Доклады Национальной академии наук Беларуси
2016 май–июнь Том 60 № 3

УДК 517.983

П. П. ЗАБРЕЙКО, А. В. МИХАЙЛОВ

О КОРРЕКТНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
zabreiko@mail.ru; artostby@mail.ru

В сообщении изучаются действующие в гильбертовом пространстве X некоторые классы несамосопряженных операторов, для которых справедливо утверждение теоремы М. А. Красносельского о сходимости последовательных приближений для уравнений с самосопряженными операторами в критическом случае. Для некоторых классов операторов в гильбертовом и банаховых пространствах изучаются также инвариантные подпространства, в которых утверждение теоремы М. А. Красносельского оказывается справедливым.

Ключевые слова: последовательные приближения, нормальные, квазинормальные, субнормальные и гипонормальные операторы в гильбертовом пространстве, корректные и *-корректные операторы в банаховых пространствах.

P. P. ZABREIKO, A. V. MIKHAILOV

CORRECTNESS OF SOME CLASSES OF NON SELF-ADJOINT OPERATORS

Belarusian State University, Minsk, Belarus
zabreiko@mail.ru; artostby@mail.ru

The article deals some classes of non self-adjoint operators acting in a Hilbert space X, for which the statement of the M.A. Krasnoselski theorem on the convergence of successive approximations for equations with self-adjoint operators in the critical case is true. For some classes of operators in Hilbert and Banach spaces, we also study invariant subspaces, in which the M.A. Krasnoselski theorem is to be valid.

Keywords: successive approximations, normal, quasinormal, subnormal and hyponormal operators on a Hilbert space, correct and *-correct operators in Banach spaces.

Настоящее сообщение является продолжением [1]. В нем рассмотрены задачи о возможности распространения результатов [1] на более широкие, чем класс нормальных операторов, классы операторов в гильбертовом пространстве X. Эти классы изучались с различных точек зрения многими авторами (см., напр., [2; 3]); наиболее подробно их теория изложена в [4–6].

1. Напомним основные определения. Пусть X – гильбертово пространство и A – действующий в X непрерывный линейный оператор. A^* – его сопряженный. Оператор A – называется корректным [7; 8], если последовательность операторов A^n $(n = 1, 2, ...)$ сильно сходится к некоторому линейному оператору P. Далее (см. [4]), оператор A называется нормальным, если $A^*A = AA^*$. Оператор A называется квазинормальным, если $AA^*A = A^*A^2$. Оператор A называется субнормальным, если он является сужением некоторого нормального оператора $\mathbf{A}$, действующего в некотором гильбертовом пространстве $\mathbf{X}$, $X \subseteq \mathbf{X}$. Оператор A называется гипонормальным, если $A^*A \geq AA^*$ (неравенство понимается в смысле обычной упорядоченности самосопряженных операторов; иными словами $A^*A \geq AA^*$ означает, что $A^*A - AA^*$ является положительно определенным самосопряженным оператором).

Все перечисленные выше классы операторов тесно связаны со свойствами полярных разложений этих операторов ([4; 9; 10]). Напомним, что каждый непрерывный линейный оператор A в гильбертовом пространстве X представим в виде

$$A = UB, \tag{1}$$

где B – положительно определенный самосопряженный оператор, определяемый равенством $B = \sqrt{A^*A}$, а U – частично изометрический оператор, т. е. такой непрерывный линейный оператор, что $UU^*U = U$, или, что тоже самое, непрерывный линейный оператор U в X, для которого существует также ортогональное разложение $X = X_0 \oplus X^0$, что $Ux = 0$ $(x \in X_0)$ и $\|Ux\| = \|x\|$ $(x \in X^0)$. Полярное разложение в общем случае неоднозначно; равенство (1) определяет U однозначно только на замыкании области значений $R(B)$ оператора B. Более точно, при $h \in R(B)$ справедливо равенство

$$Uh = Ax \quad (h = Bx),$$

а при $h \in \overline{R(B)} \setminus R(B)$ – равенство

$$Uh = \lim_{n\to\infty} Ah_n \quad (h = \lim_{n\to\infty} h_n, h_n \in R(B)).$$

На $R(B)^{\perp}$ значения оператора U могут выбраны произвольно, однако так, чтобы этот оператор был частичной изометрией. Если значения U выбрать на $R(B)^{\perp}$ нулевыми, то ядро $\ker U$ оператора U будет максимальным.

