Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 март–апрель Том 60 № 2

ДК 512.74+512.552.13

Академик В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

ПРИВЕДЕННЫЕ ГРУППЫ УАЙТХЕДА СПЕЦИАЛЬНЫХ УНИТАРНЫХ ГРУПП АНИЗОТРОПНЫХ ЭРМИТОВЫХ ФОРМ, СВЯЗАННЫХ С ГЕНЗЕЛЕВЫМИ АЛГЕБРАМИ С ДЕЛЕНИЕМ, АЛГЕБРЫ ВЫЧЕТОВ КОТОРЫХ ГЛОБАЛЬНЫ

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
yanch@im.bas-net.by

Данное сообщение ставит своей целью получение схемы вычисления приведенных групп Уайтхеда специальных унитарных групп анизотропных эрмитовых форм, связанных с гензелевыми алгебрами с делением, алгебры вычетов которых глобальны.

Ключевые слова: приведенные группы Уайтхеда, гензелевы алгебры с инволюциями, специальные унитарные группы алгебр с делением.

V. I. YANCHEVSKIĬ

ON REDUCED WHITEHEAD GROUPS OF SPECIAL UNITARY GROUPS OF ANISOTROPIC HERMITIAN FORMS, RELATED TO HENSELIAN DIVISION ALGEBRAS WITH GLOBAL RESIDUE ALGEBRAS

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
yanch@im.bas-net.by

The aim of the given paper is to obtain a scheme of computation of reduced Whitehead groups of special unitary groups of anisotropic hermitian forms, related to henselian division algebras with global residue algebras.

Keywords: reduced Whitehead groups, henselian algebras with involutions, special unitary groups of division algebras.

Введение. Пусть k – поле. В теории линейных алгебраических групп многие важные структурные проблемы тесно связаны с аналогичными проблемами строения групп $G(k)$ k-рациональных точек односвязных простых k-определенных групп G. С каждой такой группой можно связать абелеву группу – приведенную группу Уайтхеда. Приведенные группы Уайтхеда играют ключевую роль при изучении $G(k)$. Наиболее трудными для изучения (по крайней мере для групп классического типа) являются группы типа A_r (см., напр., [1]). Исходя из явной реализации групп $G(k)$, задача описания приведенных групп Уайтхеда сводится к описанию некоторых факторов групп обратимых элементов простых ассоциативных конечномерных k-алгебр. В самом деле, группы $G(k)$ описываются следующим образом.

Пусть $A = M_m(D)$ – полная матричная алгебра степени m над конечномерной ассоциативной центральной k-алгеброй с делением D индекса d, $Nrd_A : A \to k$ – отображение приведенной нормы алгебры A, $GL(m, D)$ – группа обратимых элементов алгебры A, и

$$SL(m, D) = \{g \in GL(m, D) \mid Nrd_A(g) = 1\}.$$

Известно, что группа $SL(m, D)$ отождествляется с группой k-рациональных точек односвязной группы (которую мы будем обозначать через $\mathbf{SL}(m, D)$), являющейся внутренней формой типа ${}^1A_{n-1}$ (здесь $n = md$). Приведенные группы Уайтхеда $Wh(\mathbf{SL}(m, D)(k))$ групп $SL(m, D)$ определяются в этом случае так:

$$Wh(\mathbf{SL}(m, D)(k)) = SL(m, D) / [GL(m, D), GL(m, D)],$$

где $[GL(m, D), GL(m, D)]$ – коммутант группы $GL(m, D)$. Обычно, группа $Wh(\mathbf{SL}(m, D)(k))$ обозначается через $SK_1(M_m(D))$.

