Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **май–июнь** **Том 60 № 3**

УДК 517.977

Р. ГАБАСОВ[1], *Н. М. ДМИТРУК*[1], *член-корреспондент Ф. М. КИРИЛЛОВА*[2]

ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В ИНФОРМАЦИОННОМ КАНАЛЕ

[1]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
dmitrukn@bsu.by
[2]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
kirillova.f@yandex.by

Исследуется задача минимизации квадратичного функционала на траекториях группы линейных взаимосвязанных систем. Рассматривается случай, когда каждая система имеет свой локальный регулятор, и в несовершенном канале связи между ними присутствует запаздывание. Построена децентрализованная обратная связь, линейная по текущему состоянию и запаздывающей информации. Получены оценки субоптимальности децентрализованных управлений в рассматриваемой задаче.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача оптимального управления, обратная связь, децентрализованное управление.

R. GABASOV[1], *N. M. DMITRUK*[1], *F. M. KIRILLOVA*[2]

DISTRIBUTED CONTROL FOR A LINEAR-QUADRATIC PROBLEM SUBJECT TO A DELAY IN THE COMMUNICATION NETWORK

[1]*Belarussian State University, Minsk, Belarus*
dmitrukn@bsu.by
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
kirillova.f@yandex.by

This article deals with a linear-quadratic optimal control problem for a group of dynamically coupled systems. It is assumed that each system has its own local controller, and a delay is present in the communication network. A distributed feedback control, which is linear in current and delayed states, is constructed and a sub-optimality estimate for the distributed control is obtained.

Keywords: linear-quadratic optimal control problem, feedback, distributed control.

Введение. Управление большими группами взаимодействующих динамических систем – одно из актуальных направлений исследований современной теории управления. Такие объекты характеризуются, как правило, неполнотой информации о поведении агентов группы и отсутствием единого управляющего органа. Последнее обстоятельство требует применения децентрализованного (группового, распределенного) подхода [1–4], при котором функции управления распределяются между локальными управляющими органами (регуляторами) составляющих группу систем, самостоятельно определяющими действия своей системы с учетом доступной информации о поведении остальных агентов и общей групповой цели. Эффективность такого решения определяется возможностью адекватно учесть особенности механических и информационных взаимосвязей в группе, а также существенным снижением размерности решаемых в процессе управления задач по сравнению с задачей централизованного управления.

Цель работы – развить алгоритм децентрализованного управления, предложенный в [5; 6] для задачи терминального управления линейной взаимосвязной динамической системой, на линейно-квадратичную задачу оптимального управления. Здесь, в отличие от [5; 6], удается получить решение в замкнутой форме, т. е. построить управление типа обратной связи, установить его линейную зависимость от текущих и прошлых состояний объектов, и получить оценки субоптимальности по отношению к централизованному решению.

1. На промежутке времени $T=[0,t_f]$ рассмотрим q взаимосвязанных систем управления, поведение которых описывается линейными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum\nolimits_{j\in I_i} A_{ij} x_j + b_i u_i, \ \ x_i(0)=x_{i0}, \ \ i \in I = \{1,\ldots,q\}. \tag{1}$$

Здесь $x_i(t)\in R^{n_i}$ – состояние i-й системы в момент времени t; $u_i(t)\in R$ – значение скалярного управляющего воздействия системы i; $A_i = A_{ii}$, b_i, A_{ij}, $j\in I_i = I\setminus i$, – заданные матрицы и векторы соответствующих размерностей. Управляющее воздействие $u_i(t)$, $t\in T$, выбирается из класса $L_2(T)$, на его значения ограничения не накладываются.

Далее считается выполненным

П р е д п о л о ж е н и е. *Не вырождены все матрицы вида* $(B_i, AB_i,\ldots,A^{n-1}B_i)$, *где* $A=(A_{ij}, i,j\in I)$, B_i – i-й *столбец блочно-диагональной матрицы B, составленной из столбцов* b_i, $i\in I$.

Целью управления для каждой системы из (1) является ее перевод за время t_f в начало координат: $x_i(t_f)=0$; и минимизация квадратичного функционала $J_i(u_i)=\int_0^{t_f} u_i^2(t)dt$.

Далее рассматриваются два способа достижения поставленной цели: 1) оптимальное (централизованное) управление по принципу замкнутого контура и 2) оптимальное децентрализованное управление [5; 6].

