Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **май–июнь** **Том 60 № 3**

МАТЕМАТИКА

УДК 517.926.4

А. В. ЛИПНИЦКИЙ

ОЦЕНКИ ОТКЛОНЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ МИЛЛИОНЩИКОВА ОТ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
ya.andrei173@yandex.by

Получена оценка нормы решений линейных дифференциальных систем из класса, включающего известные примеры почти периодических систем, неправильных по Ляпунову, с помощью специальных тригонометрических сумм.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, тригонометрическая сумма, оценка решений.

A. V. LIPNITSKII

ESTIMATED DEVIATION OF THE SOLUTIONS OF MILLIONSCHIKOV'S LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS FROM THE CORRESPONDING TRYGONOMETRIC SUMS

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
ya.andrei173@yandex.by

The estimated norm of the solutions to the linear differential systems from special classes is obtained with the use of special trygonometric sums.

Keywords: linear differential system, trygonometric sum, estimation of solutions.

В работе [1] доказана положительность на множестве значений вещественного параметра μ положительной меры Лебега старшего характеристического показателя системы

$$\dot{x} = A_\mu(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \ge 0, \tag{1_μ}$$

с матрицей коэффициентов вида

$$A_\mu(t) := \ln d_k \operatorname{diag}[1,-1], \quad 2k-1 \le t < 2k,$$

$$A_\mu(t) := (\mu + b_k)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2k-2 \le t < 2k-1,$$

где $\mu, b_k \in \mathbb{R}$, $d_k \ge d > 1$, $k \in \mathbb{N}$ (в работе [2] тот же результат получен в случае $d > 16$).

Системы с такими коэффициентами обладают рядом свойств, позволяющих строить однопараметрические семейства с различными асимптотическими характеристиками. В частности, В. М. Миллионщиков использовал их в [3; 4] (см. также [5]) при построении неправильных по Ляпунову линейных дифференциальных систем с предельно периодическими и квазипериодическими коэффициентами.

Обозначим через $X_{A_\mu}(t,s)$, $t, s \ge 0$, матрицу Коши системы (1_μ) и положим $x_\mu(t) := X_{A_\mu}(t,0)e_1$, где $e_1 := (1,0)^T$.

© Липницкий А. В., 2016.

В [6] установлено (это также вытекает из результатов [1]), что при любых $d_k \ge d > 1$, $k \ge 1$, интеграл

$$\int_0^{\pi} \left\| x_\mu(t) \right\| d\mu \tag{2}$$

неограниченно возрастает при $t \to +\infty$. Это означает отсутствие равномерных по $t \ge 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ оценок сверху нормы решений системы (1_μ).

Случай, когда $\inf\limits_{k \in \mathrm{N}} d_k = 1$, остается открытым.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $\beta_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, $h := \sup\{\ln d_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

В настоящей работе получена оценка нормы решений систем Миллионщикова с помощью специальных тригонометрических сумм, позволяющая связать предельное поведение при $t \to +\infty$ интеграла (2) с ограниченностью соответствующего тригонометрического ряда.

Т е о р е м а 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\left| \left\| x_\mu(2n) \right\| - \left| 1 + \sum_{k=1}^{n} (\ln d_k) e^{-2i(k\mu + \beta_k)} \right| \right| \le 4n^2 h^2 e^{2nh}. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $U(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ матрицу поворота на угол φ против часовой стрелки.

Определим матрицы $B(\cdot)$ и $D(\cdot)$ равенствами $B(t) := A_\mu(t)$, $D(t) \equiv 0$ при $2k \le t < 2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $B(t) \equiv 0$, $D(t) := A_\mu(t)$ для всех остальных $t \ge 0$.

Тогда при любом $t \ge 0$ выполняется равенство $A(t) = B(t) + D(t)$.

