнитных полей. В [2] без обращения к лагранжеву формализму было показано, что не существует других однопараметрических дуально и лоренц-ковариантных обобщений свободных уравнений Максвелла в предположении дуальной инвариантности параметра, обезразмеривающего поля. По-видимому, ученики Гейзенберга – Эйлер и Кокель были первыми, кто заметил, что лагранжиан Б–И при малых значениях свободного параметра качественно воспроизводит структуру эффективного лагранжиана, описывающего рассеяние света на свете в рамках полуфеноменологической квантовой электродинамики (КЭД). Историю этого вопроса и соответствующие ссылки можно найти в [3]. С. И. Кругловым было показано [4], что точное воспроизведение нелинейного лагранжиана в пределе слабых внешних полей достигается в рамках двухпараметрического обобщения теории Б–И, которое, однако, дуально неинвариантно. В то же время вакуумные корреляционные функции КЭД в пространстве Минковского, как и соответствующий тензор энергии-импульса, дуально инвариантны (см., напр., [5]), что коррелирует с ранним доказательством дуальной инвариантности КЭД [6]. Кроме того, еще в прошлом веке было продемонстрировано, что упомянутый выше эффективный КЭД-лагранжиан легко переписывается в явно дуально инвариантном виде [7].

В настоящей работе будет показано, что произвольные нелинейные лоренц-ковариантные обобщения электродинамики Максвелла дуально инвариантны в каноническом смысле [8], когда наряду с полями преобразуются параметры моделей, в КЭД – они пропорциональны заряду электрона. Будут найдены в явном виде трансформационные свойства лагранжианов типа Б–И относительно двух видов дуальных преобразований.

Теоретическая часть. При описании дуальной симметрии удобно использовать алгебру комплексных кватернионов – бикватернионов [9] с законом умножения в векторной форме

$$qp = q_0 p_0 - (\underline{q}\ \underline{p}) + q_0 \underline{p} + p_0 \underline{q} + [\underline{q}\ \underline{p}], \tag{1}$$

где q и p – бикватернионы, любой из которых представим в виде

$$q = q_0 + \underline{q} = q_S + q_V,$$

$(\underline{q}\ \underline{p}) = \delta_{ab} q_a p_b$, $[\underline{q}\ \underline{p}]$ – векторный бикватернион с компонентами $\varepsilon_{abc} q_b p_c$, $a, b, c = 1, 2, 3$. Для бикватернионов определены операции комплексного $q^* = q_0^* - \underline{q}^*$ и кватернионного сопряжений $\overline{q} = q_0 - \underline{q}$, используя которые всегда можно выделить реальные и мнимые, скалярные и векторные части произвольного бикватерниона. Первое из сопряжений – автоморфизм, второе – антиавтоморфизм алгебры бикватернионов $\overline{pq} = \overline{q}\ \overline{p}$.

Уравнения Максвелла в бикватернионах записываются в виде

$$\nabla \underline{F}(A) = Q_n J^n = \mathrm{sign}(Q_n) |Q_n| J^n, \tag{2}$$

где умножение осуществляется согласно (1), по повторяющимся индексам $n = 1, 2, ...$ проводится суммирование; $\nabla = -i\frac{\partial}{\partial t} + \underline{\nabla}$ – дифференциальный оператор; $\underline{F} = \underline{B} - i\underline{E} = -(\overline{\nabla}A)_V$ – векторный бикватернион напряженностей, выраженных через потенциал $A = -\overline{A}^* = iA_0 + \underline{A}$; Q_n – действительные электрические заряды; $\mathrm{sign}Q_n = e^{i0}(Q_n > 0)$; $e^{i\pi}(Q_n < 0)$, $J^n = -\overline{J}^{n*}$ – плотность тока.

Дуальные преобразования уравнений электродинамики Максвелла можно рассматривать как обобщение стандартной операции классической C-инверсии – умножения левой и правой части (2) на $e^{i\pi}$, осуществляемое путем замены $e^{i\pi} \to e^{i\vartheta}$. Это коррелирует с известной необходимостью переопределения операций отражений пространственных координат – $P \to e^{i\vartheta}Pe^{-i\vartheta}$ и времени – $T \to e^{i\vartheta}Te^{-i\vartheta}$ при описании уравнений Максвелла–Лоренца в терминах двух зарядов [8; 9]. Отметим, что в этом контексте принцип дуальной инвариантности наблюдаемых [8] выглядит как обобщение C-симметрии уравнений электродинамики.

