Доклады Национальной академии наук Беларуси
2016 май–июнь Том 60 № 3

*УДК 539.12*

*Е. М. ОВСИЮК*

# НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОПИСАНИЕ ДЛЯ ВЕКТОРНОЙ ЧАСТИЦЫ В РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ ДЕ СИТТЕРА

*(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)*

*Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь*
*e.ovsiyuk@mail.ru*

В расширяющемся пространстве–времени де Ситтера частица со спином 1 исследована в нерелятивистском приближении Паули. После разделения переменных в релятивистском уравнении Даффина–Кеммера–Петье в системе из 10 уравнений по переменным ($t$, $r$) выполнена процедура нерелятивистского приближения, в результате задача сведена к трем зацепляющимся дифференциальным уравнениям второго порядка. Требования диагонализации оператора пространственной четности позволяют разбить систему на (1 + 2) уравнений. Полученные уравнения четвертого порядка решаются с помощью метода факторизации, что позволяет свести задачу к анализу уравнений второго порядка. Таким способом уравнение Паули для частицы со спином 1 в расширяющейся Вселенной де Ситтера решено точно: получены три серии состояний и соответствующие им правила квантования спектрального параметра.

*Ключевые слова* расширяющаяся Вселенная де Ситтера, частица со спином 1, нерелятивистское приближение Паули.

*E. M. OVSIYUK*

## NON-RELATIVISTIC DESCRIPTION FOR A SPIN 1 PARTICLE IN EXPANDING DE SITTER UNIVERSE

*Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus*
*e.ovsiyuk@mail.ru*

For expanding de Sitter space-time, a spin 1 particle is investigated in the non-relativistic Pauli approximation. After separation of the variables in the relativistic Duffin–Kemmer–Petiau equation, the procedure of non-relativistic approach is performed for the system of 10 equations in the variables ($t$, $r$). As a result, the problem reduces to three second-order related differential equations. Requirement of diagonalization of the parity operator allows the system to be split into (1 + 2) subsystems. The fourth-order equations obtained are solved with the help of the factorization method, which permits the problem to be reduced to the analysis of second-order equations. In this way, the Pauli equation for a spin 1 particle in the expanding De Sitter universe is solved exactly: three series of states and the relevant rules of quantization of the spectral parameter are obtained.

*Keywords:* expanding de Sitter universe, particle with spin 1, non-relativistic Pauli approximation.

Известно [1; 2], что в космологических моделях Робертсона–Уолкера в релятивистском уравнении Даффина–Кеммера для поля со спином 1 можно осуществить переход к нерелятивистскому описанию, получив при этом уравнение типа Паули для частицы со спином 1, учитывающее нестационарность модели пространства. В настоящей работе этот вопрос исследуется более детально для случая расширяющейся модели де Ситтера. Построены точные решения уравнения Паули для векторной частицы в этом пространстве–времени.

Исходим из ранее найденной [3] релятивистской системы уравнений для 10 функций $f_A(t, r)$ (используем обозначение $\nu = \sqrt{j(j+1)/2}$):

$$M \cosh t f_1 + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{\tan r}\right) f_6 + \frac{\nu}{\sin r}(f_5 + f_7) = 0,$$

$$-\cosh t\left(\frac{\partial}{\partial t}f_5+Mf_2\right)-2\sinh t f_5+i\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tan r}\right)f_8+\frac{i\nu}{\sin r}f_9=0,$$

$$-\cosh t\left(\frac{\partial}{\partial t}f_6+Mf_3\right)-2\sinh t f_6+\frac{\nu}{\sin r}(-f_8+f_{10})=0,$$

$$-\cosh t\left(\frac{\partial}{\partial t}f_7+Mf_4\right)-2\sinh t f_7-i\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tan r}\right)f_{10}-\frac{i\nu}{\sin r}f_9=0,$$

$$\cosh t\left(\frac{\partial}{\partial t}f_2-Mf_5\right)+\sinh t f_2+\frac{\nu}{\sin r}f_1=0,$$

$$\cosh t\left(\frac{\partial}{\partial t}f_3-Mf_6\right)-\frac{\partial}{\partial r}f_1+\sinh t f_3=0,$$

$$\cosh t\left(\frac{\partial}{\partial t}f_4-Mf_7\right)+\sinh t f_4+\frac{\nu}{\sin r}f_1=0,$$

$$-M\cosh t f_8-i\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tan r}\right)f_2-\frac{i\nu}{\sin r}f_3=0,$$

$$-M\cosh t f_9+\frac{i\nu}{\sin r}(f_2-f_4)=0,$$

$$-M\cosh t f_{10}+i\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tan r}\right)f_4+\frac{i\nu}{\sin r}f_3=0.$$