Для всех $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in [0,1]$, выполняются соотношения (E обозначает единичную матрицу)

$$X_A(s + 2k + 1, 2k + 1) = \mathrm{diag}[d_{k+1}^{s}, d_{k+1}^{-s}], \tag{4}$$

$$X_A(s + 2k, 2k) = X_B(s + 2k, 2k) = U((\mu + b_{k+1})s), \tag{5}$$

$$X_B(s + 2k + 1, 2k + 1) = E. \tag{6}$$

Тогда для каждого $t \in [2k-1, 2k]$, $k \in \mathbb{N}$, справедливы равенства

$$\begin{gathered} X_B(t,0) = X_B(t, 2k-1) \prod_{j=1}^{k} \left(X_B(2k+1-2j, 2k-2j) X_B(2k-2j, 2k-2j-1) \right) \overset{(6)}{=} \\ \prod_{j=1}^{k} X_B(2k+1-2j, 2k-2j) \overset{(5)}{=} \prod_{j=1}^{k} U((\mu + b_{k-j+1}) = U(k\mu + \beta_k). \end{gathered} \tag{7}$$

Поскольку матрица $B(\cdot)$ – кососимметрическая, ее матрица Коши ортогональна [7, с. 109], откуда следует для всех $\tau, s \ge 0$ равенство

$$\left\| X_B(\tau, s) \right\| = 1. \tag{8}$$

Из соотношений (4) и (5) для любых $s \in [0,1]$, $\delta \in \{0,1\}$ вытекают оценки

$$\left\| X_{A_\mu}(s + 2k + \delta, 2k + \delta) \right\| \overset{(4),(5)}{\le} \max\left\{ \left\| \mathrm{diag}[d_{k+1}^{s}, d_{k+1}^{-s}] \right\|, \left\| U((\mu + b_{k+1})s) \right\| \right\} = d_{k+1}^{s}. \tag{9}$$

Отсюда для всех $t \ge 0$ следуют неравенства ($[\cdot]$ обозначает целую часть числа)

$$\begin{gathered} \left\| X_{A_\mu}(t,0) \right\| = \left\| X_{A_\mu}(t,[t]) \prod_{k=0}^{[t]-1} X_{A_\mu}(k+1,k) \right\| \le \\ \left\| X_{A_\mu}(t,[t]) \right\| \prod_{k=0}^{[t]-1} \left\| X_{A_\mu}(k+1,k) \right\| \overset{(9)}{\le} e^{th}. \end{gathered} \tag{10}$$

В силу формулы Коши [8, с. 47] имеем сотношения

$$X_A(t) = X_{B+D}(t) = X_B(t) + \int\limits_0^t X_B(t,s)D(s)X_{B+D}(s,0)ds. \tag{11}$$

Отсюда с учетом (8), (10) следуют неравенства

$$\begin{gathered}\|X_A(t) - X_B(t)\| \overset{(11)}{=} \left\|\int_0^t X_B(t,s)D(s)X_{B+D}(s,0)ds\right\| \le \\ \int_0^t \|X_B(t,s)\|\|D(s)\|\|X_{B+D}(s,0)\|ds \overset{(8),(10)}{\le} te^{th}\sup_{s\ge 0}\|D(s)\| \le the^{th}.\end{gathered} \tag{12}$$

Матрицы

$$E, \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K := IJ = -JI \tag{13}$$

порождают алгебру кватернионов [9, с. 27].

Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ имеем равенства

$$\begin{gathered}IU(\varphi) = I(E\cos\varphi - J\sin\varphi) = I\cos\varphi - K\sin\varphi \overset{(13)}{=} \\ I\cos\varphi + JI\sin\varphi = (E\cos\varphi + J\sin\varphi)I = U(-\varphi)I.\end{gathered} \tag{14}$$

Отсюда, полагая $\varphi := k\mu + \beta_k$, поскольку $D(t) \equiv 0$ при $2k \le t < 2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$, учитывая (7), получаем соотношения

$$\begin{gathered}\int_0^{2n} X_B(0,s)D(s)X_B(s,0)ds = \sum_{k=1}^{n}\int_{2k-1}^{2k} X_B(0,s)D(s)X_B(s,0)ds \overset{(7)}{=} \\ \sum_{k=1}^{n}\int_{2k-1}^{2k} U(-k\mu - \beta_k)I(\ln d_k)U(k\mu + \beta_k)ds \overset{(14)}{=} \sum_{k=1}^{n}(\ln d_k)U(-2k\mu - 2\beta_k)I.\end{gathered} \tag{15}$$

