

УДК 533.951; 537.872.3

*В. И. АРХИПЕНКО<sup>1</sup>, Е. З. ГУСАКОВ<sup>2</sup>, Л. В. СИМОНЧИК<sup>1</sup>, А. В. ТОМОВ<sup>3</sup>,  
Ф. М. ТРУХАЧЕВ<sup>4</sup>, И. А. ЧЕРКАСОВА<sup>4</sup>*

### **ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ МОД АБСОЛЮТНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РАСПАДНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ НА НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ**

*(Представлено академиком В. С. Бураковым)*

<sup>1</sup>*Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
arkhip@imaph.bas-net.by; l.simonchik@ifanbel.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Физико-технический институт РАН, Санкт-Петербург, Россия  
Evgeniy.Gusakov@mail.ioffe.ru*

<sup>3</sup>*Могилевский государственный университет, Могилев, Беларусь  
alextom@yandex.ru*

<sup>4</sup>*Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь  
ftru@mail.ru; cherkasova.ir.an@gmail.com*

Создана математическая модель, описывающая нелинейную абсолютную параметрическую неустойчивость в неоднородной плазме. Подробно рассмотрен распад ленгмюровской волны накачки на ленгмюровскую и ионно-звуковую волны. Получены численные решения, описывающие собственные моды неустойчивости. Показано, что в нелинейной стадии неустойчивости наблюдается истощение накачки и уширение спектра ионно-звуковой волны. Результаты численных расчетов согласуются с экспериментальными результатами.

*Ключевые слова:* параметрическая неустойчивость, распадные условия, собственные моды неустойчивости, неоднородная плазма, ленгмюровская волна.

*V. I. ARKHIPENKO<sup>1</sup>, E. Z. GUSAKOV<sup>2</sup>, L. V. SIMONCHIK<sup>1</sup>, A. V. TOMOV<sup>3</sup>, F. M. TRUHACHEV<sup>4</sup>, I. A. CHERKASOVA<sup>4</sup>*

### **NUMERICAL SOLUTIONS FOR THE EIGEN MODES OF THE ABSOLUTE DECAY PARAMETRIC INSTABILITY OF INHOMOGENEOUS PLASMA AT THE NONLINEAR STAGE**

<sup>1</sup>*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
arkhip@imaph.bas-net.by; l.simonchik@ifanbel.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Physical-Technical Institute of Russian Academy of Sciences, St-Petersburg, Russia  
Evgeniy.Gusakov@mail.ioffe.ru*

<sup>3</sup>*Mogilev State University, Mogilev, Belarus  
alextom@yandex.ru*

<sup>4</sup>*Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus  
ftru@mail.ru; cherkasova.ir.an@gmail.com*

A mathematical model for the nonlinear absolute decay parametric instability of inhomogeneous plasma is developed. Decay of the Langmuir pump wave on the Langmuir and ion-acoustic waves is considered in detail. The numerical solutions describing the eigen modes of the instability are obtained. It is shown that at the nonlinear stage of the instability, a depletion of a pump wave and a broadening of an ion-acoustic wave spectrum are observed. The simulation results are in agreement with the experimental ones.

*Keywords:* parametric instability, decay conditions, eigenmodes of instability, inhomogeneous plasma, Langmuir wave.

**Введение.** Параметрические распадные неустойчивости играют важную роль в динамике плазмы. В частности, они могут существенно влиять на процесс нагрева плазмы электромагнитным излучением. Зачастую параметрические распадные неустойчивости приводят к аномальному отражению греющей мощности и, следовательно, к уменьшению эффективности нагрева. В некоторых случаях, напротив, неустойчивости могут выступать в роли посредника при пере-

даче энергии в отдельные области плазмы. Можно выделить два режима неустойчивости в неоднородной плазме: конвективный и абсолютный. Конвективный режим представляет собой параметрическое усиление собственных плазменных шумов. Режим абсолютной неустойчивости реализуется на базе конвективного усиления при возникновении положительной обратной связи и характеризуется экспоненциальным нарастанием плазменных шумов во времени. Как правило, абсолютная неустойчивость обладает узким частотным спектром и насыщается за счет нелинейных волновых процессов, причем на практике это часто приводит к истощению греющей волны (волны накачки).