Уравнения, не содержащие дифференцирования по времени, позволяют исключить динамические переменные; также перейдем к более симметричным:

$$f_2,f_3,f_4 \;-->\; \Phi_1,\Phi_2,\Phi_3, \qquad f_5,f_6,f_7 \;-->\; E_1,E_2,E_3.$$

В результате получаем (группируем уравнения по парам)

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\tanh t\right)ME_1-M^2\Phi_1+$$

$$\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tan r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tan r}\right)\Phi_1+\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tan r}\right)\frac{\nu}{\sin r}\Phi_2\right]-\frac{1}{\cosh^2 t}\frac{\nu^2}{\sin^2 r}(\Phi_1-\Phi_3)=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\tanh t\right)M\Phi_1-M^2E_1-\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\frac{\nu}{\sin r}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2}{\tan r}\right)E_2+\frac{\nu^2}{\sin^2 r}(E_1+E_3)\right]=0;$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\tanh t\right)ME_2-M^2\Phi_2-$$

$$\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\frac{\nu}{\sin r}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tan r}\right)(\Phi_1+\Phi_3)+\frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\Phi_2\right]=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\tanh t\right)M\Phi_2-M^2E_2+\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2}{\tan r}\right)E_2+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\nu}{\sin r}(E_1+E_3)\right]=0;$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\tanh t\right)ME_3-M^2\Phi_3+$$

$$\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tan r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tan r}\right)\Phi_3+\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tan r}\right)\frac{\nu}{\sin r}\Phi_2\right]+\frac{1}{\cosh^2 t}\frac{\nu^2}{\sin^2 r}(\Phi_1-\Phi_3)=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\tanh t\right)M\Phi_3-M^2E_3-\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\frac{\nu}{\sin r}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2}{\tan r}\right)E_2+\frac{\nu^2}{\sin^2 r}(E_1+E_3)\right]=0.$$

Выделим энергию покоя формальной заменой

$$\frac{\partial}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad(\frac{\partial}{\partial t}-iM);$$

кроме того, выделим во всех 6 функциях множитель $(\cosh t)^{-1}$; выполним также операции по упрощению уравнений. В результате находим

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\tanh t-iM\right)ME_1-M^2\Phi_1+$$

$$\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\Phi_1+\frac{\nu}{\sin r}\frac{\partial}{\partial r}\Phi_2-\frac{\nu^2}{\sin^2 r}(\Phi_1-\Phi_3)\right]=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-iM\right)M\Phi_1-M^2E_1-$$

$$\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\nu}{\sin r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2\nu\cos r}{\sin^2 r}\right)E_2+\frac{\nu^2}{\sin^2 r}(E_1+E_3)\right]=0; \tag{1}$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\tanh t-iM\right)ME_2-M^2\Phi_2-$$

$$\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\nu}{\sin r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu\cos r}{\sin^2 r}\right)(\Phi_1+\Phi_3)+\frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\Phi_2\right]=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-iM\right)M\Phi_2-M^2E_2+\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2}{\sin^2 r}\right)E_2+\right.$$

$$\left.\left(\frac{\nu}{\sin r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu\cos r}{\sin^2 r}\right)(E_1+E_3)\right]=0; \tag{2}$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\tanh t-iM\right)ME_3-M^2\Phi_3+$$

$$\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\Phi_3+\frac{\nu}{\sin r}\frac{\partial}{\partial r}\Phi_2+\frac{\nu^2}{\sin^2 r}(\Phi_1-\Phi_3)\right]=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-iM\right)M\Phi_3-M^2E_3-$$

$$\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\nu}{\sin r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2\nu\cos r}{\sin^2 r}\right)E_2+\frac{\nu^2}{\sin^2 r}(E_1+E_3)\right]=0. \tag{3}$$

Вводим большие и малые компоненты

$$\Phi_1=(\Psi_1+\psi_1),\quad E_1=-i(\Psi_1-\psi_1),$$

$$\Phi_2=(\Psi_2+\psi_2),\quad E_2=-i(\Psi_2-\psi_2),$$

$$\Phi_3=(\Psi_3+\psi_3),\quad E_3=-i(\Psi_3-\psi_3).$$

Рассматриваем пару уравнений (1):