Вследствие формул (7), (11), (15) справедливы равенства

$$\begin{gathered}X_A(2n,0) \overset{(11)}{=} X_B(2n,0)(E + \int_0^{2n} X_B(0,s)D(s)X_{B+D}(s,0)ds) = \\ X_B(2n,0)(I + \int_0^{2n} X_B(0,s)D(s)X_B(s,0)ds) + \int_0^{2n} X_B(2n,s)D(s)(X_A(s) - X_B(s))ds \overset{(7),(15)}{=} \\ U(n\mu + \beta_n)(I + \sum_{k=1}^{n}(\ln d_k)U(-2k\mu - 2\beta_k)\mathrm{diag}[1,-1]) + C(2n),\end{gathered} \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered}\|C(t)\| = \left\|\int_0^t X_B(t,s)D(s)(X_A(s) - X_B(s))ds\right\| \le \\ \int_0^t \|X_B(t,s)\|\|D(s)\|\|X_A(s) - X_B(s)\|ds \overset{(8),(12)}{\le} t^2he^{th}\sup_{s\ge 0}\|D(s)\| \le t^2h^2e^{th}, \quad t \ge 0.\end{gathered}$$

Тогда выполняются соотношения

$$\begin{gathered}4n^2h^2e^{2nh} \ge \|C(2n)e_1\| = \left\|X_A(2n,0)e_1 - U(n\mu + \beta_n)(I + \sum_{k=1}^{n}(\ln d_k)U(-2k\mu - 2\beta_k)e_1\right\| \ge \\ \left|\|X_A(2n,0)e_1\| - \left\|U(n\mu + \beta_n)(I + \sum_{k=1}^{n}(\ln d_k)U(-2k\mu - 2\beta_k)e_1\right\|\right| = \\ \left|\|x_\mu(2n)\| - \left|1 + \sum_{k=1}^{n}(\ln d_k)e^{-2i(k\mu + \beta_k)}\right|\right|.\end{gathered}$$

Таким образом, верна оценка (3). Теорема доказана.

Следующая теорема 2 содержит оценку отклонения логарифма нормы решения системы (1_μ) от модуля соответствующей тригонометрической суммы.

Положим $S_n := 2^{-2}\sum_{k=1}^{n}(d_k^2 - d_k^{-2})\cos 2(k\mu+\beta_k)$, $h_n := \max_{1\le k\le n}(d_k - d_k^{-1})$.

Т е о р е м а 2. *Для любого $n\in\mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\left|\ln\|x_\mu(2n)\| - S_n\right| \le n(n+5)h_n^2 \max_{1\le k\le n} d_k^4. \qquad (17_n)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых ненулевых векторов $x=(x_1,x_2)^{\mathrm T}$, $y=(x_1,x_2)^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^2$ обозначим через $\angle(x,y)\in[-\pi,\pi)$ угол между векторами x и y, отсчитываемый от x к y по направлению против часовой стрелки, т. е. таким образом, что выполняется равенство $y/|y| = U(\angle(x,y))x/|x|$.

Согласно [10, с. 635] справедливы соотношения

$$|x\|y|\sin\angle(x,y) = x\vee y, \qquad (18)$$

где $x\vee y = x_1y_2 - x_2y_1$ обозначает псевдоскалярное произведение векторов x и y.

Для любого $y=(\cos\varphi,\sin\varphi)^{\mathrm t}$, $\varphi\in\mathbb{R}$, полагая $D_k := \mathrm{diag}[d_k, d_k^{-1}]$, поскольку $D_k y = (d_k\cos\varphi, d_k^{-1}\sin\varphi)^{\mathrm t}$, имеем неравенство $|\angle(D_k y, y)|\le\pi/2$, откуда, в силу равенства (18), следуют соотношения

$$\begin{gathered}2^{-1}|\angle(D_k y, y)| \le |\sin\angle(D_k y, y)| = \frac{D_k y\vee y}{\|D_k y\|\|y\|} = \frac{(d_k - d_k^{-1})\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{d_k^2\cos^2\varphi + d_k^{-2}\sin^2\varphi}} = \\ \frac{(d_k - d_k^{-1})\sqrt{|\sin\varphi\cos\varphi|}}{\sqrt{d_k^2|\mathrm{ctg}\,\varphi| + d_k^{-2}|\mathrm{tg}\,\varphi|}} = \frac{(d_k - d_k^{-1})\sqrt{|2^{-1}\sin 2\varphi|}}{\sqrt{2+(d_k\sqrt{|\mathrm{ctg}\,\varphi|} - d_k^{-1}\sqrt{|\mathrm{tg}\,\varphi|})^2}} \le 2^{-1}(d_k - d_k^{-1}).\end{gathered} \qquad (19)$$