Нам понадобится ряд утверждений о некоторых свойствах обобщенно нормальных операторов. Почти все они доказаны в [4] (см. также [2; 10]).

Л е м м а 1. *Следующие свойства непрерывного линейного оператора A эквивалентны:*

(а) A – квазинормальный оператор;

(б) В любом полярном разложении (1) оператора A операторы U и B перестановочны;

(в) Существует полярное разложение оператора A, в котором U и B перестановочны и U является изометрией.

Л е м м а 2. *Справедливы следующие утверждения:*

(а) Каждый квазинормальный оператор A является субнормальным;

(б) Каждый субнормальный оператор A является гипонормальным.

Оба включения являются строгими.

2. Анализ свойства корректности квазинормальных операторов основывается на следующем утверждении.

Л е м м а 3. *Пусть A – гипонормальный оператор. Тогда справедливы включения* $\mathrm{Fix}\ A^* \subseteq \mathrm{Fix}\ A$ *и* $\mathrm{Fix}\ A \subseteq \mathrm{Fix}\ A^*A$.

Напомним, что гипонормальность оператора A означает справедливость неравенства $\|A^*x\| \le \|Ax\|$ $(x \in X)$. Поэтому первое из включений вытекает из цепочки соотношений

$$\|x - A^*x\|^2 = (x - A^*x, x - A^*x) = (x, x) - (x, A^*x) - (A^*x, x) + (A^*x, A^*x) =$$

$$(x, x) - (Ax, x) - (x, Ax) + (AA^*x, x) \le (x, x) - (x, Ax) - (Ax, x) + (A^*Ax, x) =$$

$$= (x - Ax, x - Ax) = \|x - Ax\|^2.$$

Далее, если $x = Ax$, то по доказанному и $x = A^*x$. Но тогда $x = A^*x = A^*(Ax) = A^*Ax$, т. е. верно и второе из включений.

Т е о р е м а 1. *Пусть A – квазинормальный оператор в гильбертовом пространстве X. Тогда для него следующие утверждения эквивалентны:*

(а) A корректный;

(б) A обладает полярным разложением $A = UB$, *в котором B – изометрический и коммутирует с B;*

(в) Fix $B \subseteq$ Fix A;

(г) Fix $A^*A \subseteq$ Fix A.

Тем самым, для квазинормального оператора полностью сохраняются приведенные в [1] утверждения теоремы М. А. Красносельского.

Из свойств (а)–(г) в этой теореме наиболее простыми являются, по-видимому, эквивалентные друг другу свойства (в) и (г). Нетрудно видеть, что они, в случае самосопряженного оператора A превращаются в условие, что –1 не является собственным значением оператора A. В дальнейшем именно это свойство будет использоваться как предположение, гарантирующее корректность квазинормального оператора.

3. Пусть $\mathbf{A}$ – некоторый нормальный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbf{X}$. Как показано в [1] все пространство $\mathbf{X}$ представимо в виде ортогональной суммы

$$\mathbf{X} = \mathrm{Fix}\,\mathbf{A} \oplus \mathbf{X}_\omega \oplus \mathbf{X}_0$$

трех инвариантных для $\mathbf{A}$ подпространств. Подпространство Fix $\mathbf{A}$ определяет множество этим $x \in \mathbf{X}$, для которого $x = \mathbf{A}x$. Подпространство $\mathbf{X}_\omega$ – ортогональное дополнение к Fix $\mathbf{A}$ в Fix $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}^*\mathbf{A}}$). Наконец, подпространство $\mathbf{X}_0$ – подпространство элементов $x \in \mathbf{X}$, для которых последовательность $\mathbf{A}^n x \to 0$ при $n \to \infty$. Основной результат [1] состоит в том, что равенство $\mathbf{X}_\omega = 0$ является необходимым и достаточным условием корректности $\mathbf{A}$. Нам понадобится более точное утверждение.