2. При централизованном управлении управляющие воздействия вырабатываются для всех систем одним центральным регулятором. Тогда группа (1) трактуется как большая система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ \ x(0)=x_0, \tag{2}$$

где $x=(x_1^T,\ldots,x_q^T)^T$, $u=(u_1,\ldots,u_q)^T$.

Далее используются следующие обозначения: $F(t)$, $t\in T$, – фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения, соответствующего (2): $\dot{F}=AF$, $F(0)=E$;

$$G(\tau)=\int_\tau^{t_f} (F(t_f-t)B)(F(t_f-t)B)^T dt,$$

$$K(t,\tau) = -(F(t_f-t)B)^T G^{-1}(\tau)F(t_f-\tau), \ \ K(\tau)=K(\tau,\tau), \ \ t\in T(\tau)=[\tau,t_f], \ \ \tau<t_f,$$

где в силу предположения матрица $G(\tau)$ – неособая при любом $\tau<t_f$.

Для рассматриваемой линейно-квадратичной задачи

$$P(0,x_0): \ J^0(0,x_0)=\min\int_0^{t_f} \| u(t)\|^2\, dt, \qquad \dot{x}=Ax+Bu, \ \ x(0)=x_0, \ \ x(t_f)=0,$$

хорошо известна [7] оптимальная программа

$$u^0(t\,|\,0,x_0) = -(F(t_f-t)B)^T G^{-1}(0)F(t_f)x_0 = K(t,0)x_0, \ \ t\in T.$$

Соответственно, в задаче $P(\tau,x)$ для произвольной позиции (τ,x) решение имеет вид

$$u^0(t\,|\,\tau,x) = -(F(t_f-t)B)^T G^{-1}(\tau)F(t_f-\tau)x = K(t,\tau)x, \ \ t\in T(\tau), \tag{3}$$

что позволяет записать позиционное решение в виде линейной по состоянию обратной связи

$$u^0(\tau,x) = -(F(t_f-\tau)B)^T G^{-1}(\tau)F(t_f-\tau)x = K(\tau)x, \ \ 0\le\tau<t_f, \ \ x\in R^n.$$

В реальном процессе управления на объекты подается управляющее воздействие $u^*(\tau)=u^0(\tau,x^*(\tau))=K(\tau)x^*(\tau),\ 0\le\tau<t_f,$ которое будем называть реализацией централизованной оптимальной обратной связи. Здесь $x^*(\tau)=(x_1^*(\tau)^T,\dots,x_q^*(\tau)^T)^T$ – реализовавшееся в момент τ в конкретном процессе управления состояние группы реальных объектов, которое может отличаться от состояния $x(\tau)$ модели (2) в силу действующих на объект возмущений, неточностей математического моделирования и других неучтенных в (2) неопределенностей.

Как следует из вышесказанного, для реализации централизованной оптимальной обратной связи необходимо в каждый момент $\tau\in T$ получать полные и точные измерения состояния $x^*(\tau)$, а также иметь единый для всех систем управляющий орган (центральный регулятор). При управлении большими группами объектов эти предположения зачастую не выполняются. Здесь необходимо учитывать не только динамические, но и информационные связи между агентами, накладывающие ограничения на доступность информации о состояниях и запланированных действиях остальных участников группы. Кроме того, как правило, в таких группах каждый агент имеет собственный управляющий орган (локальный регулятор), который вырабатывает управляющие воздействия только для своего объекта. В такой ситуации организация управления группой называется децентрализованным управлением с обменом информацией.

3. Ниже исследуется случай, когда в канале обмена информацией между объектами присутствует постоянное запаздывание равное $\theta>0$. В результате в момент τ регулятору i становится известным текущее собственное состояние $x_i^*(\tau)$ и состояния остальных объектов $x_k^*(\tau-\theta),k\in I_i,$ в которых они находились в момент времени $\tau-\theta$.

В [5] предложен алгоритм децентрализованного управления группой линейных взаимосвязанных систем, целью управления которой является ее перевод на заданное терминальное множество и максимизация линейного терминального критерия качества. В применении к исследуемой в данном сообщении линейно-квадратичной задаче алгоритм [5] строит следующую реализацию децентрализованной обратной связи:

$$u_i^*(\tau)=u_i^d(\tau\,|\,\tau,x_i^*(\tau),x^*(\tau-\theta)),\ i\in I,\ 0\le\tau<t_f, \tag{4}$$