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\tanh t\right)M(\Psi_1-\psi_1)-2M^2\psi_1+\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-1\right)(\Psi_1+\psi_1)+\right.$$

$$\left.\frac{\nu}{\sin r}\frac{\partial}{\partial r}(\Psi_2+\psi_2)-\frac{\nu^2}{\sin^2 r}(\Psi_1+\psi_1-\Psi_3-\psi_3)\right]=0,$$

$$-i\frac{\partial}{\partial t}M(\Psi_1+\psi_1)-2M^2\psi_1+\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\nu}{\sin r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2\nu\cos r}{\sin^2 r}\right)(\Psi_2-\psi_2)+\right.$$

$$\left.\frac{\nu^2}{\sin^2 r}(\Psi_1-\psi_1+\Psi_3-\psi_3)\right]=0.$$

Вычитаем из первого уравнения второе (учитываем, что $\psi_j$ – малые компоненты в сравнении с $\Psi_j$, поэтому в линейных комбинациях с числовыми коэффициентами $a\Psi_j+b\psi_j$ всегда можно пренебрегать малой компонентой $\psi_j$):

$$2Mi\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\tanh t\right)\Psi_1+$$

$$\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-1-\frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\right)\Psi_1-\frac{2\nu\cos r}{\sin^2 r}\Psi_2\right]=0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) содержит только большие компоненты – рассматриваем его как одно из уравнений в приближении Паули. Удобнее сразу же рассмотреть третью пару уравнений (3). Переходим в ней к большим и малым компонентам:

$$iM\left(\frac{\partial}{\partial t}+\tanh t\right)(\Psi_3-\psi_3)-2M^2\psi_3+\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-1\right)(\Psi_3+\psi_3)+\right.$$

$$\left.\frac{\nu}{\sin r}\frac{\partial}{\partial r}(\Psi_2+\psi_2)+\frac{\nu^2}{\sin^2 r}(\Psi_1+\psi_1-\Psi_3-\psi_3)\right]=0,$$

$$-iM\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_3+\psi_3)-2M^2\psi_3+$$

$$\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\nu}{\sin r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2\nu\cos r}{\sin^2 r}\right)(\Psi_2-\psi_2)+\frac{\nu^2}{\sin^2 r}(\Psi_1-\psi_1+\Psi_3-\psi_3)\right]=0.$$

Вычитаем из первого уравнения второе

$$2iM\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\tanh t\right)\Psi_3+$$

$$\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-1-\frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\right)\Psi_3-\frac{2\nu\cos r}{\sin^2 r}\Psi_2\right]=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) содержит только большие компоненты. Наконец, рассматриваем пару уравнений (2); она дает

$$iM\left(\frac{\partial}{\partial t}+\tanh t\right)(\Psi_2-\psi_2)-2M^2\psi_2-\frac{1}{\cosh^2 t}\times$$

$$\left[\left(\frac{\nu}{\sin r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu\cos r}{\sin^2 r}\right)(\Psi_1+\psi_1+\Psi_3+\psi_3)+\frac{2\nu^2}{\sin^2 r}(\Psi_2+\psi_2)\right]=0,$$

$$-iM\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_2+\psi_2)-2M^2\psi_2-\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2}{\sin^2 r}\right)\times\right.$$

$$\left.(\Psi_2-\psi_2)+\left(\frac{\nu}{\sin r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu\cos r}{\sin^2 r}\right)(\Psi_1-\psi_1+\Psi_3-\psi_3)\right]=0.$$

Вычитаем из первого уравнения второе

$$2iM\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\tanh t\right)\Psi_2+\frac{1}{\cosh^2 t}\times$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2}{\sin^2 r}-\frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\right)\Psi_2-\frac{2\nu\cos r}{\sin^2 r}(\Psi_1+\Psi_3)\right]=0.$$

Это уравнение является третьим в системе уравнений Паули.