Теория конвективной параметрической распадной неустойчивости неоднородной плазмы была развита в 1970-е годы в работах А. Д. Пилюя и учеников. В [1] построена нестационарная теория конвективной параметрической распадной неустойчивости в неоднородной плазме в предположении заданной волны накачки. Задача решена для двух связанных волновых уравнений, описывающих две дочерние волны. В двухволновой постановке задачи наблюдается рост амплитуды дочерних волн по экспоненциальному закону, ограниченный только выносом энергии из точки распада дочерними волнами. В результате был определен инкремент начального роста неустойчивости и уровень его насыщения за счет конвективного выноса энергии, определяющий значение коэффициента конвективного усиления. Однако на практике часто часть энергии, вынесенной из области распада, возвращается и при этом возбуждается абсолютная неустойчивость. Теоретическая модель абсолютной параметрической неустойчивости, в которой такое возвращение энергии происходит из-за модуляции фазы взаимодействующих волн длинноволновой турбулентностью, была предложена в [2], где был получен ряд частных решений для собственных мод. Тем не менее, анализ насыщения неустойчивости на нелинейной стадии в [2] не проводился. Необходимо отметить также, что исчерпывающей нелинейной теории насыщения абсолютных параметрических распадных неустойчивостей на сегодняшний момент не существует. Одним из нелинейных механизмов насыщения роста амплитуд дочерних волн является истощение волны накачки. В [3] представлен анализ влияния этого механизма на конвективную параметрическую неустойчивость в трехволновой постановке задачи. К уравнениям для дочерних волн добавлено уравнение для волны накачки конечной амплитуды. Показано, что при достижении определенного порога по амплитудам дочерних волн наблюдается истощение накачки, а рост амплитуд дочерних волн насыщается. Аналитические решения являются асимптотическими и не описывают эволюцию волн в окрестности точки распада. Тем не менее, аналитических решений нелинейной задачи, описывающей абсолютную неустойчивость при конечной мощности накачки, к настоящему времени не существует. С другой стороны, для корректной интерпретации многих экспериментальных данных [4; 5] требуется именно нелинейная модель абсолютной параметрической неустойчивости.

В настоящей работе создана математическая модель, описывающая нелинейную абсолютную параметрическую неустойчивость в неоднородной плазме, а также получены численные решения, описывающие собственные моды неустойчивости.

**Теоретическая модель.** Рассмотрим одномерную задачу воздействия электромагнитного излучения на пространственно-неоднородную плазму. Электрическое поле волны накачки вызывает модуляцию параметров плазмы. Если амплитуда волны превышает некоторое пороговое значение, то происходит раскачка собственных колебаний плазмы, частоты, волновые вектора которых связаны с соответствующими величинами волны накачки условиями параметрического резонанса:  $k_0 = k_1 + k_2$ ,  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ , где  $k_j$ ,  $\omega_j$  – проекции волновых векторов взаимодействующих волн на направление неоднородности и их частоты. Положим  $j = 0$  для ленгмюровской волны накачки,  $j = 1, j = 2$  для дочерних волн – ленгмюровской и ионно-звуковой соответственно. Описать взаимодействие волн можно посредством трех волновых уравнений согласно [2]:

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} + v_1 a_1 = i\gamma_0 a_0 a_2^* e^{i\Phi(x,t)}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} - v_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + v_2 a_2 = i\gamma_0 a_0 a_1^* e^{i\Phi(x,t)} + S_2(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial t} - v_1 \frac{\partial a_0}{\partial x} + v_1 a_0 = i \gamma_0 a_1 a_2 e^{-i\Phi(x,t)}, \quad (3)$$

где  $a_0, a_1, a_2, v_1, v_2$  – комплексные амплитуды и скорости взаимодействующих волн ( $v_0 = v_1$ ),  $v_1, v_2$  – коэффициенты затухания волн;  $\gamma_0$  – инкремент неустойчивости в однородной плазме. Символ «\*» обозначает комплексное сопряжение. Для моделирования фоновых ионно-звуковых шумов в уравнение (2) введена функция  $S_2(x)$ . Функция  $\Phi(x, t) = x^2 / 2\ell^2$  характеризует набег фаз, связанный с неоднородностью плазмы в окрестности области параметрического резонанса;