Для описания групп k-рациональных точек в случае внешних форм ${}^2A_{n-1}$ рассматриваются специальные унитарные группы подходящих эрмитовых форм. Пусть K / k – квадратичное сепарабельное расширение полей, $A = M_m(D)$ – полная матричная алгебра степени m над конечномерной центральной K-алгеброй с делением D индекса d. Предположим, что алгебра A обладает K / k-инволюцией τ, где k – подполе инвариантов τ в K. Алгебра A обладает также D-инвариантной K / k-инволюцией δ такой, что $\left\|d_{ij}\right\|^{\delta}_{i,j=1,\ldots,m} = \left\|d^{\delta}_{ji}\right\|_{i,j=1,\ldots,m}$ (здесь $\left\|d_{ij}\right\|$ – $m \times m$ матрица над D с элементом $d_{ij} \in D$ на позиции (i, j)). Известно, что для подходящего δ-инвариантного F при произвольном $a \in A$ верно $a^{\tau} = F^{-1}a^{\delta}F$. Это позволяет определить унитарную и специальную унитарную группы подходящих эрмитовых форм. Именно, для правого m-мерного векторного пространства V над D и его базиса $e_1, \ldots, e_m$ пусть f эрмитова форма на V с матрицей F (относительно этого базиса). Положим

$$U(m, D, f) = \{u \in GL(m, D) \mid u^{\delta}Fu = u\},$$

$SL(m, D, f) = \{u \in U(m, D) \mid Nrd_A(u) = 1\}$.

Обе группы $U(m, D, f)$ и $SU(m, D, f)$ отождествляются с группами k-рациональных точек соответствующих k-определенных алгебраических групп: унитарной $\mathbf{U}(m, D, f)$ и специальной унитарной $\mathbf{SU}(m, D, f)$.

В случае внешних форм приведенные группы Уайтхеда определяются следующим образом:

$$Wh(\mathbf{SU}(m, D, f)(k)) = SL(m, D, f) / [U(m, D, f), U(m, D, f)]\ ,$$

где $[\,U(m, D, f), U(m, D, f)]$ – коммутант группы $U(m, D, f)$.

Существует другая интерпретация групп k-рациональных точек внешних форм.

Для произвольной K / k-инволюции μ алгебры A определены унитарная и специальная унитарная группы пары (A, μ):

$$U(A, \mu) = \{u \in A \mid u^{\mu}u = 1\},$$

$SL(A, \mu) = \{u \in U(m, D) \mid Nrd_A(u) = 1\}$.

Отметим, что между унитарными (специальными унитарными) группами эрмитовых форм и унитарными (специальными унитарными) группами алгебр с инволюциями имеется простая связь.

Пусть, как и выше, F – матрица эрмитовой формы f. Для любого $a \in A$ положим $a^{\theta} = F^{-1}a^{\delta}F$. Тогда θ – K / k-инволюция алгебры A и

$$U(m, D, f) = U(A, \theta),$$

$SU(m, D, f) = SU(A, \theta)$.

При изучении приведенных групп Уайтхеда внутренних форм важную роль играет следующее обстоятельство: они не зависят от m. Более точно, имеют место следующие изоморфизмы:

$$SK_1(M_m(D)) \approxeq SK_1(D),$$

где $SK_1(D) := SK_1(M_1(D))$. Таким образом, вычисление групп $SK_1(M_m(D))$ не зависит от того, являются ли группы $SL(m, D)$ изотропными или анизотропными над k. Положение оказывается иным в случае внешних форм. В изотропной ситуации группы $Wh(SU(m, D)(k))$ оказываются изоморфными группам $SUK_1(A, \delta) := \Sigma'_{\delta}(A) / \Sigma_{\delta}(A)$, где $\Sigma'_{\delta}(A) := \{d \in A \mid Nrd_A(d) \in k \setminus \{0\}\}$, $\Sigma_{\delta}(A)$ – подгруппа, порожденная δ-инвариантными элементами из $GL(m, D)$.

Поскольку группы $\Sigma'_{\delta}(A)$ и $\Sigma_{\delta}(A)$ зависят лишь от ограничения инволюции δ на k, повсюду ниже мы будем опускать индекс δ.