Л е м м а 4. *Пусть* $\mathbf{A}$ *– нормальный оператор в гильбертовом пространстве* $\mathbf{X}$ *и* L *– инвариантное для* $\mathbf{A}$ *подпространство. Тогда последовательность* A^n, *где* A *– сужение на* L *оператора* $\mathbf{A}$, *сильно сходится,*

(а) если и только если $L \subseteq \mathrm{Fix}\mathbf{A} \oplus X_0$ *или, что то же самое,* L *ортогонально* $\mathbf{X}_\omega$;

(б) если и только если из $\mathbf{B}x = x$; $x \in L$ *вытекает, что* $Ax = x$;

(в) если и только если из $A^*Ax = x$; $x \in L$ *вытекает, что* $Ax = x$.

Пусть теперь A: $X \to X$ – субнормальный оператор в гильбертовом пространстве X. Тогда его произвольное продолжение $\mathbf{A}$ на ортогональную сумму $\mathbf{X} = X \oplus H$ (H – некоторое гильбертово пространство), при котором пространство X останется инвариантным для продолжения $A: X \to X$, имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & S \\ 0 & T \end{pmatrix},$$

где S и T – линейные операторы, действующие соответственно из S в H и из H в H. Сопряженный к этому расширению имеет вид

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ S^* & T^* \end{pmatrix}.$$

Продолжение $\mathbf{A}$ является нормальным оператором, если и только если $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$, или, иначе,

$$\begin{pmatrix} A^* & 0 \\ S^* & T^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & S \\ 0 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*A & A^*S \\ S^*A & S^*S + T^*T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^* + SS^* & ST^* \\ TS^* & TT^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & S \\ 0 & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^* & 0 \\ S^* & T^* \end{pmatrix}.$$

Последние равенства можно переписать в виде системы

$$A^*A = AA^* + SS^*,\ T^*T + S^*S = TT^*,\ ST^* = A^*S,\ S^*A = TS^* \qquad (2)$$

(два последних равенства в (2) эквивалентны). Таким образом, верна

Л е м м а 5. *Действующий в гильбертовом пространстве X оператор A является субнормальным в том и только том случае, когда существует гильбертово пространство H и операторы $S\colon X \to H$ и $T\colon H \to H$, для которых справедливы равенства*

$$A^*A - AA^* = SS^*,\ \ TT^* - T^*T = S^*S,\ \ ST^* = A^*S. \tag{3}$$

Каждое из решений системы (3) определяет расширение $\mathbf{A}$ оператора A. Необходимым условием разрешимости системы (2) является гипонормальность оператора A, т. е. что самосопряженный оператор $A^*A - AA^*$ является неотрицательно определенным. Очевидно, это условие не является достаточным. В работе [11] Т. Андо нашел одно из решений системы (3) и, следовательно, одно из нормальных расширений $\mathbf{A}$ субнормального оператора A.

Нормальное расширение Андо $\mathbf{A}$ субнормального оператора A представимо в виде якобиевой матрицы в пространстве $\mathbf{X} = X \oplus H$ $(H = \mathbf{X}^\infty)$ вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & S_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_1 & S_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A_2 & S_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_3 & S_4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где операторы A_n, S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ определяются равенствами

$$S_0 = T_0 = 0,\ \ A_0 = A, \tag{4}$$

$$S_n = S_{n-1} + A_{n-1}^*A_{n-1} - A_{n-1}A_{n-1}^*,\ \ A_n = S_n^{\frac{1}{2}} A_{n-1} S_n^{-\frac{1}{2}}\ (n = 1,2,\ldots). \tag{5}$$