Дуальные преобразования трактуются как замена действительных электрических зарядов комплексными – $Q_n \to Q_n e^{i\vartheta} \equiv \mathsf{q}_n = \mathsf{e}_n + i\mathsf{g}_n$, сопровождаемая соответствующим переопределением полей и потенциалов $\underline{F}e^{i\vartheta}$, $Ae^{i\vartheta} = \mathrm{A} + i\mathrm{B}$, $-\overline{\mathrm{A}}^* = \mathrm{A}$, $-\overline{\mathrm{B}}^* = \mathrm{B}$, не затрагивающим их координатной зависимости. Дуально инвариантный лагранжиан в терминах двух зарядов и потенциалов удается построить только в случае постоянства отношения $\mathsf{g}_n / \mathsf{e}_n \equiv \mathsf{g}_0 / \mathsf{e}_0$, т. е. при $\mathsf{e}_n\mathsf{g}_m - \mathsf{e}_n\mathsf{g}_m = 0$, где фундаментальный электрический заряд $Q_0(\mathrm{sign}Q_0 > 0) \to \mathsf{q}_0 = \mathsf{e}_0 + i\mathsf{g}_0$ [8; 9]. При этом основной идеей [10] является представление лагранжиана в терминах дуально инвариантных полей и потенциалов

$$\mathbb{L} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{8\pi}\underline{\mathbb{F}}^2 + \mathrm{sign}Q_n|\mathsf{q}_n|(J^n\overline{\mathbb{A}})_S\right], \tag{3}$$

где

$$\underline{\mathbb{F}} = \underline{\mathbb{B}} - i\underline{\mathbb{E}} \equiv \frac{\mathsf{q}_0^*}{|\mathsf{q}_0|}\underline{F}, \quad \mathbb{A} \equiv \frac{\mathsf{q}_0^*}{|\mathsf{q}_0|}(\mathrm{A} + i\mathrm{B}), \quad \underline{\mathbb{F}} = -(\nabla\overline{\mathbb{A}})_V,$$

и выполняется условие $\mathbb{A} = -\overline{\mathbb{A}}^*$, что эквивалентно $\mathsf{g}_0\mathrm{A} - \mathsf{e}_0\mathrm{B} = 0$ [9]. Дуальную инвариантность начальной фазы зарядов – $\mathrm{sign}Q_n$ демонстрирует следующая цепочка рассуждений

$$Q_n = \mathrm{sign}Q_n|Q_n| = Q_n^* = |Q_n|\frac{Q_n^*}{|Q_n|} \to \left[\frac{\mathsf{q}_n^*}{|\mathsf{q}_n|}\frac{\mathsf{q}_0}{|\mathsf{q}_0|} = \text{dual inv} = \mathrm{sign}Q_n\right]|\mathsf{q}_n|\frac{\mathsf{q}_0^*}{|\mathsf{q}_0|}.$$

В традиционных обозначениях лагранжиан (3) имеет вид

$$\mathsf{L} = \frac{1}{8\pi}\{(\underline{E}^2 - \underline{B}^2)\cos 2\vartheta_0 + 2(\underline{B}\underline{E})\sin 2\vartheta_0 + \mathrm{sign}Q_n\sqrt{\mathsf{e}_n^2 + \mathsf{g}_n^2}J_\mu^n(\mathrm{A}_\mu\cos\vartheta_0 + \mathrm{B}_\mu\sin\vartheta_0), \tag{4}$$

где $\cos\vartheta_0 = \frac{\mathsf{e}_0}{\sqrt{\mathsf{e}_0^2 + \mathsf{g}_0^2}}$, $\sin\vartheta_0 = \frac{\mathsf{g}_0}{\sqrt{\mathsf{e}_0^2 + \mathsf{g}_0^2}}$, $\frac{\mathsf{e}_0^2 - \mathsf{g}_0^2}{\mathsf{e}_0^2 + \mathsf{g}_0^2} = \cos 2\vartheta_0$, $\frac{2\mathsf{e}_0\mathsf{g}_0}{\mathsf{e}_0^2 + \mathsf{g}_0^2} = \sin 2\vartheta_0$, а средний член, пропорциональный $F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$, не является дивергенцией, поскольку полевой тензор выражается через два потенциала $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathrm{A}_\nu - \partial_\nu\mathrm{A}_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho\mathrm{B}_\sigma$. Для дальнейшего существенно, что даже в линейном случае полевая часть дуально инвариантного лагранжиана зависит от компенсирующего параметра.