где $u_i^d(t\,|\,\tau,x_i^*(\tau),x^*(\tau-\theta)),\ t\in T(\tau),$ – решение локальной задачи оптимального управления:

$$\int_\tau^{t_f}u_i^2(t)dt\to\min_{u_i}, \tag{5}$$

$$\dot x_i=A_ix_i+\sum\nolimits_{j\in I_i}A_{ij}x_j+b_iu_i,\ \ \dot x_k=A_kx_k+\sum\nolimits_{j\in I_k}A_{kj}x_j+b_ku_k^d(t\,|\,\tau-\theta),\ k\in I_i,$$

$$x_i(\tau)=x_i^*(\tau),\ \ x_k(\tau)=x_k^d(\tau\,|\,\tau-\theta),\ \ k\in I_i,\ \ x(t_f)=0.$$

В (5) $u_k^d(t\,|\,\tau-\theta)=u_k^d(t\,|\,\tau-\theta,x_k^*(\tau-\theta),x^*(\tau-2\theta)),\ \ t\in T(\tau-\theta),$ – оптимальная программа, построенная k-м регулятором в момент $\tau-\theta;$ $x^d(\tau\,|\,\tau-\theta)=x(\tau\,|\,\tau-\theta,x^*(\tau-\theta),\ u^d(\cdot\,|\,\tau-\theta))$ – прогнозное состояние в текущий момент времени τ группы (1) с начальным состоянием $x(\tau-\theta)=x^*(\tau-\theta)$ и под действием управляющего воздействия $u^d(\cdot\,|\,\tau-\theta)=(u_k^d(\cdot\,|\,\tau-\theta),k\in I);$ $u_k^d(t\,|\,\tau-\theta)=u_k^d(t\,|\,0),\ x^d(\tau\,|\,\tau-\theta)=x^d(\tau\,|\,0)$ при $\tau<\theta$.

Следуя [6], нетрудно показать, что задача (5) эквивалентна следующей задаче оптимального управления:

$$\int_\tau^{t_f}u_i^2(t)dt\to\min_{u_i},$$

$$\dot x_i=A_ix_i+\sum\nolimits_{j\in I_i}A_{ij}x_j+b_iu_i,\ \dot x_k=A_kx_k+\sum\nolimits_{j\in I_k}A_{kj}x_j,\ k\in I_i, \tag{6}$$

$$x_i(\tau) = x_i^*(\tau), \;\; x_k(\tau) = 0, \;\; k \in I_i, \;\; x(t_f) = g_i(\tau),$$

где

$$g_i(\tau) = F_i(t_f - \tau)x_i^d(\tau \mid \tau - \theta) + \int_\tau^{t_f} F_i(t_f - t)b_i u_i^d(t \mid \tau - \theta)dt, \;\; F_i(t) = \begin{pmatrix} F_{1i}(t) \\ \dots \\ F_{qi}(t) \end{pmatrix},$$

$F_{ij}(t) \in R^{n_i \times n_j}$ – соответствующий блок матрицы $F(t)$.

Задача (6) – линейно-квадратичная задача оптимального управления. Ее решением, следуя [7], будет функция

$$u_i^d(t \mid \tau) = (F_i(t_f - t)b_i)^T G_i^{-1}(\tau)[g_i(\tau) - F_i(t_f - \tau)x_i^*(\tau)], \;\; t \in T(\tau),$$

где $G_i(\tau) = \int_\tau^{t_f} (F_i(t_f - t)b_i)(F_i(t_f - t)b_i)^T dt, \;\; 0 \le \tau < t_f,$ – неособая в силу предположения.

При численных экспериментах реализация децентрализованной обратной связи (4) на основе решений локальных задач (6) порождает переходный процесс, качество которого по сравнению с централизованным управлением можно считать удовлетворительным. Однако качественный анализ предложенной децентрализованной стратегии (например, построение для нее оценки субоптимальности), затруднен присутствием прошлых оптимальных программ $u_i^d(\cdot \mid \tau - \theta)$ во втором слагаемом $g_i(\tau)$. В [5; 6] локальные задачи оптимального управления решатся численными методами, и ни в какой момент времени, кроме начального, не известно централизованное решение. В рассматриваемой линейно-квадратичной задаче, напротив, для любой позиции известна оптимальная централизованная программа в виде (3), что целесообразно учесть при построении $g_i(\tau)$.