Эти равенства действительно определяют операторы A_n, S_n $(n = 1, 2, \ldots)$, так как по индукции можно показать, что операторы S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ являются положительно определенными операторами.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ S_1^* & A_1^* & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & S_2^* & A_2^* & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & S_3^* & A_3^* & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & S_4^* & A_4^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

и

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A^* & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ S_1^* & A_1^* & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & S_2^* & A_2^* & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & S_3^* & A_3^* & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & S_4^* & A_4^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & S_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_1 & S_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A_2 & S_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_3 & S_4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A^*A & A^*S_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ S_1^*A & S_1^*S_1 + A_1^*A_1 & A_1^*S_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & S_2^*A_1 & S_2^*S_2 + A_2^*A_2 & A_2^*S_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & S_3^*A_2 & S_2^*S_2 + A_2^*A_2 & A_3^*S_4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & S_4^*A_3 & S_2^*S_2 + A_2^*A_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{AA}^* = \begin{pmatrix} A & S_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_1 & S_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A_2 & S_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_3 & S_4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ S_1^* & A_1^* & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & S_2^* & A_2^* & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & S_3^* & A_3^* & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & S_4^* & A_4^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} AA^* + S_1S_1^* & S_1A_1^* & 0 & 0 & 0 & \dots \\ A_1S_1^* & A_1A_1^* + S_2S_2^* & S_2A_2^* & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_2S_2^* & A_2A_2^* + S_3S_3^* & S_3A_3^* & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A_3S_3^* & A_3A_3^* + S_4S_4^* & S_4A_4^* & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_4S_4^* & A_4A_4^* + S_5S_5^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Оператор **A** нормален в том и только том случае, когда $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{AA}^*$ или, иначе, когда выполняются равенства

$$S_nS_n^* + A_n^*A_n = A_nA_n^* + S_{n+1}S_{n+1}^*, \;\; A_n^*S_{n+1} = S_{n+1}A_{n+1}^* \; (n = 1, 2, \ldots).$$

Однако эти равенства непосредственно вытекают из определений (4), (5).

Из проведенных рассуждений вытекает еще одно утверждение Андо: *Если для оператора A, каждый* S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *положительно определенный, каждый* A_n *ограничен и* $S_{n+1}A_n = A_{n+1}S_{n+1}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *то A является субнормальным*.

Среди нормальных расширений с точностью до изоморфизма существует минимальное расширение. В общем случае расширение Андо не является минимальным. По крайней мере, для оператора взвешенного сдвига минимальное расширение было построено в работе [12].

Т е о р е м а 2. *Пусть A – субнормальный оператор в гильбертовом пространстве X. Тогда для него следующие утверждения эквивалентны:*

а) A корректный;

б) из $x \in \operatorname{Fix} A^*A$ *и* $Ax \in \operatorname{Fix} A^*A$ *вытекает* $x \in \operatorname{Fix} A$.

Для доказательства достаточно установить равенство $\operatorname{Fix} \mathbf{A}^*\mathbf{A} \cap X = \operatorname{Fix} A^*A \cap A(\operatorname{Fix} A^*A)$. Левая часть этого равенства состоит из $(x, 0) \in X$, для которых

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},$$

или, более подробно,

$$\begin{pmatrix} A^*A & A^*S \\ S^*A & S^*S+T^*T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*Ax \\ S^*Ax \end{pmatrix},$$

или, иными словами, для которых $A^*Ax = x$ и $S^*Ax = 0$. Равенство $A^*Ax = x$ означает, что $x \in \mathrm{Fix}\ A^*A$. Второе равенство $S^*Ax = 0$ влечет $SS^*Ax = 0$ и, далее, в силу первого равенства в (2), вытекает $(A^*A - AA^*)Ax = 0$ или $(A^*Ax = x)$ $A^*A(Ax) = Ax$, т. е. $Ax \in \mathrm{Fix}\ A^*A$.