Покажем теперь, что совершенно аналогичным образом строится дуально инвариантное выражение для лагранжиана электродинамики типа Б–И [4], который запишем в форме [11], удобной для сравнения с (3), (4) и нелинейным лагранжианом однозарядовой КЭД во внешнем поле [12]

$$\mathsf{L}_{B-IK} = \frac{E_c^2}{4\pi\lambda_1^2}\left[1 - \sqrt{1 - \lambda_1^2\frac{\underline{E}^2 - \underline{B}^2}{E_c^2} - \lambda_1^2\lambda_2^2\frac{(\underline{B}\underline{E})^2}{E_c^4}}\right], \tag{5}$$

где $E_c = B_c = \frac{m^2c^3}{e_0\hbar}$ – критические величины электрического и магнитного полей; $\lambda_{1,2}$ – действительные безразмерные параметры [4]. Предположим теперь, что все величины в (5) – дуальные инварианты. Очевидно, это влечет за собой комплексификацию свободных параметров. По аналогии с линейным случаем можно произвести замену $e_0 \to |\mathsf{q}_0| e^{i\vartheta_0}$ в выражении для критических полей, тогда имеем

$$\mathrm{L}_{B-IK} = \frac{\mathbb{E}_c^2}{4\pi\lambda_1^2}\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda_1^2}{\mathbb{E}_c^2}\mathrm{Re}(\underline{\mathbb{F}})^2 - \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{4\mathbb{E}_c^4}[\mathrm{Im}(\underline{\mathbb{F}})^2]^2}\right\} =$$
$$\frac{\mathbb{E}_c^2}{4\pi\lambda_1^2}\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda_1^2}{\mathbb{E}_c^2}\mathrm{Re}(e^{-i\vartheta_0}\underline{F})^2 - \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{4\mathbb{E}_c^4}[\mathrm{Im}(e^{-i\vartheta_0}\underline{F})^2]^2}\right\}, \tag{6}$$

где $\mathbb{B}_c = \mathbb{E}_c = \dfrac{m^2c^3}{\hbar|\mathsf{q}_0|}$. Дуально инвариантный лагранжиан (6) в векторных обозначениях приобретает вид

$$\mathrm{L}_{B-IK} = \frac{\mathbb{E}_c^2}{4\pi\lambda_1^2}\{1 - \{1 - \frac{\lambda_1^2}{\mathbb{E}_c^2}[(\underline{E}^2 - \underline{B}^2)\cos 2\vartheta_0 + 2(\underline{B}\underline{E})\sin 2\vartheta_0] -$$
$$\frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{2\mathbb{E}_c^4}[2(\underline{B}\underline{E})\cos 2\vartheta_0 - (\underline{E}^2 - \underline{B}^2)\sin 2\vartheta_0]^2\}^{\frac{1}{2}}\}. \tag{7}$$

Очевидно, что разложение в (6), (7) ряд по малому параметру $\dfrac{\lambda_1^2}{\mathbb{E}_c^2}$ воспроизводит полевую часть лагранжианов (3), (4) и при соответствующем выборе [4] констант $\lambda_{1,2}$ – нелинейную часть лагранжиана КЭД в случае слабых внешних полей ($E/\mathbb{E}_c << 1$, $B/\mathbb{B}_c << 1$) [11; 12]

$$\mathrm{L}_{H-E} = \mathrm{L}_0 + \mathrm{L}_1 + \ldots = \frac{1}{8\pi}(\underline{\mathbb{E}}^2 - \underline{\mathbb{B}}^2) + \frac{1}{360\pi^2\mathbb{E}_c^2}[(\underline{\mathbb{E}}^2 - \underline{\mathbb{B}}^2)^2 + 7(\underline{\mathbb{B}}\underline{\mathbb{E}})^2] + \ldots \tag{8}$$