Положим $\beta_0 := 0$ и обозначим $z_k(\mu) := U(k\mu+\beta_k)e_1$, $k\in\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$. Предположим, что для некоторого $k\in\mathbb{N}_0$ справедлива оценка

$$|\angle(x_\mu(2k), z_k)| \le kh_k/2. \qquad (20_k)$$

Тогда, вследствие (19), имеем неравенства

$$\begin{gathered}|\angle(x_\mu(2k+2), z_{k+1})| \le |\angle(x_\mu(2k+2), x_\mu(2k+1))| + |\angle(x_\mu(2k+1), z_{k+1})| = \\ |\angle(D_{k+1}x_\mu(2k+1), x_\mu(2k+1))| + |\angle(U(\mu+b_{k+1})x_\mu(2k), U(\mu+b_{k+1})z_k)| \le \\ 2^{-1}(d_{k+1} - d_{k+1}^{-1}) + |\angle(x_\mu(2k), z_k)| \le (k+1)h_{k+1}/2.\end{gathered}$$

Таким образом, выполняется (17_{k+1}). По индукции, с учетом очевидного равенства в (20_0), следует справедливость (20_n) для всех $n\in\mathbb{N}$.

Зафиксируем произвольные $k\in\mathbb{N}$ и $\varphi\in\mathbb{R}$. Имеют место соотношения

$$|(\ln\|D_k y\|)'_\varphi| = \left|\frac{-(d_k^2 - d_k^{-2})\sin 2\varphi}{d_k^2\cos^2\varphi + d_k^{-2}\sin^2\varphi}\right| = \left|\frac{2(d_k^2 - d_k^{-2})}{2+(d_k\sqrt{|\mathrm{ctg}\varphi|} - d_k^{-1}\sqrt{|\mathrm{tg}\varphi|})^2}\right| \le (d_k^2 - d_k^{-2}).$$

Отсюда для любых $y, v\in\mathbb{R}^2$, $\|y\| = \|v\|$, вытекает оценка

$$\left|\ln\frac{\|D_k y\|}{\|D_k v\|}\right| \le (d_k^2 - d_k^{-2})|\angle(y,v)| \le 2d_k h_k|\angle(y,v)|. \qquad (21_k)$$

Справедливы равенства

$$\|D_k U(\varphi)e_1\|^2 = d_k^2\cos^2\varphi + d_k^{-2}\sin^2\varphi =$$
$$2^{-1}[(d_k^2 + d_k^{-2}) + (d_k^2 - d_k^{-2})\cos 2\varphi] = 1 + 2^{-1}(d_k - d_k^{-1})^2 + 2^{-1}(d_k^2 - d_k^{-2})\cos 2\varphi. \tag{22}$$

Согласно [11, с. 160] при любом $\alpha > -1$ верны неравенства

$$\alpha \geq \ln(1+\alpha) \geq \frac{\alpha}{1+\alpha} = \alpha - \frac{\alpha^2}{1+\alpha},$$

из которых, полагая $\alpha := 2^{-1}(d_k - d_k^{-1})^2 + 2^{-1}(d_k^2 - d_k^{-2})\cos 2\varphi$ и учитывая (22), получаем соотношения

$$0 \geq 2\ln\|D_k U(\varphi)e_1\| - \alpha \geq -\alpha^2/(1+\alpha). \tag{23}$$

В силу (22) выполняются оценки $1+\alpha = d_k^2\cos^2\varphi + d_k^{-2}\sin^2\varphi \geq d_k^{-2}$, влекущие за собой неравенства

$$\alpha^2/(1+\alpha) \leq \alpha^2 d_k^2 \leq d_k^2[2^{-1}(d_k - d_k^{-1})^2 + 2^{-1}(d_k^2 - d_k^{-2})]^2 \leq 4^{-1}d_k^2(d_k - d_k^{-1})^2(2d_k)^2 \leq d_k^4 h_k^2.$$

Отсюда и из (23) следуют соотношения

$$d_k^4 h_k^2 > h_k^2 > 2^{-2}(d_k - d_k^{-1})^2 \geq \ln\|D_k U(\varphi)e_1\| - 2^{-2}(d_k^2 - d_k^{-2})\cos 2\varphi \geq$$
$$2^{-2}(d_k - d_k^{-1})^2 - d_k^4 h_k^2 > -d_k^4 h_k^2. \tag{24_k}$$