4. В задаче (6) заменим $g_i(\tau)$ на $g_i^0(\tau)$:

$$g_i^0(\tau) = F_i(t_f - \tau)x_i^d(\tau \mid \tau - \theta) + \int_\tau^{t_f} F_i(t_f - t)b_i u_i^0(t \mid \tau, x^d(\tau \mid \tau - \theta))dt, \tag{7}$$

где $u_i^0(t \mid \tau, x^d(\tau \mid \tau - \theta)), \; t \in T(\tau),$ – i-ая компонента оптимальной программы (3) для позиции $(\tau, \;\; (\tau \mid \tau - \theta))$, которая известна регуляторам всех систем в момент τ. Отметим, что $\sum_{i \in I} g_i^0(\tau) = x(t_f \mid \tau, x^d(\tau \mid \tau - \theta), u^0(\cdot \mid \tau, x^d(\tau \mid \tau - \theta)))$ и, поскольку $u^0(t \mid \tau, x^d(\tau \mid \tau - \theta)), \; t \in T(\tau),$ переводит систему (2) из $x^d(\tau \mid \tau - \theta)$ в начало координат, то $\sum_{i \in I} g_i^0(\tau) = 0$.

Подставим

$$u_i^0(t \mid \tau, x^d(\tau \mid \tau - \theta)) = -(F_i(t_f - t)b_i)^T G^{-1}(\tau)F(t_f - \tau)x^d(\tau \mid \tau - \theta), \;\; t \in T(\tau),$$

в (7), получим

$$g_i^0(\tau) = F_i(t_f - \tau)x_i^d(\tau \mid \tau - \theta) - \left[\int_\tau^{t_f} F_i(t_f - t)b_i(F_i(t_f - t)b_i)^T dt\right] G^{-1}(\tau)F(t_f - \tau)x^d(\tau \mid \tau - \theta) =$$
$$F_i(t_f - \tau)x_i^d(\tau \mid \tau - \theta) - G_i(\tau)G^{-1}(\tau)F(t_f - \tau)x^d(\tau \mid \tau - \theta).$$

Локальную задачу оптимального управления для i-го регулятора теперь сформулируем таким образом:

$$P_i(\tau, x_i^*(\tau), x^*(\tau - \theta)): \quad J_i^d(\tau) = \min_{u_i} \int_\tau^{t_f} u_i^2(t)dt, \tag{8}$$

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{j \in I_i} A_{ij} x_j + b_i u_i,\ \dot{x}_k = A_k x_k + \sum_{j \in I_k} A_{kj} x_j,\ k \in I_i,$$

$$x_i(\tau) = x_i^*(\tau),\ \ x_k(\tau) = 0,\ \ k \in I_i,\ \ x(t_f) = g_i^0(\tau).$$

Ее оптимальная программа находится по формуле

$$\begin{gathered} u_i^d(t\,|\,\tau) = (F_i(t_f - t)b_i)^T G_i^{-1}(\tau)[g_i^0(\tau) - F_i(t_f - \tau)x_i^*(\tau)] = \\ -(F_i(t_f - t)b_i)^T G^{-1}(\tau) F(t_f - \tau) x^d(\tau\,|\,\tau - \theta) - \\ (F_i(t_f - t)b_i)^T G_i^{-1}(\tau) F_i(t_f - \tau)[x_i^*(\tau) - x_i^d(\tau\,|\,\tau - \theta)] = \\ u_i^0(t\,|\,\tau, x^d(\tau\,|\,\tau-\theta)) - (F_i(t_f - t)b_i)^T G_i^{-1}(\tau) F_i(t_f - \tau)[x_i^*(\tau) - x_i^d(\tau\,|\,\tau - \theta)],\ t \in T(\tau). \end{gathered}$$

Пусть $k_i^0(t,\tau)^T = -(F_i(t_f - t)b_i)^T G_i^{-1}(\tau) F_i(t_f - \tau),\ \ t \in T(\tau),\ \ 0 \le \tau < t_f;\ k_i(t,\tau)^T$ – i-ая строка матрицы $K(t,\tau),\ i \in I.$ Тогда

$$u_i^d(t\,|\,\tau) = k_i(t,\tau)^T x^d(\tau\,|\,\tau-\theta) + k_i^0(t,\tau)^T [x_i^*(\tau) - x_i^d(\tau\,|\,\tau-\theta)],\ t \in T(\tau).$$

Из решений $u_i^d(\cdot\,|\,\tau),\ i \in I,$ составим агрегированную децентрализованную программу:

$$\begin{gathered} u^d(t\,|\,\tau) = (u_i^d(t\,|\,\tau), i \in I) = K(t,\tau)x^d(\tau\,|\,\tau-\theta) + K^0(t,\tau)[x^*(\tau) - x^d(\tau\,|\,\tau-\theta)] = \\ K^0(t,\tau)x^*(\tau) + [K(t,\tau) - K^0(t,\tau)]x^d(\tau\,|\,\tau-\theta),\ t \in T(\tau), \end{gathered} \tag{9}$$