При заменах дуально инвариантных напряженностей

$$\underline{\mathbb{E}}^2 - \underline{\mathbb{B}}^2 \to (\underline{E}^2 - \underline{B}^2)\cos 2\vartheta_0 + 2(\underline{B}\underline{E})\sin 2\vartheta_0, \quad (\underline{\mathbb{B}}\underline{\mathbb{E}}) \to (\underline{B}\underline{E})\cos 2\vartheta_0 - \frac{1}{2}(\underline{E}^2 - \underline{B}^2)\sin 2\vartheta_0, \tag{9}$$

где угол ϑ_0 определен выше, второй член в (8) совпадает с выражением, впервые полученным в [7].

Второй вариант комплексификации параметров в (5) – $\lambda_{1,2} \to |\lambda_{1,2}| e^{-i\vartheta_0}$ приводит к появлению в (6), (7) соответствующих модулей, при сохранении определений критических полей. Так, строится дуально инвариантное обобщение исходного лагранжиана Б–И

$$\mathrm{L}_{B-I} = \frac{1}{|\chi|^2}\left[1 - \sqrt{1 - |\chi|^2(\underline{\mathbb{E}}^2 - \underline{\mathbb{B}}^2) - |\chi|^4(\underline{\mathbb{B}}\underline{\mathbb{E}})^2}\right] =$$
$$\frac{1}{|\chi|^2}\left[1 - \sqrt{1 - |\chi|^2\mathrm{Re}[(e^{-i\vartheta_\chi}\underline{F})^2] - |\chi|^4[\mathrm{Im}(e^{-i\vartheta_\chi}\underline{F})^2]^2}\right], \tag{10}$$

где $\underline{F}$ при желании можно трактовать и как бикватернион, и как комплексный вектор Римана–Зильберштейна $\vec{B} - i\vec{E}$. При дуальных преобразованиях $\vartheta_\chi \to \vartheta_\chi + \vartheta$. Из первой строки (10) следует, что полевые уравнения и уравнения связи, выраженные в дуально инвариантных полях, будут иметь стандартный алгебраический вид [2]

$$\nabla[(\underline{\mathbb{B}} - i\underline{\mathbb{E}}) + (\underline{\mathbb{H}} - i\underline{\mathbb{D}})] + \overline{\{\nabla[(\underline{\mathbb{B}} - i\underline{\mathbb{E}}) - (\underline{\mathbb{H}} - i\underline{\mathbb{D}})]\}^*} = 0,$$
$$\underline{\mathbb{H}} - i\underline{\mathbb{D}} = \frac{1 - i|\chi|^2(\underline{\mathbb{B}}\underline{\mathbb{E}})}{\sqrt{1 + |\chi|^2(\underline{\mathbb{B}}^2 - \underline{\mathbb{E}}^2) - |\chi|^4(\underline{B}\underline{\mathbb{E}})^2}}(\underline{\mathbb{B}} - i\underline{\mathbb{E}}). \tag{11}$$

Полагая, что $\underline{\mathbb{H}} - i\underline{\mathbb{D}} = (\underline{H} - i\underline{D})e^{-i\vartheta_\chi}$, и используя (9) при $\vartheta_0 \to \vartheta_\chi$, имеем

$$\underline{H}-i\underline{D}=\frac{\{1-i|\chi|^2[(\underline{B}\underline{E})\cos 2\vartheta_\chi-\frac{1}{2}(\underline{E}^2-\underline{B}^2)\sin 2\vartheta_\chi]\}(\underline{B}-i\underline{E})}{\sqrt{1+|\chi|^2[(\underline{E}^2-\underline{B}^2)\cos 2\vartheta_\chi+2(\underline{B}\underline{E})\sin 2\vartheta_\chi]-|\chi|^4[(\underline{B}\underline{E})\cos 2\vartheta_\chi-\frac{1}{2}(\underline{E}^2-\underline{B}^2)\sin 2\vartheta_\chi]^2}}.$$