Приведенные группы Уайтхеда $SK_1(A)$ и $SUK_1(A, \delta)$ (в изотропном случае) достаточно хорошо изучены [2–10] и обладают многими общими свойствами. Напротив, в анизотропной ситуации группы $Wh(\mathbf{SU}(m, D, f)(k))$ изучены мало и их свойства значительно отличаются от свойств групп $SK_1(A)$ и $SUK_1(A, \delta)$. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство мы будем обозначать группы $Wh(\mathbf{SU}(m, D, f)(k))$ в анизотропной ситуации через $SUK_1^{an}(A, \delta)$.

Основной объект наших рассмотрений – группы $SUK_1^{an}(A, \delta)$. Ниже для краткости мы ограничиваемся наиболее интересным случаем некоммутативных D (по поводу случая $d = 1$, k – поле алгебраических чисел см. [11]).

Длительное время считалось, что группы $SUK_1^{an}(A, \delta)$ обладают свойствами, схожими со свойствами групп $SK_1(A)$ и $SUK_1(A, \delta)$ (по крайней мере в случае специальных полей k). Так, для глобальных полей k обсуждалась проблема тривиальности групп $SUK_1^{an}(D, \delta)$ как один из начальных шагов для получения результатов о нормальном строении групп $SU(1, D, \delta)$ (соответствующие группы $SK_1(D)$ и $SUK_1(D, \delta)$ в этом случае тривиальны). Однако оказалось, что положение на самом деле более сложное. В [12] было показано, что для полей рациональных функций от одной переменной над подходящими циклотомическими расширениями $\mathbb{Q}$ и специальных символ-алгебр произвольных степеней $n > 2$ группы $SUK_1^{an}(D, \delta)$ могут быть даже бесконечными, а затем Б. Сури в [13] вычислил группы $SUK_1^{an}(D, \delta)$ для кватернионных алгебр D с делением над глобальными полями K. Заметим, что в случае глобальных полей K эти группы всегда конечны.

Никаких общих результатов о группах $SUK_1^{an}(A, \delta)$ (за исключением [14], где была установлена важная связь групп $SUK_1^{an}(A, \delta)$ и $SUK_1(A, \delta)$, не зависящих от структуры A) до недавнего времени получено не было.

Цель сообщения – предложить схему вычисления групп $SUK_1^{an}(D, \tau) = SU(D, \tau)/[U(D, \tau), U(D, \tau)]$ в терминах алгебры вычетов $\bar{D}$ алгебры D в том случае, когда D – центральная K-алгебра с делением нечетного индекса такая, что k – гензелево поле, поле вычетов которого является полем алгебраических чисел.

Основная часть. Для изложения основного результата приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть k – гензелево поле, поле вычетов которого является полем алгебраических чисел и D – центральная K-алгебра с делением такая, что K – квадратичное расширение поля k. Обозначим через v единственное продолжение нормирования поля k до нормирования алгебры D. Тогда алгебра вычетов $\bar{D}$ алгебры D относительно v определяется как $\bar{K}$-алгебра V_D / M_D, где V_D – кольцо целых, а M_D – идеал нормирования v. Аналогично пусть $\bar{K}$, $\bar{k}$ – поля вычетов полей K и k соответственно относительно ограничений v на K и k. Вообще, для множества S v-целых элементов из D через $\bar{S}$ будет обозначаться множество редукций в $\bar{D}$ элементов из S. Предположим, что алгебра D обладает K / k-инволюцией τ. Тогда однозначно определена редукция $\bar{\tau}$ инволюции τ. Пусть $Z(\bar{D})$ – центр алгебры $\bar{D}$. Для формулировки основного результата нам потребуются следующие группы:

$$SL^v(D) = \{d \in SL(D) \mid N_{Z(\bar{D})/\bar{K}}(Nrd_{\bar{D}}(\bar{d})) = 1\},$$

$$SU^v(D, \tau) = \{d \in SU(D, \tau) \mid N_{Z(\bar{D})/\bar{k}}(Nrd_{\bar{D}}(\bar{d})) = 1\},$$

$$SUK_1^v(D, \tau) = \overline{SU^v(D, \tau)}/[U(\bar{D}, \bar{\tau}), U(\bar{D}, \bar{\tau})].$$

Упоминавшаяся схема вычисления групп $SUK_1^{an}(D, \tau)$ возникает из следующего утверждения.

