Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **май–июнь** **Том 60 № 3**

УДК 512.552

Академик В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

О ЦИКЛИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТНЫХ БАШНЯХ В ИНВОЛЮТИВНЫХ АЛГЕБРАХ С ДЕЛЕНИЕМ

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
yanch@im.bas-net.by

Целью сообщения является установление для широкого класса алгебр с делением с унитарными инволюциями достаточных условий для существования в них циклических инвариантных башен, что позволяет во многих случаях установить справедливость конгруэнц-теоремы для специальных гензелевых алгебр с делением.

Ключевые слова: алгебры с унитарными инволюциями, циклические алгебры с делением, вложения алгебр с инволюциями в циклические.

V. I. YANCHEVSKIĬ

CYCLIC INVARIANT TOWERS IN DIVISION ALGEBRAS WITH INVOLUTIONS

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
yanch@im.bas-net.by

The aim of this article is to obtain sufficient conditions for existence of cyclic invariant towers for a wide class of division algebras with unitary involutions. This gives us the opportunity to prove the congruence theorem for special Henselian division algebras.

Keywords: algebras with unitary involutions, cyclic division algebras, embedding algebras with involutions to cyclic ones.

Введение. Пусть k – поле характеристики отличной от 2, K / k – квадратичное расширение полей с нетривиальным k-автоморфизмом σ. Пусть также A – конечномерная центральная K-алгебра с делением и унитарной инволюцией τ, ограничение которой на K совпадает с σ. Тогда башня подполей в A

$$k = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_s$$

называется циклической инвариантной относительно τ, если выполнены следующие условия:

(i) $L_i \neq L_{i+1}$, $(i = 0, \ldots, s-1)$;

(ii) L_i / L_{i-1} – циклическое расширение полей;

(iii) ограничение τ на L_s тождественно;

(iv) композит L_s и K – максимальное подполе алгебры A.

Известно, что проблема существования циклической инвариантной башни положительно решается в случае глобального поля k (см. [1]). В общем случае эта проблема остаётся открытой. В этой работе мы рассматриваем случай алгебр A нечётного индекса, обладающих τ-инвариантным максимальным подполем, циклическим над центром K.

Основная часть. Для изложения основного результата приведём необходимые определения и обозначения.

Для расширения Галуа E / F ниже через $\mathrm{Gal}(E / F)$ обозначается группа Галуа этого расширения. Если L – подполе простой алгебры D, то ниже через $C_D(L)$ обозначается централизатор этого поля в D. Для алгебры D с автоморфизмом (антиавтоморфизмом) τ через D_τ обозначается подмножество элементов из D неподвижных относительно действия τ.

Существование циклической инвариантной относительно τ башни в K-алгебре с делением A, обладающей максимальным τ-инвариантным подполем Z, являющимся циклическим расширением K, устанавливается следующим утверждением.

Т е о р е м а 1. *В вышеприведенных обозначениях пусть A – алгебра нечётного индекса n, а m – произведение простых делителей n. Если примитивный корень ε_m из 1 степени m принадлежит k и A обладает максимальным τ-инвариантным подполем Z, являющимся циклическим расширением K, то в алгебре A имеется циклическая τ-инвариантная башня.*

Доказательство этой теоремы основано на рассмотрении группы Галуа $\mathrm{Gal}(Z / k)$ расширения Z / k. Ясно, что $\mathrm{Gal}(Z / k)$ порождается ограничением τ на Z (которое мы будем обозначать той же буквой) и образующей φ группы Галуа $\mathrm{Gal}(Z / K)$.

Л е м м а. *Пусть E / F – циклическое расширение Галуа степени $2n$, n – нечётное и τ – F-автоморфизм второго порядка поля E. Тогда поле неподвижных относительно τ элементов в E циклично над F.*

Доказательство очевидно.