Этот прием применим ко всем лоренц-ковариантным нелинейным обобщениям электродинамики, лагранжианы которых строятся из лоренц-инвариантов $(\underline{E}^2-\underline{B}^2)$, $(\underline{B}\underline{E})$ и параметров, обеспечивающих необходимую размерность. Например, недавно автором [13] был переоткрыт логарифмический лагранжиан, судя по утверждению в [11], введенный еще Шредингером, $\mathsf{L}=\beta^2\ln[1+\beta^{-2}(\underline{E}^2-\underline{B}^2)]$, и предложен экспоненциальный лагранжиан $\mathsf{L}=\beta^2\exp[\beta^{-2}(\underline{E}^2-\underline{B}^2)-1]$. Очевидно, что они являются частными случаями дуально инвариантных лагранжианов, соответственно, $\mathbb{L}=|\beta|^2\ln[1+|\beta|^{-2}(\underline{\mathbb{E}}^2-\underline{\mathbb{B}}^2)]$ и $\mathbb{L}=|\beta|^2\exp[|\beta|^{-2}(\underline{\mathbb{E}}^2-\underline{\mathbb{B}}^2)-1]$.

Рассмотренные выше дуальные преобразования смешивают напряженности полей, а не напряженности с индукциями, как это происходит в случае общеизвестных дуальных преобразований уравнений Б–И, не затрагивающих свободного параметра модели. Несмотря на огромное количество работ по исследованию этой дуальности, все еще остаются неизвестными трансформационные свойства лагранжиана Б–И при конечных дуальных преобразованиях этого типа. Эта задача фактически была решена в [2], где удалось показать обратимость дуально инвариантной формы уравнений Б–И. Однако в явном виде преобразования лагранжиана не были приведены. Сделаем это сейчас.

Итак, рассмотрим теперь дуальные преобразования вида

$$(\underline{B}-i\underline{D})\to(\underline{B}-i\underline{D})\exp(i\theta),\quad (\underline{H}-i\underline{E})\to(\underline{H}-i\underline{E})\exp(i\theta). \tag{12}$$

Напомним, что дуальные преобразования, затрагивающие параметры, определялись над парами векторных бикватернионов $(\underline{B}-i\underline{E})$ и $(\underline{H}-i\underline{D})$, имеющих определенные свойства относительно действия группы Лоренца, задаваемого с помощью бикватернионов единичной нормы $L\overline{L}=1$

$$(\underline{B}-i\underline{E})\to L^*(\underline{B}-i\underline{E})\overline{L}^*,\ (\underline{H}-i\underline{D})\to L^*(\underline{H}-i\underline{D})\overline{L}^*.$$

Именно в терминах этих бикватернионов первое из уравнений (11) превращается в систему

$$\nabla(\underline{B}-i\underline{E})+\overline{\{\nabla(\underline{B}-i\underline{E})\}}^*=0,$$
$$\nabla(\underline{H}-i\underline{D})-\overline{\{\nabla(\underline{H}-i\underline{D})\}}^*=0,$$

которая может быть получена из двух лагранжианов, в зависимости от того, как определяется потенциал

$$\underline{B}-i\underline{E}=-\{\overline{\nabla}\mathrm{A}\}_V\ \text{ либо }\ \underline{H}-i\underline{D}=-i\{\overline{\nabla}\mathrm{B}\}_V.$$

Соответственно, имеем $L_{B-I}(\mathrm{A})=\chi^{-2}(1-l)$ и $L_{B-Id}(\mathrm{B})=\chi^{-2}(1-l_d)$, где

$$l=\sqrt{1+\chi^2(\underline{B}^2-\underline{E}^2)-\chi^4(\underline{B}\underline{E})^2},\quad l_d=\sqrt{1+\chi^2(\underline{D}^2-\underline{H}^2)-\chi^4(\underline{D}\underline{H})^2}. \tag{13}$$

Эти лагранжианы рассматривались, например, в работе [14], где предложен дуально инвариантный лагранжиан $L+L_d$, который, однако, не удовлетворяет принципу соответствия, так как в максвелловском пределе $\chi^2\to 0$, обращается в тождественный ноль. Правильный предел имеет двухпотенциальный лагранжиан

$$\mathcal{L}_{B-I}=\frac{1}{2}[L_{B-I}(\mathrm{A})-L_{B-Id}(\mathrm{B})],$$

очевидно не являющийся дуальным инвариантом.