Тем самым, и для субнормального оператора с незначительным изменением сохраняются приведенные в [1] утверждения теоремы М. А. Красносельского.

4. Аналог теорем 1, 2 для гипонормальных операторов, по-видимому, не имеет места.

Для произвольного оператора A в гильбертовом пространстве (тем более в банаховом пространстве) последовательность итераций (A^n) оператора, вообще говоря, не сходится ни в сильном, ни в слабом смысле. Конечно, можно рассматривать (см., напр., [13; 14]) линейное подпространство X_c элементов $x \in X$, на которых последовательность итераций $(A^n x)$ сходится. Это подпространство по определению инвариантно для оператора A. Однако в общем случае это линейное подпространство X_c замкнутым не является.

Однако в случае, если подпространство X_c для оператора A замкнуто, то можно от анализа исходного оператора A перейти к анализу сужения A_c этого оператора на подпространство X_c – это позволит исследовать поведение последовательных приближений $x_{n+1} = Ax_n + f$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ в частном случае, когда $x_0, f \in X_c$.

Это соображение приводит к задаче описания условий на оператор A, при выполнении которых подпространство X_c оказывается замкнутым, и о возможно более простом его описании. Ниже рассмотрены два случая, когда такое описание возможно.

Пусть A – оператор в гильбертовом пространстве X и $\rho(A) = 1$. В этом случае естественно рассмотреть инвариантное для A подпространство X_n, сужение A_n оператора A на которое является нормальным оператором. Очевидно, такое подпространство должно содержаться в $\ker(A^*A - AA^*)$. При этом $\ker(A^*A - AA^*)$ оказывается инвариантным для A подпространством, если для $x \in \ker(A^*A - AA^*)$ выполняется еще равенство $A^*A^2x = A^2A^*x$. В общем случае в качестве X_n можно взять подпространство $X_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \ker(A^*A^n - A^nA^*)$.

Для описания второго случая напомним несколько определений. Оператор называется нормалоидным, если $\|A^n\| = \|A\|^n$ при всех $n = 1,2,\ldots$. Оператор называется *-корректным, если нормы его итераций ограничены в совокупности. Классы нормалоидных и *-корректных операторов тесно связаны. Действительно, нормалоидный оператор A с $\|A\| = 1$ очевидным образом является *-корректным. Обратно, если оператор A *-корректный и $\rho(A) = 1$, то в пространстве X можно ввести эквивалентную норму, в которой все нормы итераций A^n $(n = 1,2,3,\ldots)$ равны 1. Эта норма определяется равенством

$$\|x\|_* = \sup_{s=0,1,2,\ldots} \|A^s x\|.$$

Она эквивалентна старой, так как $\|x\| \le \|x\|_* \le M\|x\|$ $(x \in X)$. Очевидно, $1 \le \|A^n\|$ при всех $n = 1,2,3,\ldots$. С другой стороны, при любом $x \in X$

$$\|A^n x\|_* = \sup_{s=0,1,2,\ldots} \|A^{n+s}x\| = \sup_{s=n,n+1,n+2,\ldots} \|A^s x\| \le \sup_{s=0,1,2,\ldots} \|A^s x\| = \|x\|_*,$$

откуда $\|A^n\| \le 1$. Таким образом, $\|A^n\| = 1$ при всех $n = 1,2,3,\ldots$.

Л е м м а 6. *Пусть оператор A с $\rho(A) = 1$ является *-корректным:* $\|A^n\| \le M$ $(n = 1,2,3,\ldots)$. *Тогда* $X_c = \{x : \exists \lim\limits_{n\to\infty} A^n x\}$ *– замкнутое линейное подпространство, инвариантное для A. Более того,* $X_c = \mathrm{Fix}\ A \oplus X_0$, *где* $\mathrm{Fix}\ A$ *– множество неподвижных точек A, а* $X_0 = \{x \in X : \lim\limits_{n\to\infty} A^n x\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность $x_n \in X_c$ сходится к $x_* \in X$. Тогда, в силу $\left\| A^N \right\| \le M$ $(n = 1,2,3,\dots)$,

$$\left\|(A^p - A^q)x_*\right\| \le \left\|(A^p - A^q)x_n\right\| + \left\|(A^p - A^q)(x_* - x_n)\right\| \le \left\|(A^p - A^q)x_n\right\| + 2M\left\|x_n - x_*\right\|$$