П р е д л о ж е н и е. *Пусть* $\mathrm{Gal}(Z / K)$ *– группа нечётного порядка n ($n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_u^{\alpha_u}$ – представление в виде произведения взаимно простых примарных степеней), а* $\mathrm{Gal}(Z / k)$ *– обобщённая группа диэдра, т. е. $\tau\varphi\tau = \varphi^{-1}$. Пусть $m = p_1 \ldots p_u$ и $\varepsilon_m \in k$. Тогда A обладает циклической инвариантной относительно τ башней.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через a примитивный элемент расширения Z_τ / k. Нетрудно видеть, что он также примитивен для расширения Z / K. Для элемента Γ, индуцирующего внутренним образом автоморфизм, ограничение которого на Z совпадает с φ, будем иметь

$$\Gamma a \Gamma^{-1} = a^{\varphi}.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства τ, получим

$$\Gamma^{-\tau} a^{\tau} \Gamma^{\tau} = a^{\varphi\tau}.$$

Поскольку, ввиду $\tau\varphi\tau = \varphi^{-1}$, $\varphi\tau = \tau\varphi^{-1}$ и $a^{\tau} = a$, то будем иметь

$$\Gamma^{-\tau} a \Gamma^{\tau} = a^{\varphi^{-1}}.$$

Кроме того, заметим, что $a^{\varphi^{-1}} = \Gamma^{-1} a \Gamma$. Тогда окончательно получим

$$\Gamma^{-\tau} a \Gamma^{\tau} = \Gamma^{-1} a \Gamma.$$

Откуда немедленно следует, что элемент $\Gamma^{\tau-1}$ перестановочен со всеми элементами из поля Z. В силу максимальности Z заключаем, что $\Gamma^{\tau} = \Gamma z$ для подходящего $z \in Z$. Рассмотрим, наконец, элемент $Y = \Gamma + \Gamma^{\tau}$. Заметим, что $Y = \Gamma(z + 1)$, поэтому при условии $(z + 1) \neq 0$ автоморфизм i_Y при ограничении на Z индуцирует автоморфизм φ. В случае $z = -1$, можно заменить Γ на элемент $\sqrt{\alpha}\Gamma$, где $K = k(\sqrt{\alpha})$. Таким образом, можно считать Γ – неподвижным относительно τ элементом. Рассмотрим поле $k(\Gamma)$, состоящее, очевидно, из неподвижных относительно τ элементов. Заметим, что $\Gamma^n \in k$. В самом деле, автоморфизм i_{Γ^n} индуцирует на Z тождественное отображение, а также тождественно действует на Γ. Поскольку поле Z и элемент Γ порождают алгебру A, то $\Gamma^n \in K$, а ввиду $\Gamma^{\tau} = \Gamma$, $\Gamma^n \in k$. Положим $b = \Gamma^n$, рассмотрим следующую башню подполей расширения $k(\Gamma) / k$

$$k = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_u = k(\Gamma), \tag{1}$$

где $E_i = E_{i-1}(\sqrt[p_i^{\alpha_i}]{b})$, $i = 1, \ldots, u$. На каждом из этажей E_i / E_{i-1} рассмотрим башню подполей этого расширения

$$E_{i-1} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_{\alpha_i} = E_i, \tag{2}$$

где $F_j = F_0(\sqrt[p_i^j]{b})$, $j = 1, \ldots, \alpha_i$, F_j / F_{j-1} является куммеровым расширением степени p_i. Поскольку $\varepsilon_m \in k$, то F_j / F_{j-1} – циклическое расширение степени p_i. Уплотняя теперь последовательность (1) с помощью последовательностей (2), завершаем доказательство предложения.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Рассмотрим представление группы $\mathrm{Gal}(Z / K) = G_1 \times \ldots \times G_t$ в виде прямого произведения её силовских p_i-подгрупп G_i, $i = 1, \ldots, t$. При подходящей перенумерации можно считать, что $G_1, \ldots, G_s$ перестановочны с τ в $\mathrm{Gal}(Z / k)$, а $G_{s+1}, \ldots, G_t$ таковыми не являются. Пусть теперь H – подгруппа $\mathrm{Gal}(Z / k)$, порождённая группами $G_{s+1}, \ldots, G_t$ и τ. Нетрудно видеть, что H является обобщённой группой диэдра. Действительно, для всякой образующей φ_i группы G_i ($i = s + 1, \ldots, t$) ввиду примарности и нечётности её порядка группа является обобщённой группой диэдра, а тогда $\varphi_{s+1}\ldots\varphi_t$, являясь образующей группы H, удовлетворяет соотношению $\tau\varphi_{s+1}\ldots\varphi_t\tau = (\varphi_{s+1}\ldots\varphi_t)^{-1}$, что и требовалось. Обозначим через Z_H подполе инвариантов группы H в Z. Рассмотрим централизатор $C_A(Z_H)$. Ввиду предложения, применённого к $C_A(Z_H)$, заключаем, что существует циклическая инвариантная относительно τ башня для этого централизатора, начинающаяся с поля $(Z_H)_\tau$. Заметим, что по построению группа $\mathrm{Gal}(Z_H / k)$ – абелева, поэтому в силу леммы существует циклическая инвариантная относительно τ башня, начинающаяся с поля k и заканчивающаяся $(Z_H)_\tau$. Теперь уже ясно, что существует циклическая инвариантная относительно τ башня в алгебре A, проходящая через $(Z_H)_\tau$, что завершает доказательство теоремы 1.