$\ell = \left| \frac{d}{dx}(k_1 - k_0 - k_2) \right|_{x=x_0}^{-1/2}$  – масштаб неоднородности плазмы. При решении системы (1)–(3) удобно использовать безразмерные величины  $t = t v_1 / \ell, v_2 = v_2 / v_1, x = x / \ell$ . Уравнения (1)–(3), описывающие нелинейную конвективную неустойчивость [3], легко обобщить на случай абсолютной неустойчивости, модифицировав, в соответствии с [2], выражение для набег фаз

$$\Phi(x, t) = \frac{x^2}{2\ell^2} + \frac{K}{\chi} \cos(kx), \quad (4)$$

где  $\chi$  определяет размер петли обратной связи, а  $K$  – глубину обратной связи. Решение системы (1)–(3) с учетом (4) отражает эволюцию волн, участвующих во взаимодействии, и позволяет найти основные параметры абсолютной неустойчивости, в частности инкремент. Аналитические решения рассматриваемой системы к настоящему времени неизвестны, поэтому численное ее интегрирование будет уместным и полезным.

Все вычисления проведем в рамках прямой конечно-разностной схемы с учетом критерия сходимости Куранта–Фридрихса–Леви. Точку параметрического резонанса поместим около центра пространственной области интегрирования, а источник накачки – около правой границы так, чтобы накачка распространялась к центру. Будем считать, что волны, дошедшие до границ области интегрирования, затухают. Начальные условия зададим в виде ионно-звуковой волны  $a_2(x)$  на собственных частотах неустойчивости. В простейшем случае  $a_2(x)$  можно представить в виде гармонической функции

$$a_2(x) = a_{02} \exp\left(ix \frac{\omega_n}{v_2}\right). \quad (5)$$

Здесь  $\omega_n = (2\pi n + \delta\phi) / \alpha\chi$  – частота  $n$ -й собственной моды [3],  $\alpha = 1 - v_1 / v_2$ ;  $a_{02}$  – начальная амплитуда ионно-звуковой волны;  $\delta\phi$  – малая добавка, которой можно пренебречь [3].

Найдем далее положение параметрического резонанса для различных собственных мод. Частоты дочерних волн определим согласно:  $\omega_1 = \omega_{01} + \omega_n, \omega_2 = \omega_{02} + \omega_n$ , где  $\omega_{01}, \omega_{02}$  – частоты дочерних волн для основной моды. Тогда

$$\begin{aligned} k_1 &= (\omega_{01} + \omega_n) / v_1 = k_{01} + k'_1, \\ k_2 &= (\omega_{02} + \omega_n) / v_2 = k_{02} + k'_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $k_{01}, k_{02}$  – волновые числа дочерних волн для основной моды. Резонансное условие для собственных мод можно записать в виде

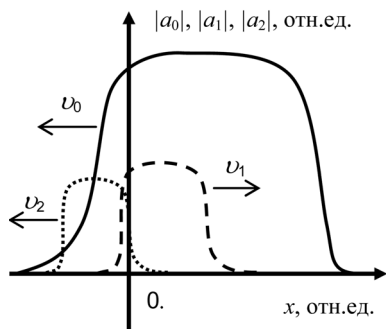


Рис. 1. Структура моделируемой параметрической неустойчивости

или

$$k_1 + k_2 = k_0$$

учитывая, что  $k_1' + k_2' = k_0 - (k_1' + k_2')$ , получим

$$k_1' + k_2' = x / \ell^2$$

или учитывая (6)

$$\omega_n (-1 / v_1 + 1 / v_2) = x / \ell^2$$

откуда

$$x(\omega_n) = \ell^2 \omega_n (-1 / v_1 + 1 / v_2), \quad (7)$$

вводя нормировку для (7)  $\ell^2 \omega_n / \nu_1 = (2\pi n + \delta\phi) / \alpha \chi$ , окончательно получим

$$x(\omega_n) = (2\pi n + \delta\phi) / \chi.$$

**Результаты численного интегрирования.** Схематично структура неустойчивости представлена на рис. 1. Дочерние волны начинают возбуждаться в окрестности точки параметрического резонанса ( $x = 0$ ) за счет энергии волны накачки, направление распространения взаимодействующих волн указано стрелками.