Т е о р е м а 1. *В вышеприведенных обозначениях для алгебр D нечетного индекса имеют место следующие точные последовательности групп и подходящих гомоморфизмов:*

$$1 \to SUK_1^{an}(\bar{D}, \bar{\tau}) \to SUK_1^v(D, \tau) \to Nrd_{\bar{D}}(U(\bar{D}, \bar{\tau})) \cap Nrd_{\bar{D}}(\overline{SL^v(D)}) \to 1,$$

$$1 \to SUK_1^v(D, \tau) \to SUK_1^{an}(D, \tau) \to E_\lambda \to 1,$$

где E_λ – подгруппа группы корней ε_λ степени λ из единицы, лежащих в $\bar{K}$, таких, что $\varepsilon_\lambda^{\tau}\varepsilon_\lambda = 1$, совпадающая с образом гомоморфизма $N_{Z(\bar{D})/\bar{K}} \circ Nrd_{\bar{D}}$, ограниченного на группу $\overline{SU(D, \tau)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы основано на следующих утверждениях:

1. Конгруэнц-теорема. Пусть, как и выше, D – алгебра с делением нечетного индекса. Тогда $(1 + M_D) \cap SU(D, \tau) \subsetneqq [U(D, \tau), U(D, \tau)]$, где $(1 + M_D)$ – подгруппа элементов алгебры D вида $1 + m$, где $m \in M_D$.

2. Описание редукции группы $SU^v(D, \tau)$; $\overline{SU^v(D, \tau)} = U(\bar{D}, \bar{\tau}) \cap \overline{SL^v(D, \tau)}$.

3. Описание редукции группы $U(D, \tau)$ и ее коммутанта $[U(D, \tau), U(D, \tau)]$:

$$\overline{U(D, \tau)} = U(\bar{D}, \bar{\tau}),$$

$$\overline{[U(D, \tau), U(D, \tau)]} = [U(\bar{D}, \bar{\tau}), U(\bar{D}, \bar{\tau})].$$

В случае, когда $\overline{k}$ – поле алгебраических чисел, из теоремы 1 выводится основная теорема, позволяющая вычислить группы $SUK_1^{an}(D,\tau)$ в терминах алгебры $\overline{D}$.

Т е о р е м а 2. *В обозначениях теоремы 1 для случая $\overline{k}$ – поле алгебраических чисел имеют место следующие точные последовательности групп и гомоморфизмов:*

$$1 \to SUK_1^{an}(\overline{D},\overline{\tau}) \to SUK_1^{v}(D,\tau) \to SL(Z(\overline{D})/Z(\overline{D})_{\overline{\tau}}) \bigcap SL(Z(\overline{D})/\overline{K}) \to 1,$$

где $SL(Z(\overline{D})/Z(\overline{D})_{\overline{\tau}})$, $SL(Z(\overline{D})/\overline{K})$ *– ядра норменных гомоморфизмов расширений полей* $Z(\overline{D})/Z(\overline{D})_{\overline{\tau}}$, $Z(\overline{D})/\overline{K}$ *соответственно,*

$$1 \to SUK_1^{v}(D,\tau) \to SUK_1^{an}(D,\tau) \to E_\lambda \to 1.$$

При доказательстве теоремы 2, помимо предыдущей теоремы, используется также описание группы $Nrd_{\overline{D}}(U(\overline{D},\overline{\tau}))$, а также описание группы $Nrd_{\overline{D}}(\overline{SL^{v}(D)})$ и следующее следствие из теоремы Эйхлера о приведенных нормах в алгебрах над глобальными полями нечетных индексов.