Соберем вместе три уравнения для больших компонент в нерелятивистском приближении (учтем вынесенный ранее множитель $\cosh^{-1} t$)

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3}{2}\tanh t\right)\Psi_1=-\frac{1}{2M}\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-1-\frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\right)\Psi_1-\frac{2\nu\cos r}{\sin^2 r}\Psi_2\right],$$

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3}{2}\tanh t\right)\Psi_3=-\frac{1}{2M}\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-1-\frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\right)\Psi_3-\frac{2\nu\cos r}{\sin^2 r}\Psi_2\right],$$

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3}{2}\tanh t\right)\Psi_2=-\frac{1}{2M}\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2}{\sin^2 r}-\frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\right)\Psi_2-\frac{2\nu\cos r}{\sin^2 r}(\Psi_1+\Psi_3)\right].$$

В полученной системе уравнений учтем следствия диагонализации оператора пространственной инверсии:

$$P=(-1)^{j+1},\quad \Psi_2=0,\ \Psi_3=-\Psi_1;\qquad P=(-1)^j,\quad \Psi_3=+\Psi_1.$$

Для состояний с четностью

$$P=(-1)^{j+1},\quad \Psi_2=0,\ \Psi_3=-\Psi_1$$

получаем одно уравнение для одной функции $\Psi_1$ (с учетом условия связи $\Psi_3=-\Psi_1$):

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3}{2}\tanh t\right)\Psi_1=-\frac{1}{2M}\frac{1}{\cosh^2 t}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-1-\frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\right)\Psi_1.$$

Для состояний с четностью $P=(-1)^j$, $\Psi_3=+\Psi_1$ получаем систему из двух уравнений:

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3}{2}\tanh t\right)\Psi_1=-\frac{1}{2M}\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-1-\frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\right)\Psi_1-\frac{2\nu\cos r}{\sin^2 r}\Psi_2\right],$$

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3}{2}\tanh t\right)\Psi_2=-\frac{1}{2M}\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2}{\sin^2 r}-\frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\right)\Psi_2-\frac{2\nu\cos r}{\sin^2 r}2\Psi_1\right].$$

В полученных уравнениях удобно выделить простой временной множитель:

$$\Psi_j \Rightarrow \frac{1}{\cosh^{3/2} t}\Psi_j;$$

таким способом придаем уравнениям более простой вид:

$$P = (-1)^{j+1}, i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1 = -\frac{1}{2M}\frac{1}{\cosh^2 t}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r} - 1 - \frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\right)\Psi_1; \qquad (6)$$

$P = (-1)^j$,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1 = -\frac{1}{2M}\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r} - 1 - \frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\right)\Psi_1 - \frac{2\nu\cos r}{\sin^2 r}\Psi_2\right],$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_2 = -\frac{1}{2M}\frac{1}{\cosh^2 t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{\sin^2 r} - \frac{2\nu^2}{\sin^2 r}\right)\Psi_2 - \frac{4\nu\cos r}{\sin^2 r}\Psi_1\right]. \qquad (7)$$

В уравнениях (6) и (7) разделяем зависимость от временной и радиальных переменных подстановками $\Psi_1(t,r) = f(t) f_1(r)$, $\Psi_2(t,r) = f(t) f_2(r)$:

$$\frac{d}{dt}\ln f = -\frac{iE}{\cosh^2 t} \quad \Rightarrow \quad f(t) = e^{-iE\tanh t}.$$

Решения радиального уравнения, следующего из уравнения (6), строятся в гипергеометрических функциях (решения этого типа уравнений будут приведены ниже; это уравнение также решено в [4]). Анализ радиальной системы, вытекающей из (7),

$$\sin^2 r\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\tan r}\frac{d}{dr} - \frac{2\nu^2}{\sin^2 r} + 2ME\right) f_1 = (1 - \cos^2 r) f_1 + 2\nu\cos r\, f_2,$$

$$\sin^2 r\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\tan r}\frac{d}{dr} - \frac{2\nu^2}{\sin^2 r} + 2ME\right) f_2 = 4\nu\cos r\, f_1 + 2 f_2$$

представляет более сложную задачу. В этих двух уравнениях перейдем к переменной $x = \cos^2 r$:

$$\left[(1-x)4x\frac{d^2}{dx^2} + 2(1-4x)\frac{d}{dx} - 1 - \frac{2\nu^2}{1-x} + 2M\varepsilon\right] f_1 - \frac{2\nu\sqrt{x}}{1-x} f_2 = 0,$$

$$\left[(1-x)4x\frac{d^2}{dx^2} + 2(1-4x)\frac{d}{dx} - \frac{2}{1-x} - \frac{2\nu^2}{1-x} + 2M\varepsilon\right] f_2 - \frac{4\nu\sqrt{x}}{1-x} f_1 = 0. \qquad (8)$$