следует, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n выполняется неравенство

$$\left\|(A^p - A^q)x_*\right\| \le \left\|(A^p - A^q)x_n\right\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть такое n фиксировано. Так как $x_n \in X_c$, то существует такое $N > 0$, что при $p,q > N$ будет выполняться и неравенство

$$\left\|(A^p - A^q)x_*\right\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то последовательность $A^n x_*$ является фундаментальной, а значит и сходящейся. Тем самым, $x_* \in X_c$. Лемма доказана.

Геометрическая иллюстрация утверждений леммы 6 изображена на рис. 1.

Отметим, что в общем случае подпространство X_c не является дополняемым (примером может служить оператор левого сдвига S в пространстве $\ell_\infty = m$ ограниченных последовательностей – подпространство X_c в этом случае совпадает с пространством c сходящихся последовательностей, которое в m не дополняемо). Если в условиях леммы 6 оператор A с $\rho(A) = 1$ нормальный, то ортогональное дополнение $X_c^\perp$ является для оператора A инвариантным (рис. 2).

Непосредственно из леммы 6 следует

Т е о р е м а 3. *Пусть оператор A с $\rho(A) = 1$ действует в пространстве X и является *-корректным. Тогда его сужение на подпространство X_c является корректным оператором.*

Из теоремы 3 (см. [1]) вытекает, что для *-корректного оператора A с $\rho(A) = 1$ последовательные приближения $x_{n+1} = Ax_n + f$ $(n = 0,1,2,\dots)$ будут сходиться к решению x_* (если оно существует) уравнения $x = Ax + f$ при дополнительном предположении, что $x_0, f \in X_c$.

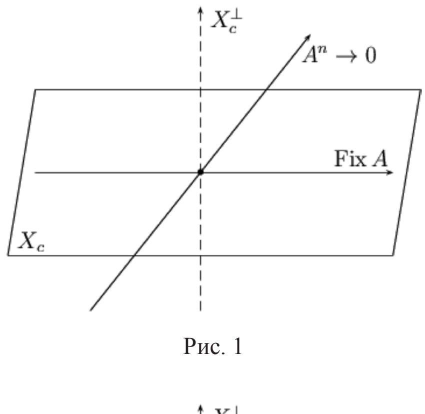

Рис. 1

Лемма 6 является аналогом одного из основных утверждений в классической эргодической теории [15], в которой вместо итераций A^n $(n = 0,1,2,\dots)$ рассматривается последовательность их средних $\dfrac{I + A + \dots + A^{n-1}}{n}$ $(n = 0,1,2,\dots)$. В случае, когда нормы этих средних ограничены: $\left\|\dfrac{I + A + \dots + A^{n-1}}{n}\right\| \le M$ $(n = 0,1,2,\dots)$, подпространство

$$X_{cc} = \left\{ x \in X : \exists \lim_{n\to\infty} \frac{I + A + \dots + A^{n-1}}{n} x \right\}$$

является замкнутым. При этом $x \in X_{cc}$, если и только если множество

$$\left\{ \frac{x + Ax + \dots + A^{n-1}x}{n} : n = 0,1,2,\dots \right\}$$

слабо компактно и, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A^n x}{n} = 0$.

