Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 март–апрель Том 60 № 2

УДК 517.977

А. И. КАЛИНИН, Л. И. ЛАВРИНОВИЧ

СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
kalininai@bsu.by; lavrinovich@bsu.by

Рассматривается задача об управлении с минимальной энергией линейной сингулярно возмущенной системой. Конечное состояние системы и время перехода считаются заданными. Строятся асимптотические приближения к оптимальному программному управлению и оптимальной обратной связи в этой задаче. Основное достоинство предлагаемых алгоритмов состоит в том, что при их применении исходная задача оптимального управления распадается на две невозмущенные задачи меньшей размерности.

Ключевые слова: оптимальное управление, обратная связь, линейно-квадратичная задача, малый параметр, сингулярные возмущения, асимптотические приближения.

A. I. KALININ, L. I. LAVRINOVICH

SINGULAR PERTURBATIONS IN THE LINEAR-QUADRATIC OPTIMAL CONTROL PROBLEM

Belarusian State University, Minsk, Belarus
kalininai@bsu.by; lavrinovich@bsu.by

The control problem for a linear singularly perturbed system with minimum energy is under consideration. The final state of the system and the transition time are assumed to be given. Asymptotic approximations to the optimal open-loop and optimal feedback controls for this problem are constructed. The main advantage of the proposed algorithms is that the original optimal control problem is split into two unperturbed problem of smaller dimension.

Keywords: optimal control, feedback, linear-quadratic problem, small parameter, singular perturbations, asymptotic approximations.

Введение. В математической теории оптимальных процессов значительное внимание уделяется асимптотическим методам оптимизации сингулярно возмущенных систем, содержащих малые параметры при части производных (см. обзоры в [1–3]). Как известно, численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В сингулярно возмущенных задачах эти системы являются жесткими [4] и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. Поэтому возрастает роль асимптотических методов, тем более что при их применении происходит декомпозиция исходной задачи оптимального управления на задачи меньшей размерности. Настоящее сообщение посвящено построению асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению задачи оптимизации переходного процесса в линейной сингулярно возмущенной системе. Эта задача состоит в нахождении допустимого управления с минимальными энергетическими затратами.

Следует отметить, что сингулярно возмущенным линейно-квадратичным задачам оптимального управления посвящено значительное число работ (см., напр., [5–8]), однако в них не накладывались ограничения на правый конец траекторий.

Постановка задачи. В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in T = [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u,\ y(t_*) = y_*, \\ \mu\dot{z} &= A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u,\ z(t_*) = z_*, \end{aligned} \tag{1}$$

$$y(t^*) = 0,\ z(t^*) = 0, \tag{2}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} u^T P(t) u dt \to \min, \tag{3}$$

где μ – малый положительный параметр; t_*, t^* – заданные моменты времени ($t_* < t^*$); y – n-вектор медленных переменных; z – m-вектор быстрых переменных; $P(t)$ – положительно определенная симметрическая матрица для всех $t \in T$.

П р е д п о л о ж е н и е 1. *Матрица $A_4(t), t \in T$, устойчивая, т. е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.*

П р е д п о л о ж е н и е 2. *Элементы всех матриц, формирующих задачу, бесконечно дифференцируемы.*

Управление с кусочно-непрерывными компонентами принято называть допустимым, если для порожденной им траектории системы (1) выполнены терминальные ограничения (2). Допустимое управление, на котором критерий качества (3) принимает наименьшее значение, называют оптимальным. Асимптотические приближения к решению рассмотренной задачи будем называть асимптотически субоптимальными управлениями.

О п р е д е л е н и е 1. *Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка ($N = 0, 1, 2, \ldots$), если оно переводит динамическую систему в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.*

О п р е д е л е н и е 2. *Вектор-функцию $u^{(N)}(y, z, t, \mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния (y_*, z_*, t_*), $t_* < t^*$, имеет место*

$$u^{(N)}(y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu),$$

где $u^{(N)}(t, \mu), t \in T$, – асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1)–(3).

Целью исследования рассмотренной задачи, которую можно трактовать как задачу управления с минимальными энергетическими затратами, является построение асимптотических приближений к ее решению в виде программы и обратной связи.

Базовые задачи. Основная идея применяемого подхода состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных – конечномерных элементов, по которым можно легко восстановить решение задачи. Старшие коэффициенты этих разложений могут быть найдены в результате решения двух базовых невозмущенных задач оптимального управления с n и m фазовыми переменными соответственно. Первой из них является вырожденная задача

$$\begin{aligned} &\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u,\ y(t_*) = y_*,\ y(t^*) = 0, \\ &J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} u^T P(t) u dt \to \min, \end{aligned} \tag{4}$$

где $A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$. В дальнейшем эту задачу будем называть *первой базовой*.

П р е д п о л о ж е н и е 3. *Динамическая система в задаче (4) является вполне управляемой [9].*

При таком предположении в первой базовой задаче существуют допустимые управления, а тогда (см. [10]) эта задача имеет единственное решение $u^0(t)$, $t \in T$, которое является нормальной экстремалью.

Вторая базовая задача имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{dz}{ds} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u,\ z(0) = A_4^{-1}(t^*)B_2(t^*)u^0(t^*), \\ &z(-\infty) = 0,\ J_2(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} u^T P(t^*) u ds \to \min. \end{aligned} \tag{5}$$

П р е д п о л о ж е н и е 4. *Выполнено условие управляемости*

$$\operatorname{rank}(B_2(t^*),\ A_4(t^*)B_2(t^*), \ldots,\ A_4^{m-1}(t^*)B_2(t^*)) = m.$$

Это предположение гарантирует существование допустимых управлений во второй базовой задаче. Отсюда в свою очередь следует (см. [10]), что задача (5) имеет единственное решение $u^*(s),\ s \le 0$, и является нормальной.