Из (8) получим уравнения четвертого порядка для функций $f_1$ и $f_2$:

$$x^2\frac{d^4 f_1}{dx^4} + \left[9x + 7 - \frac{7}{1-x}\right]\frac{d^3 f_1}{dx^3} + \left[19 - M\varepsilon + \frac{M\varepsilon + \nu^2 - 29}{1-x} + \frac{39 - 4\nu^2}{4(1-x)^2}\right]\frac{d^2 f_1}{dx^2} +$$

$$\left[\frac{1}{4x} + \frac{5M\varepsilon - 16}{2(1-x)} - \frac{10M\varepsilon + 6\nu^2 - 41}{4(1-x)^2} + \frac{3\nu^2 - 3}{2(1-x)^3}\right]\frac{df_1}{dx} +$$

$$\left[\frac{2M\varepsilon - 2\nu^2 - 1}{8x} + \frac{2M\varepsilon - 2\nu^2 - 1}{8(1-x)} + \frac{(2M\varepsilon - 1)^2 - 4\nu^2}{16(1-x)^2} - \right.$$

$$\left. \frac{(2M\varepsilon - 1)(\nu^2 - 1)}{4(1-x)^3} + \frac{\nu^2(\nu^2 - 1)}{4(1-x)^4}\right] f_1 = 0, \qquad (9)$$

$$x^2\frac{d^4f_2}{dx^4}+\left[9x+7-\frac{7}{1-x}\right]\frac{d^3f_2}{dx^3}+\left[19-M\varepsilon+\frac{M\varepsilon+\nu^2-29}{1-x}+\frac{39-4\nu^2}{4(1-x)^2}\right]\frac{d^2f_2}{dx^2}+$$
$$\left[\frac{1}{4x}+\frac{10M\varepsilon-31}{4(1-x)}-\frac{10M\varepsilon+6\nu^2-41}{4(1-x)^2}+\frac{3\nu^2-3}{2(1-x)^3}\right]\frac{df_2}{dx}+$$
$$\left[\frac{M\varepsilon-\nu^2-1}{4x}+\frac{M\varepsilon-\nu^2-1}{4(1-x)}+\frac{M\varepsilon(M\varepsilon-1)-\nu^2-1}{4(1-x)^2}-\right.$$
$$\left.\frac{(2M\varepsilon-1)(\nu^2-1)}{4(1-x)^3}+\frac{\nu^2(\nu^2-1)}{4(1-x)^4}\right]f_2=0. \tag{10}$$

Для решения уравнений (9) и (10) будем использовать метод факторизации, представив операторы четвертого порядка в виде произведения операторов второго порядка:

$$\hat{\Psi}_1f_1(x)=\hat{A}\hat{B}f_1(x)=0,\quad \text{пусть}\quad \hat{B}f_1(x)=0,$$
$$\hat{\Psi}_2f_2(x)=\hat{C}\hat{D}f_2(x)=0,\quad \text{пусть}\quad \hat{D}f_2(x)=0.$$

Сначала факторизуем оператор $\hat{\Psi}_1$:

$$\hat{\Psi}_1=\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{P_0}{x}+\frac{P_1}{1-x}\right)\frac{d}{dx}+\left(\frac{Q_0}{x}+\frac{Q_1}{1-x}+\frac{Q_2}{(1-x)^2}\right)\right]\times$$
$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{S_0}{x}+\frac{S_1}{1-x}\right)\frac{d}{dx}+\left(\frac{T_0}{x}+\frac{T_1}{1-x}+\frac{T_2}{(1-x)^2}\right)\right],$$

где

$$P_0=\frac{3}{2},\quad P_1=-\frac{9}{2},\quad S_0=\frac{1}{2},\quad S_1=-\frac{5}{2},$$
$$Q_0=\frac{2M\varepsilon-2\nu^2-13}{4},\quad Q_1=\frac{2M\varepsilon-2\nu^2-13}{4},\quad Q_2=\frac{6-\nu^2}{2},$$
$$T_0=\frac{2M\varepsilon-2\nu^2-1}{4},\quad T_1=\frac{2M\varepsilon-2\nu^2-1}{4},\quad T_2=\frac{1-\nu^2}{2}.$$