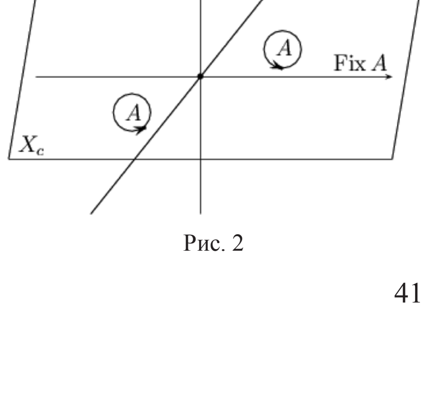

Рис. 2

В общем случае подпространства X_c и X_{cc} различны. В качестве примера можно рассмотреть в пространстве *m* оператор левостороннего сдвига *S*. Для этого оператора элемент $x=(1,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,\ldots)\in m$ принадлежит пространству X_{cc}, но не принадлежит пространству X_c. Иными словами, для этого случая справедливы соотношения $c=X_c\subset X_{cc}\subset m$.

Как в случае последовательности итераций данного оператора *A*, так и в случае последовательности средних этих итераций, важную роль играет частный случай, когда $X_c = X$ соответственно, $X_{cc}=X$. Определенные в этом случае в пространстве *X* ограниченные операторы

$$Px=\lim_{n\to\infty}A^n x,\quad Px=\lim_{n\to\infty}\frac{x+Ax+\ldots A^{n-1}x}{n}$$

(если первый оператор существует, то существует и второй, причем он совпадает с первым) являются коммутирующими с *A* проекторами на подпространство Fix *A*. Дополнительный проектор $Q=I-P$ является проектором на замыкание многообразия $(I-A)X$.

Теоремы о сходимости средних итераций эргодической теории можно рассматривать и как теоремы о чезаровской сходимости последовательных приближений. Аналогично можно рассматривать сходимость последовательных приближений и в других обобщенных смыслах (например, Пуассона–Абеля, Вороного, Бореля). Какие-либо значимые результаты в этом направлении авторам неизвестны.

Список использованной литературы

1. *Забрейко, П. П.* Об обобщении теоремы М. А. Красносельского на несамосопряженные операторы / П. П. Забрейко, А. В. Михайлов // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 16–21.
2. *Brown, A.* On a class of operators / A. Brown // Proc. Amar. Math. Soc. – 1953. – Vol. 4. – P. 723–728.
3. *Stampfli, J. G.* Hyponormal operators / J. G. Stampfli // Pacific J. Math. – 1962. – P. 1453–1458.
4. *Халмош, П.* Гильбертово пространство в задачах / П. Халмош. – М.: Мир, 1970. – С. 352.
5. *Conway, J. B.* The theory of subnormal operators / J. B. Conway. – SURV036, AMS, 1991. – P. 454.
6. *Martin, M.* Lectures on hyponormal operators / M. Martin, M. Putinar. – Birkhauser, 1989. – P. 294.
7. Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений / С. И. Ляшко [и др.]. – Москва; Санкт-Петербург; Киев: Диалектика, 2009. – С. 185.
8. Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements / D. A. Klyushin [et al.]. – Springer, 2012. – P. 202.
9. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Спектральная теория / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. – М.: Мир, 1966. – С. 1064.
10. *Рисс, Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: Мир, 1979. – С. 587.
11. *Ando, T.* Matrices of normal extensions of subnormal operators / T. Ando // Act. Sci. Math. – 1962. – P. 91–96.
12. *Stampfli, J. G.* Which weighted shifts are subnormal / J. G. Stampfli // P.: Jurnal. – 1966. – P. 367–379.
13. *Koliha, J. J.* Power convergence and pseudoinverses of operators in Banach spaces / J. J. Koliha // P.: Jurnal. – 1974. – P. 1–24.
14. *Забрейко, П. П.* Об области сходимости метода последовательных приближений для линейных уравнений / П. П. Забрейко // Докл. АН БССР. – 1985. – № 3. – С. 201–204; *Zabrejko, P. P.* Error estimates for successive approximations and spectral properties of linear operators / P. P. Zabrejko // Numerical Functional Analysis and Applications. – 1990. – N 7–8. – P. 823–838.
15. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. – М.: Изд. иност. лит., 1962. – С. 896.

Поступило в редакцию 06.01.2016