Полагая в (21_{k+1}) $y := x_\mu(2n+1)$, $\nu = z_{n+1}\|x_\mu(2n+1)\|$, учитывая (20_{n+1}), имеем оценки

$$\left|\ln\frac{\|x_\mu(2n+2)\|}{\|x_\mu(2n+1)\|} - \ln\|D_{n+1}z_{n+1}\|\right| = \left|\ln\frac{\|D_{n+1}x_\mu(2n+1)\|}{D_{n+1}z_{n+1}\|x_\mu(2n+1)\|}\right| \leq$$
$$2d_{n+1}h_{n+1}|\angle(x_\mu(2n+1), z_{n+1})| \overset{(20_{n+1})}{\leq} (n+1)d_{n+1}h_{n+1}^2. \tag{25}$$

Полагая $S_0 := 0$, получаем в формуле (17_0) точное равенство. Предположим неравенство (17_n) справедливым для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (24_{n+1}), (25) и предположения индукции, с учетом вытекающих из (5) равенств $\|x_\mu(2n+1)\| = \|U(\mu + b_{n+1})x_\mu(2n)\| = \|x_\mu(2n)\|$, выполняются оценки

$$\left|\ln\|x_\mu(2n+2)\| - S_{n+1}\right| = \left|\ln\frac{\|x_\mu(2n+2)\|}{\|x_\mu(2n+1)\|} + \ln\|x_\mu(2n)\| - (S_n + 2^{-2}(d_{n+1}^2 - d_{n+1}^{-2})\cos 2((n+1)\mu + \beta_{n+1}))\right| =$$
$$\left|\left(\ln\frac{\|x_\mu(2n+2)\|}{\|x_\mu(2n+1)\|} - \ln\|D_{n+1}z_{n+1}\|\right) + (\ln\|D_{n+1}z_{n+1}\| - 2^{-2}(d_{n+1}^2 - d_{n+1}^{-2})\cos 2((n+1)\mu + \beta_{n+1})) +\right.$$
$$\left.(\ln\|x_\mu(2n)\| - S_n)\right| \leq (n+1)d_{n+1}h_{n+1}^2 + d_{n+1}^4 h_{n+1}^2 + n(n+5)h_n^2 \max_{1\leq k\leq n} d_k^4 \leq$$
$$h_{n+1}^2\left(\max_{1\leq k\leq n+1} d_k^4\right)((n+1) + 5 + n(n+5)) \leq (n+1)(n+6)h_{n+1}^2 \max_{1\leq k\leq n+1} d_k^4.$$

Таким образом, справедливо соотношение (17_{n+1}). По индукции теорема 2 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках совместного белорусско-российского проекта Ф14Р-011.

Список использованной литературы

1. *Липницкий, А. В.* Оценки снизу старшего характеристического показателя в однопараметрических семействах систем Миллионщикова / А. В. Липницкий // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 2014. – Вып. 30. – С. 171–177.
2. *Липницкий, А. В.* О положительности старшего показателя Ляпунова в однопараметрических семействах линейных дифференциальных систем / А. В. Липницкий // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1095–1101.
3. *Миллионщиков, В. М.* Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами / В. М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4, № 3. – С. 391–396.
4. *Миллионщиков, В. М.* Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами / В. М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 11. – С. 1979–1983; 1974. – Т. 10, № 3. – С. 569.
5. *Липницкий, А. В.* О решении В. М. Миллионщиковым проблемы Еругина / А. В. Липницкий // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 1615–1620.
6. *Липницкий, А. В.* Оценки снизу нормы решений линейных дифференциальных систем с линейным параметром / А. В. Липницкий // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 412–416.
7. *Гайшун, И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем / И. В. Гайшун. – Минск, 1999.
8. *Изобов, Н. А.* Введение в теорию показателей Ляпунова / Н. А. Изобов. – Минск: БГУ, 2006. – 319 с.
9. *Пирс, Р.* Ассоциативные алгебры / Р. Пирс. – М.: Мир, 1986. – 543 с.
10. Математическая энцикл. – М., 1982. – Т. 1.
11. *Bullen, P. S.* A Dictionary of Inequalities. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics / P. S. Bullen. – Longman, Harlow, 1998. Vol. 97.

Поступило в редакцию 28.09.2015