Таким образом, подкласс решений уравнения 4-го порядка (9) может быть построен так:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{3}{2x}-\frac{9}{2(1-x)}\right)\frac{d}{dx}+\frac{2M\varepsilon-2\nu^2-13}{4x}+\frac{2M\varepsilon-2\nu^2-13}{4(1-x)}+\frac{6-\nu^2}{2(1-x)^2}\right]f(x)=0\,,$$

где

$$f(x)=\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{1}{2x}-\frac{5}{2(1-x)}\right)\frac{d}{dx}+\frac{2M\varepsilon-2\nu^2-1}{4x}+\frac{2M\varepsilon-2\nu^2-1}{4(1-x)}+\frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2}\right]f_1(x)=0\,.$$

Рассмотрим уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{1}{2x}-\frac{5}{2(1-x)}\right)\frac{d}{dx}+\frac{2M\varepsilon-2\nu^2-1}{4x}+\frac{2M\varepsilon-2\nu^2-1}{4(1-x)}+\frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2}\right]f_1(x)=0.$$

Введем подстановку $f_1(x)=x^A(1-x)^BF_1(x)$:

$$x(1-x)\frac{d^2F_1}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}+2A-(2A+2B+3)x\right]\frac{dF_1}{dx}+$$

$$\left[\frac{M\varepsilon}{2}-\frac{(2A+2B+1)(2A+2B+3)}{4}+\frac{A(2A-1)}{2x}-\frac{\nu^2-(1+B)(1+2B)}{2(1-x)}\right]F_1=0.$$

При $A$, $B$, выбранных согласно

$$A=0,\frac{1}{2},\quad B=-\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{8\nu^2+1}=-\frac{3}{4}\pm\frac{2j+1}{4},$$

последнее уравнение упрощается

$$x(1-x)\frac{d^2F_1}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}+2A-(2A+2B+3)x\right]\frac{dF_1}{dx}-\left[-\frac{M\varepsilon}{2}+\frac{(2A+2B+1)(2A+2B+3)}{4}\right]F_1=0$$

и является уравнением гипергеометрического типа с параметрами

$$\alpha=A+B+1-\frac{1}{2}\sqrt{2M\varepsilon+1},\quad \beta=A+B+1+\frac{1}{2}\sqrt{2M\varepsilon+1},\quad \gamma=\frac{1}{2}+2A.$$

Чтобы решения были конечными в точках $r=0,\ \pi,$ нужно требовать положительности параметра $B$. Есть два разных решения.

$$\text{I.}\qquad A=0,\quad B=\frac{j-1}{2},\qquad f_1^{\mathrm{I}}=(1-x)^{(j-1)/2}F\left(\frac{j+1-\sqrt{2M\varepsilon+1}}{2},\frac{j+1+\sqrt{2M\varepsilon+1}}{2},\frac{1}{2},x\right);$$

условие квантования $\alpha=-n$ дает

$$\text{I.}\qquad 2M\varepsilon+1=(2n+j+1)^2. \tag{11}$$

Для второго класса решений имеем:

$$\text{II.}\quad A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{j-1}{2},\qquad f_1^{\mathrm{II}}=\sqrt{x}(1-x)^{(j-1)/2}F\left(\frac{j+2-\sqrt{2M\varepsilon+1}}{2},\frac{j+2+\sqrt{2M\varepsilon+1}}{2},\frac{3}{2},x\right);$$

условие квантования $\alpha=-n$ дает

$$\text{II.}\qquad 2M\varepsilon+1=(2n+j+2)^2. \tag{12}$$

Теперь факторизуем оператор $\hat{\Psi}_2$:

$$\hat{\Psi}_2=\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{p_0}{x}+\frac{p_1}{1-x}\right)\frac{d}{dx}+\left(\frac{q_0}{x}+\frac{q_1}{1-x}+\frac{q_2}{(1-x)^2}\right)\right]\times$$
$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{s_0}{x}+\frac{s_1}{1-x}\right)\frac{d}{dx}+\left(\frac{t_0}{x}+\frac{t_1}{1-x}+\frac{t_2}{(1-x)^2}\right)\right],$$