Выясним теперь трансформационные свойства лагранжианов $L(\mathrm{A})$, $L_d(\mathrm{B})$, $\mathcal{L}$ относительно конечных дуальных преобразований. Для этого достаточно напомнить [2], что лоренц-инварианты (13) связаны с дуальными инвариантами

$$h=\sqrt{1+\chi^2(\underline{B}^2+\underline{D}^2)+\chi^4[\underline{B}\underline{D}]^2} \text{ и } \tilde{h}=\sqrt{1-\chi^2(\underline{H}^2+\underline{E}^2)+\chi^4[\underline{H}\underline{E}]^2} \tag{14}$$

соотношениями

$$h=l+\chi^2(\underline{D}\underline{E})=l_d+\chi^2(\underline{B}\underline{H})=1/2\{l+l_d+\chi^2[(\underline{D}\underline{E})+(\underline{B}\underline{H})]\}, \tag{15}$$

$$\tilde{h}=l-\chi^2(\underline{B}\underline{H})=l_d-\chi^2(\underline{D}\underline{E})=1/2l+l_d-\chi^2[(\underline{D}\underline{E})+(\underline{B}\underline{H})]\}, \tag{16}$$

$$h+\tilde{h}=l+l_d.$$

Складывая левые и правые части формул (15), (16), имеем $h+\tilde{h}=2l+\chi^2[(\underline{D}\underline{E})-(\underline{B}\underline{H})]$, где в левой части формулы стоит сумма дуальных инвариантов. Следовательно, при дуальных преобразованиях, обозначаемых ниже штрихом, сохраняется выражение

$$2l'+\chi^2[(\underline{D}\underline{E})-(\underline{B}\underline{H})]'=2l+\chi^2[(\underline{D}\underline{E})-(\underline{B}\underline{H})].$$

Отсюда с учетом того, что реальная часть скалярной компоненты произведения $(\underline{B}-i\underline{D})(\underline{H}-i\underline{E})$ преобразуется по закону

$$[(\underline{D}\underline{E})-(\underline{B}\underline{H})]'=\mathrm{Re}\{(\underline{B}-i\underline{D})(\underline{H}-i\underline{E})\exp(2i\theta)\}_s=$$
$$[(\underline{D}\underline{E})-(\underline{B}\underline{H})]\cos 2\theta-[(\underline{B}\underline{E})+(\underline{D}\underline{H})]\sin 2\theta,$$

а также формул (14)–(16) и равенства $(\underline{B}\underline{E})=(\underline{D}\underline{H})$, следующего из уравнений связи электродинамики Б–И, находим

$$l'=\frac{1}{2}l(1+\cos 2\theta)+\frac{1}{2}l_d(1-\cos 2\theta)+\chi^2(\underline{B}\underline{E})\sin 2\theta=$$
$$\frac{1}{2}[(l+l_d)+(l-l_d)\cos 2\theta+2\chi^2(\underline{B}\underline{E})\sin 2\theta],$$
$$l'_d=\frac{1}{2}l(1-\cos 2\theta)+\frac{1}{2}l_d(1+\cos 2\theta)-\chi^2(\underline{B}\underline{E})\sin 2\theta=$$
$$\frac{1}{2}[(l+l_d)-(l-l_d)\cos 2\theta-2\chi^2(\underline{B}\underline{E})\sin 2\theta].$$

Откуда следуют формулы преобразования функций Лагранжа электродинамики Б–И

$$\begin{aligned} L'_{B-I}&=\frac{1}{2}[(L_{B-I}+L_{B-Id})+(L_{B-I}-L_{B-Id})\cos 2\theta-2(\underline{B}\underline{E})\sin 2\theta],\\ L'_{B-Id}&=\frac{1}{2}[(L_{B-I}+L_{B-Id})-(L_{B-I}-L_{B-Id})\cos 2\theta+2(\underline{B}\underline{E})\sin 2\theta],\end{aligned} \tag{17}$$

где $(L_{B-I}+L_{B-Id})$ – одновременно лоренцевский и дуальный инвариант, последние члены в обеих формулах представляют собой четырехмерные дивергенции, в силу $(\underline{B}\underline{E})=(\underline{D}\underline{H})$. На первый взгляд зависимость от угла дуального поворота должна остаться в уравнениях движения, однако, это не так. Чтобы убедиться в этом, достаточно, опуская несущественные для вывода лагранжевых уравнений дивергенции, переписать (17) в виде

$$L'_{B-I}=L_{B-I}\cos^2\theta+L_{B-Id}\sin^2\theta,\quad L'_{B-Id}=L_{B-I}\sin^2\theta+L_{B-Id}\cos^2\theta.$$