Существование циклических инвариантных относительно τ башен позволяет во многих случаях установить справедливость унитарной конгруэнц-теоремы для гензелевых алгебр с делением и унитарными инволюциями. В этой работе мы остановимся на случае неразветвлённых алгебр.

Пусть k – гензелево поле, K / k – квадратичное сепарабельное расширение и D – центральная K-алгебра с делением нечётного индекса и унитарной K / k-инволюцией τ. Ниже через V_D и M_D соответственно обозначаются кольцо и идеал нормирования алгебры D, однозначно приходящего с нормирования поля k, а через $\overline{D}$, $\overline{K}$ и $\overline{k}$ алгебры вычетов D, K и k. Унитарная и специальная унитарная группы алгебры D определяются следующим образом:

$$U(D, \tau) = \{d \in D : d^\tau d = 1\},\ SU(D, \tau) = \{d \in U(D, \tau) : Nrd_D(d) = 1\},$$

где Nrd_D – отображение приведенной нормы алгебры D. Через $[U(D, \tau), U(D, \tau)]$ обозначается коммутант унитарной группы $U(D, \tau)$, а через $SUK_1^{an}(D,\tau)$ – факторгруппа $SU(D, \tau) / [U(D, \tau), U(D, \tau)]$, обычно называемая привиденной унитарной анизотропной группой Уайтхеда алгебры D относительно τ. В предыдущих обозначениях унитарная конгруэнц-теорема может быть сформулирована так.

К о н г р у э н ц - т е о р е м а. *Пусть, как и выше, D – алгебра с делением нечётного индекса. Тогда $(1+M_D)\bigcap SU(D,\tau)\subset[U(D,\tau),U(D,\tau)]$, где $(1 + M_D)$ – подгруппа элементов алгебры D вида $1 + m$, где $m \in M_D$.*

Значение конгруэнц-теоремы состоит в том, что она позволяет вычислять приведенные унитарные анизотропные группы Уайтхеда гензелевых алгебр с унитарными инволюциями в терминах алгебр вычетов $\overline{D}$. В случае неразветвлённых алгебр это немедленно приводит к изоморфизму групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$ и $SUK_1^{an}(\overline{D},\overline{\tau})$. В заключение заметим, что в некотором смысле приведенные выше в теореме 1 условия существования циклической инвариантной относительно τ башни носят достаточно общий характер ввиду следующего утверждения (см. [2])

Т е о р е м а 2. *Пусть A – центральная простая алгебра над полем K с унитарной инволюцией τ. Тогда существует регулярное расширение E / K, сохраняющее индексы центральных простых K-алгебр такое, что алгебра $A \otimes_K E$ – циклическая и обладает унитарной инволюцией, продолжающей τ.*

З а м е ч а н и е. *Таким образом, всякая алгебра A с унитарной инволюцией τ вкладывается (с сохранением индекса) в алгебру $A \otimes_K E$ с унитарной инволюцией, продолжающей τ. На самом деле в доказательстве теоремы 2 установлено существование в алгебре $A \otimes_K E$ инвариантного относительно инволюции максимального циклического подполя, что позволяет применять к этой алгебре теорему 1.*

Заключение. Установлено, что в циклических алгебрах с делением и унитарными инволюциями существуют циклические инвариантные относительно этих инволюций башни при условии, что максимальное циклическое подполе также инвариантно. Это позволяет для широкого класса гензелевых алгебр с делением установить справедливость конгруэнц-теоремы.

Автор благодарен А. А. Рыжкову за полезные обсуждения результатов.

Список использованной литературы

1. *Tikhonov, S. V.* Symmetric elements, Hermitian forms, and cyclic involutions / S. V. Tikhonov V. I. Yanchevskiĭ // Communications in Algebra. – 2015. – Vol. 43, N 11. – P. 4735–4744.

2. *Rehmann, U.* Prescribed behavior of central simple algebras after scalar extension / U. Rehmann, S. V. Tikhonov, V. I. Yanchevskiĭ // J. of Algebra. – 2012. – Vol. 351. – P. 279–293.

Поступило в редакцию 07.12.2015