где

$$p_0=\frac{3}{2},\quad p_1=-\frac{9}{2},\quad s_0=\frac{1}{2},\quad s_1=-\frac{5}{2},$$
$$q_0=\frac{M\varepsilon-\nu^2-6}{2},\quad q_1=\frac{M\varepsilon-\nu^2-6}{2},\quad q_2=\frac{6-\nu^2}{2},$$
$$t_0=\frac{M\varepsilon-\nu^2-1}{2},\quad t_1=\frac{M\varepsilon-\nu^2-1}{2},\quad t_2=\frac{1-\nu^2}{2}.$$

Таким образом, подкласс решений уравнения 4-го порядка (10) может быть построен так:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{3}{2x}-\frac{9}{2(1-x)}\right)\frac{d}{dx}+\frac{M\varepsilon-\nu^2-6}{2x}+\frac{M\varepsilon-\nu^2-6}{2(1-x)}+\frac{6-\nu^2}{2(1-x)^2}\right]g(x)=0,$$

где

$$g(x)=\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{1}{2x}-\frac{5}{2(1-x)}\right)\frac{d}{dx}+\frac{M\varepsilon-\nu^2-1}{2x}+\frac{M\varepsilon-\nu^2-1}{2(1-x)}+\frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2}\right]f_2(x).$$

Рассмотрим уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{1}{2x}-\frac{5}{2(1-x)}\right)\frac{d}{dx}+\frac{M\varepsilon-\nu^2-1}{2x}+\frac{M\varepsilon-\nu^2-1}{2(1-x)}+\frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2}\right]f_2(x)=0.$$

Получим решение уравнения (12) в гипергеометрических функциях. Для этого введем подстановку $f_2(x)=x^a(1-x)^bF_2(x)$. При $a$, $b$, выбранных согласно

$$a=0,\frac{1}{2},\quad b=-\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{8\nu^2+1}=-\frac{3}{4}\pm\frac{2j+1}{4},$$

для $F_2(x)$ имеем уравнение гипергеометрического типа с параметрами

$$\alpha'=a+b+1-\frac{1}{2}\sqrt{2M\varepsilon},\quad \beta'=a+b+1+\frac{1}{2}\sqrt{2M\varepsilon},\quad \gamma'=\frac{1}{2}+2a.$$

Чтобы решения были конечными в точках $r=0,\ \pi,$ нужно требовать положительности параметра $b$. Есть два разных решения:

$$\text{III.}\quad a=0,\quad b=\frac{j-1}{2},\qquad f_2^{\text{III}}=(1-x)^{(j-1)/2}F\left(\frac{j+1-\sqrt{2M\varepsilon}}{2},\frac{j+1+\sqrt{2M\varepsilon}}{2},\frac{1}{2},x\right),$$

условие квантования $\alpha'=-n$ дает:

$$\text{III.}\qquad 2M\varepsilon=(2n+j+1)^2\,. \tag{13}$$

И решения еще одного типа

$$\text{IV.}\qquad a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{j-1}{2}, f_2^{\text{IV}}=\sqrt{x}(1-x)^{(j-1)/2}F\left(\frac{j+2-\sqrt{2M\varepsilon}}{2},\frac{j+2+\sqrt{2M\varepsilon}}{2},\frac{3}{2},x\right),$$

условие квантования $\alpha'=-n$ дает

$$\text{IV.}\quad 2M\varepsilon=(2n+j+2)^2. \tag{14}$$

Таким образом, построены четыре типа решений: (11)–(14). Спектры I и III совпадают, аналогично совпадают спектры II и IV. Это означает, что речь идет об одних и тех же квантовых состояниях. Их внешне разное описание связано с использованием в качестве основной разных функций: $f_1$ и $f_2$.

Результаты работы могут быть обобщены и на случай осциллирующей модели де Ситтера.

## Список использованной литературы


1. Duffin–Kemmer–Petiau formalism reexamined: non-relativistic approximation for spin 0 and spin 1 particles in a Riemannian space-time / A. A. Bogush [et al.] // Annales de la Fondation Louis de Broglie. – 2007. – Vol. 32, N 2–3. – P. 355–381.

2. *Редьков, В. М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 495 с.

3. Квантовая механика в космологических моделях де Ситтера / О. В. Веко [и др.]. – Минск: Белорусская наука, 2016. – 560 с.

4. *Redkov, V. M.* Quantum mechanics in spaces of constant curvature / V. M. Redkov, E. M. Ovsiyuk. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2012. – 434 p.


*Поступило в редакцию 24.02.2016*