Поскольку L_{B-I} и L_{B-Id} зависят от разных потенциалов и варьируются независимо, то умножение каждого из них на константу не приводит к изменению уравнений Б–И. Более того, их разность (12) преобразуется по закону

$$\mathcal{L}'_{B-I}=\mathcal{L}_{B-I}\cos 2\theta-(\underline{B}\underline{E})\sin 2\theta,$$

совпадающему с форм-инвариантным поведением при дуальных поворотах лагранжиана свободных уравнений Максвелла в вакууме [15], для которых выраженные в напряженностях дуальные лагранжианы связаны равенством $L_d=-L$, что дает из (17) $L'=L\cos 2\theta-(\underline{B}\underline{E})\sin 2\theta$.

Заключение. Заметим, что в [15] рассматривались свободные от источников уравнения Максвелла, которые следуют как из дуально инвариантного лагранжиана относительно дуальных преобразований первого типа, так и из форм-инвариантного лагранжиана относительно дуальных преобразований второго типа. Преобразования полей в обоих случаях совпадают. При включении источников форм-инвариантный лагранжиан не является пределом полного лагранжиана, описывающего уравнения Максвелла в дуально инвариантном представлении.

Делались неоднократные попытки включения зарядов двух типов в уравнения электродинамики Б–И. При этом дуальная симметрия либо не рассматривалась [16], либо рассматривался [17] третий вариант, когда преобразования полей индукций производились по второму типу, а зарядов – по первому. В задачи данной работы не входило рассмотрение уравнений Б–И с источниками, поэтому анализ последовательности предлагаемых в [16], [17] лагранжианов и уравнений остается за ее рамками.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф13-146).

Литература

1. *Born M., Infeld L.* // Proc. R. Soc. London. 1934. Vol. A144. P. 425–451.
2. *Толкачев Е. А.* // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 3. С. 53–59.
3. *Gerald V. D.* // arXiv: hep-th. 2012. 1202.1557 v1. P. 1–10.
4. *Kruglov S. I.* // arXiv: hep-th. 2009. 0909.1032v1. P. 1–10.
5. *Gaete P., Helayel-Neto J.* // arXiv: hep-th. 2014. 1408.3363 v1. P. 1–10.
6. *Тевикян Р. В.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 791–794.
7. *Kovalevich S. G., Osland P., Shnir Ya. M., Tolkachev E. A.* // Phys. Rev. 1997. Vol. D55, N 9. P. 5857–5862.
8. *Стражев В. И., Томильчик Л. М.* Электродинамика с магнитным зарядом. Минск, 1975.
9. *Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А.* Кватернионы в релятивистской физике. Минск, 1989.
10. *Тевикян Р. В.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 911–914.
11. *Тернов И. М., Дорофеев О. Ф.* // ЭЧАЯ. 1994. Т. 25, вып. 1. С. 1–89.
12. *Heisenberg W., Euler H.* // Zeit. f. Phys. 1936. Vol. 98. P. 714 (arXiv:physics/0605038).
13. *Hendi S. H.* // Ann. Phys. 2013. Vol. 333. P. 282 (arXiv: gr-qc. 2014. 1405.5359v1. P. 1–7).
14. *Chernitskii A. A.* // JHEP. 1999. Vol. 12010. P. 1–35.
15. *Томильчик Л. М.* // Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук. 1977. № 4. С. 127–128.
16. *Wolf C.* // Physica Scripta. 1992. Vol. 46. P. 385–388.
17. *Chruscinski D., Romer H.* // arXiv: hep-th. 1998. 9805042. P. 1–11.

E. A. TOLKACHEV

tea@dragon.bas-net.by

**DOUBLE DUALITY OF THE BORN–INFELD EQUATIONS
AND NONLINEAR LAGRANGIAN OF QED**

Summary

It is shown that arbitrary nonlinear Lorentz-covariant generalizations of Maxwell electrodynamics are dual invariant if, along with the fields, the model parameters are transformed, which in QED are proportional to the electron charge. The transformation properties of the Born–Infeld Lagrangians with respect to two types of dual transformations are found explicitly.