Т е о р е м а. *При выполнении предположений 1–4 решению задачи (1)–(3) с достаточно малым* μ *соответствует в силу принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных* $(\psi_1^0(t,\mu), \psi_2^0(t,\mu)),\ t \in T$. *Величины* $\lambda(\mu) = \psi_1^0(t^*,\mu),\ \nu(\mu) = \psi_2^0(t^*,\mu)$ *допускают асимптотические разложения*

$$\lambda(\mu) \sim \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k,\ \nu(\mu) \sim \nu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \nu_k,$$

в которых $\nu_0 = \sigma_0 - (A_2(t^*)A_4^{-1}(t^*))^T \lambda_0$, а λ_0, σ_0 – *начальные значения* (*в момент времени* t^*) *сопряженных переменных соответственно в первой и второй базовых задачах.*

Построение асимптотически субоптимальных управлений. На основе конструктивного доказательства теоремы разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа N построить асимптотическое субоптимальное управление N-го порядка. Асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка представимо в виде

$$u^{(0)}(t,\mu) = u^0(t) + u^*((t - t^*)/\mu),\ t \in T, \tag{6}$$

и может быть сформировано непосредственно после решения базовых задач. Заметим, что управление (6) не зависит от начального состояния z_* вектора быстрых переменных и при малых μ будет существенно отличатся от решения $u^0(t),\ t \in T$, первой базовой задачи лишь в пограничном слое, т. е. в некоторой левосторонней окрестности точки t*. Для построения асимптотически субоптимальных управлений более высокого порядка нужно дополнительно интегрировать системы линейных дифференциальных уравнений и находить решения невырожденных линейных алгебраических систем.

Асимптотически субоптимальный синтез. Введем в рассмотрение матричную функцию

$$C_1(t) = \int_t^{t^*} \Phi_0(\tau)P^{-1}(\tau)\Phi_0^T(\tau)d\tau,\ t \in T,$$

где $\Phi_0(t) = F_0(t)B_0(t),\ t \in T$, а $F_0(t),\ t \in T$, – $(n \times n)$-матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$\dot{F}_0 = -F_0 A_0(t),\ \ F_0(t^*) = E_n.$$

Определим также матрицу

$$C_2 = \int_{-\infty}^{0} (\Pi\Phi(s)P^{-1}(t^*)\Pi\Phi^T(s))ds,$$

где $\Pi\Phi(s) = G(s)B_2(t^*),\ s \le 0$, а $G(s),\ s \le 0$, – $(m \times m)$-матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dG}{ds} = -GA_4(t^*),\ G(0) = E_m.$$

В силу неявного критерия управляемости [11] при выполнении предположений 3, 4 матрицы $C_1(t),\ t < t^*, C_2$ будут невырожденными.

Асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка имеет вид

$$u^{(0)}(y, z, t, \mu) = -P^{-1}(t)(B_0^{\mathrm{T}}(t)F_0^{\mathrm{T}}(t) + B_2^{\mathrm{T}}(t)G^{\mathrm{T}}((t - t^*) / \mu)C_0)C_1^{-1}(t)F_0(t)y,$$

где

$$C_0 = C_2^{-1}A_4^{-1}(t^*)B_2(t^*)P^{-1}(t^*)B_0^{\mathrm{T}}(t^*).$$

Отметим, что построенная обратная связь не зависит от текущей позиции вектора быстрых переменных z.

Заключение. В сообщении предложены вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи в виде программы и обратной связи. При реализации предлагаемых алгоритмов исходная задача оптимального управления распадается на две невозмущенные задачи меньшей размерности. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи оптимизации динамических систем с большим числом фазовых переменных. Кроме того, вычислительные процедуры алгоритмов не содержат интегрирований жестких систем.

Список использованной литературы

1. *Дмитриев, М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах управления / М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 1. – С. 3–51.

2. *Калинин, А. И.* Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления / А. И. Калинин // Изв. РАН. Техн. кибернетика. – 1994. – № 3. – С. 104–114.

3. *Kokotovic, P. V.* Singular perturbations in systems and control / P. V. Kokotovic, H. K. Khalil. – New York: IEEE Press, 1986. – 362 p.

4. *Ракитский, Ю. В.* Численные методы решения жестких систем / Ю. В. Ракитский, С. М. Устинов, И. Г. Черноруцкий. – М.: Наука, 1979. – 208 с.

5. *Kokotovic, P. V.* Singular perturbation of linear regulators: basic theorems / P. V. Kokotovic, R. A. Jackel // IEEE Trans. Automat. Control. – 1972. – Vol. 17, N 1. – P. 29–37.

6. *Wilde, R. R.* Optimal open - and closed loop control of singularly perturbed linear systems / R. R. Wilde, P. V. Kokotovic // IEEE Trans. Automat. Control. – 1973. – Vol. 18, N 6. – P. 616–626.

7. *Глизер, В. Я.* Сингулярные возмущения в линейной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом / В. Я. Глизер, М. Г. Дмитриев // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 225, № 5. – С. 997–1000.

8. *O'Malley, R. E. Jr.* Singular perturbations and optimal control / R. E. O'Malley Jr. // Lect. Notes Math. – 1978. – Vol. 680. – P. 171–218.

9. *Красовский, Н. Н.* Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

10. *Мордухович, Б. Ш.* Существование оптимальных управлений / Б. Ш. Мордухович // Соврем. пробл. матем. (Итоги науки и техн.). – М.: ВИНИТИ, 1976. – Т. 6. – С. 207–271.

11. *Габасов, Р.* Оптимизация линейных систем / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск: Изд-во БГУ, 1973. – 248 с.

Поступило в редакцию 03.02.2016