где $K^0(t,\tau)$ – блочно-диагональная матрица, составленная из строк $k_i^0(t,\tau)^T,\ i \in I.$

Из (9) следует общий вид децентрализованной обратной связи, линейной по $\mathbf{z}_\tau = (x(\tau)^T, x(\tau-\theta)^T, \ldots, x(\tau - l\theta)^T)^T,\ l = \lceil t_f / \theta \rceil$:

$$u^d(\tau, z_\tau) = \mathbf{K}(\tau)\mathbf{z}_\tau,\ \mathbf{z}_\tau \in R^{nl},\ 0 \le \tau < t_f,$$

где $x(t) \equiv x_0,\ t < 0;\ \mathbf{K}(\tau) = (K^0(\tau), K^1(\tau), \ldots, K^l(\tau));$

$$K^s(\tau) = [K(\tau) - K^0(\tau)] \prod_{j=1}^{s-1} \Delta\Phi(\tau - (j-1)\theta, \tau - j\theta) \Phi^0(\tau - (s-1)\theta, \tau - s\theta),\ s = \overline{1,l};$$

$\Delta\Phi(t,\tau) = \Phi(t,\tau) - \Phi^0(t,\tau),$ где $\Phi(t,\tau),$ $\Phi^0(t,\tau),$ $t,\tau \in T,$ – решения уравнений $\partial\Phi(t,\tau)/\partial t = A\Phi(t,\tau) + BK(t,\tau),$ $\Phi(\tau,\tau) = E,$ и $\partial\Phi^0(t,\tau)/\partial t = A\Phi^0(t,\tau) + BK^0(t,\tau),$ $\Phi^0(\tau,\tau) = E,$ $t \ge \tau,$ соответственно; $\Phi(t,\tau) = \Phi(t,0),\ \Phi^0(t,\tau) = \Phi^0(t,0)$ при $\tau < 0.$

5. Покажем, что агрегированная децентрализованная программа (9) допустима и субоптимальна в централизованной задаче $P(\tau, x^*(\tau)).$

У т в е р ж д е н и е 1. *Для любых* τ *и текущего состояния* $x^*(\tau)$ *функция* $u^d(t\,|\,\tau),\ t \in T(\tau),$ *определенная по формуле (9), является программой задачи* $P(\tau, x^*(\tau)).$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, поскольку $u_i^d(t\,|\,\tau),\ t \in T(\tau),$ – оптимальная программа задачи (8), она переводит группу (8) в терминальный момент t_f в точку $g_i^0(\tau),$ что с использованием формулы Коши дает

$$g_i^0(\tau) = F_i(t_f - \tau)x_i^*(\tau) + \int_\tau^{t_f} F_i(t_f - t) b_i u_i^d(t\,|\,\tau)dt.$$

Суммируя последние равенства по всем системам $i \in I$, получим

$$\sum_{i\in I} g_i^0(\tau) = \sum_{i\in I}\left[F_i(t_f-\tau)x_i^*(\tau) + \int_\tau^{t_f} F_i(t_f-t)b_i u_i^d(t\,|\,\tau)dt\right] = x^d(t_f\,|\,\tau, x^*(\tau), u^d(\cdot\,|\,\tau)).$$

Выше было установлено, что $\sum_{i\in I} g_i^0(\tau)=0$, откуда следует $x^d(t_f\,|\,\tau, x^*(\tau), u^d(\cdot\,|\,\tau))=0$, т. е. $u^d(t\,|\,\tau)$, $t\in T(\tau)$, переводит систему (2) из точки $x^*(\tau)$ в начало координат. □

Поскольку (9) – программа задачи $P(\tau, x^*(\tau))$, имеет смысл сравнение значения $J^d(\tau)=\sum_{i\in I} J_i^d(\tau)$ критерия качества на (9) с оптимальным значением $J^0(\tau)=J^0(\tau, x^*(\tau))$.

Далее будем считать, что поведение реального объекта в некотором конкретном процессе управления описывается дифференциальным уравнением с возмущением

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + Bu^*(t) + dw^*(t),\ x(0)=x_0,$$

где $w^*(t)\in R$, $t\in T$, – реализовавшееся возмущение. Будем считать, что значения возможных возмущений ограничены: $|w^*(t)|\le w_{\max}$, $t\in T$.