С л е д с т в и е. *Пусть E – простая центральная алгебра над глобальным полем F нечетного индекса. Тогда гомоморфизм приведенной нормы Nrd_E сюръективен.*

З а м е ч а н и е. *Утверждение, аналогичное теореме 2, справедливо также и в случае глобального поля $\overline{k}$.*

Заключение. Получена схема вычисления групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$ для гензелевых алгебр с делением D нечетных индексов в терминах глобальных алгебр $\overline{D}$ (т. е. центры которых глобальные поля).

Список использованной литературы

1. *Segev, Y.* On finite homomorphic images of the multiplicative groups of a division algebra / Y. Segev // Ann. Math. – 1999. – T. 149, N 1. – P. 219–251.

2. *Chernousov, V. R*-equivalence and special unitary groups / V. Chernousov, A. Merkurjev // J. Algebra. – 2002. – T. 209, N 1. – P. 175–198.

3. *Draxl, P.* SK_1 von Algebren über vollständig diskret bewerteten Körpern und Galoiskohomologie abelscher Körpererweiterungen / P. Draxl // J. reine angew. Math. – 1977. – Bd. 293–294. – P. 116–142.

4. *Hazrat, R.* Unitary SK_1 of graded and valued division algebras / R. Hazrat, A. R. Wadsworth // Proc. London Math. Soc. – 2011. – Vol. 103, N 3. – P. 508–534.

5. *Wadsworth, A. R.* Unitary SK_1 for a graded division ring and its quotient division ring / A. R. Wadsworth, V. I. Yanchevskiĭ // J. Algebra. – 2012. – Vol. 352, N 1. – P. 62–78.

6. *Yanchevskiĭ, V. I.* Whitehead groups and groups of *R*-equivalence classes of linear algebraic groups of noncommutative classical type over some virtual fields / V. I. Yanchevskiĭ // Proceeding of the International Conference on Algebraic Groups and Arithmetic, TIFR, Mumbai, December 2001. – Mumbai, 2001. – P. 491–505.

7. *Платонов, В. П.* Проблема Таннака–Артина и приведенная *K*-теория / В. П. Платонов // Изв. АН СССР, сер. мат. – 1976. – Т. 40, № 2. – С. 227–261.

8. *Янчевский, В. И.* Простые алгебры с инволюциями и унитарные группы / В. И. Янчевский // Матем. сб. – 1974. – Т. 93, № 3. – С. 368–380.

9. *Янчевский, В. И.* Приведенная *K*-теория и тела над гензелевыми дискретно нормированными полями / В. И. Янчевский // Изв. АН СССР, сер. мат. – 1978. – Т. 42, № 4. – С. 879–918.

10. *Янчевский, В. И.* Приведенная унитарная *K*-теория. Приложения к алгебраическим группам / В. И. Янчевский // Матем. сб. – 1979. – Т. 110(152), № 4(12). – С. 579–596.

11. *Kneser, M.* Orthogonale Gruppen über algebraischen Zahlkörpern / M. Kneser // J. reine angew. Math. – 1956. – N 196. – P. 213–220.

12. *Sethuraman, B. A.* On the special unitary group of a division algebra / B. A. Sethuraman, B. Sury // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006. – Vol. 134, N 2. – P. 351–354.

13. *Sury, B.* On *SU*(1, *D*)/ [*U*(1,*D*), *U*(1,*D*)] for a quaternion division algebra *D* / B. Sury // Arch. Math. – 2008. – Vol. 90, N 6. – P. 493–500.

14. *Yanchevskiĭ, V. I.* Reduced Whitehead groups and the conjugacy problem for special unitary groups of anisotropic Hermitian forms / V. I. Yanchevskiĭ // J. Math. Sci. – 2013. – Vol. 192, N 2. – P. 250–262.

Поступило в редакцию 09.11.2015