У т в е р ж д е н и е 2. *Справедлива следующая оценка субоптимальности агрегированной децентрализованной программы (9) в задаче* $P(\tau, x^*(\tau))$:

$$J^d(\tau) - J^0(\tau) \le \lambda_{\max}(SQ(\tau))w_{\max}^2\theta,$$

где $\lambda_{\max}(SQ(\tau))$ *– максимальное собственное значение произведения матриц*

$$S=\int_0^\theta F(t)d(F(t)d)^T dt,\ Q(\tau)=\int_\tau^{t_f}(K(t,\tau)-K^0(t,\tau))^T(K(t,\tau)-K^0(t,\tau))dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем значение критерия качества на агрегированной децентрализованной программе (9):

$$J^d(\tau) = \int_\tau^{t_f}\|u^d(t\,|\,\tau)\|^2 dt = \int_\tau^{t_f}\|u^d(t\,|\,\tau) - u^0(t\,|\,\tau, x^*(\tau))\|^2 dt + \int_\tau^{t_f}\|u^0(t\,|\,\tau, x^*(\tau))\|^2 dt + 2\int_\tau^{t_f}(u^d(t\,|\,\tau) - u^0(t\,|\,\tau, x^*(\tau)))^T u^0(t\,|\,\tau, x^*(\tau))dt. \tag{10}$$

Известно [7], что в линейно-квадратичной задаче $P(\tau, x^*(\tau))$ оптимальная программа $u^0(\cdot\,|\,\tau, x^*(\tau))$ ортогональна разности $u(\cdot) - u^0(\cdot\,|\,\tau, x^*(\tau))$, где $u(\cdot)$ – любая другая программа. Поэтому последнее слагаемое в (10) равно нулю, и искомая разность значений критерия качества на агрегированной децентрализованной программе и оптимальной программе находится по формуле

$$J^d(\tau) - J^0(\tau) = \int_\tau^{t_f}\|u^d(t\,|\,\tau) - u^0(t\,|\,\tau, x^*(\tau))\|^2 dt = \|x^*(\tau) - x^d(\tau\,|\,\tau-\theta)\|_{Q(\tau)}^2.$$

Для вектора $z = x^*(\tau) - x^d(\tau\,|\,\tau-\theta) = \int_{\tau-\theta}^{\tau} F(\tau-t)dw^*(t)dt$ имеет место включение $z\in Z=\{z\in R^n : \|z\|_{S^{-1}}^2 \le w_{\max}^2\theta\}$. Тогда

$$J^d(\tau) - J^0(\tau) \le \max_{z\in Z}\|z\|_{Q(\tau)}^2 = \lambda_{\max}(SQ(\tau))w_{\max}^2\theta. \quad \square$$

При малых запаздываниях θ, с учетом вида матрицы $S(\tau)$, установим квадратичную зависимость оценки субоптимальности агрегированной программы в задаче $P(\tau, x^*(\tau))$ от величины запаздывания информации θ: $J^d(\tau) - J^0(\tau) \le C(\tau)w_{\max}^2\theta^2$.

Заключение. В сообщении построена децентрализованная обратная связь в задаче минимизации квадратичного функционала на траекториях группы линейных взаимосвязанных подсистем, в канале связи между которыми присутствует запаздывание.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф14МС-005).

Список использованной литературы

1. *Каляев, И. А.* Распределенные системы планирования действий коллективов роботов / И. А. Каляев, А. Р. Гайдук, С. Г. Капустян. – М.: «Янус-К», 2002.

2. Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions / P. D. Christofides [et al.] // Computers & Chemical Eng. – 2013. – Vol. 51. – P. 21–41.

3. *Куржанский, А. Б.* Задача управления групповым движением. Общие соотношения / А. Б. Куржанский // Докл. РАН. – 2009. – Т. 426, № 1. – С. 20–25.

4. *Куржанский, А. Б.* О задаче группового движения в условиях препятствий / А. Б. Куржанский // Тр. Ин-та матем. и механики *УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 166–179.*

5. Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов / Р. Габасов, Н. М. Дмитрук, Ф. М. Кириллова // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. – 2008. – Т. 48, № 4. – С. 593–609.

6. *Дмитрук, Н. М.* Оптимальное управление взаимосвязанными объектами / Н. М. Дмитрук // Динамика систем и процессы управления» – Екатеринбург: Институт матем. и механики УрО РАН, 2015. – С. 147–154.

7. *Красовский, Н. Н.* Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

Поступило в редакцию 04.11.2015