*Линейная задача.* В линейной постановке задачи при бесконечной мощности накачки собственные моды неустойчивости возбуждаются независимо. На рис. 2 представлены зависимости амплитуд дочерних ленгмюровских волн для мод с номерами 1 и 2, полученные в результате численного интегрирования. Начальные условия заданы в соответствии с (5), где  $n = 1, n = 2$ , остальные параметры таковы:  $\gamma_0 = 0,7, \nu_1 = 1, \nu_2 = 0,2, \ell = 1, \nu_1 = 0, \nu_1 = 0,5, k = 2,5, K = 0,1$ .

Из рис. 2 видно, что в случае абсолютной неустойчивости реализуется циклический рост амплитуды дочерних волн (отображено два цикла), что связано с движением волн внутри петли обратной связи. Рост амплитуды дочерних волн происходит неограниченно по экспоненциальному закону. Кроме того, точки параметрического резонанса сдвинуты в пространстве в соответствии с (7). В линейной постановке задачи спектр неустойчивости содержит преимущественно собственные частоты, которые были заданы в начальных условиях (5). Действительно, если рост амплитуды волн неограничен, то неустойчивость будет развиваться на частотах с наибольшим инкрементом, т. е. если неустойчивость начала развиваться на  $n$ -й собственной моде в соответствии с (5), то именно эта частота и будет доминировать в спектре. Обогащение спектра гармониками не наблюдается.

*Нелинейная задача.* Ограничение мощности накачки в значительной мере преобразует характер неустойчивости. В этом случае следует ожидать насыщения неустойчивости за счет истощения накачки. На рис. 3 представлена эволюция неустойчивости от начала ее развития (когда накачка доходит до области резонанса) и до момента насыщения, когда наблюдается истощение накачки и насыщения роста дочерних волн (показана только ионно-звуковая волна).

Как видно на рис. 3, развитие неустойчивости проявляется в росте амплитуды дочерних волн, когда накачка достигает области распада. По мере роста амплитуд дочерних волн наблюдается истощение накачки, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [6]. Нелинейность неустойчивости также проявляется в обогащении спектра неустойчивости модами, которые отсутствовали в начальных условиях. На рис. 4 представлен спектр неустойчивости в сравнении со спектром собственных мод (5). Первоначально неустойчивость развивалась на

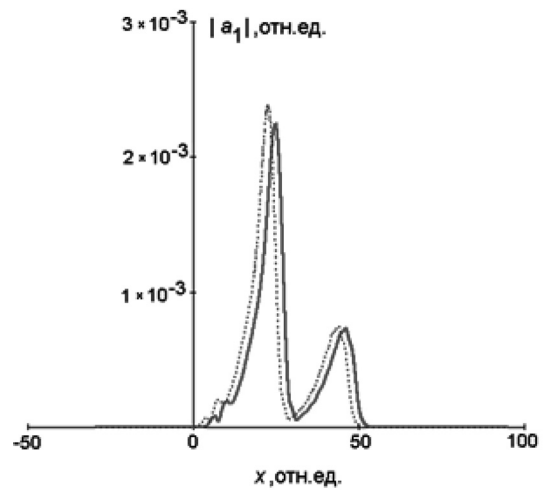


Рис. 2. Модуль амплитуд волн  $a_1$ , при  $t = 40$  отн. ед., в линейной постановке задачи: мода 1 – пунктирная кривая; мода 2 – сплошная кривая

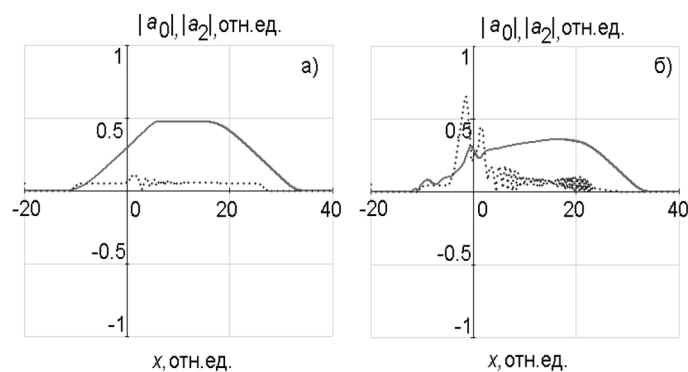


Рис. 3. Эволюция взаимодействующих волн  $a_0$  и  $a_2$ ;  $a - t = 23$  отн. ед.;  $b - t = 43$  отн. ед.

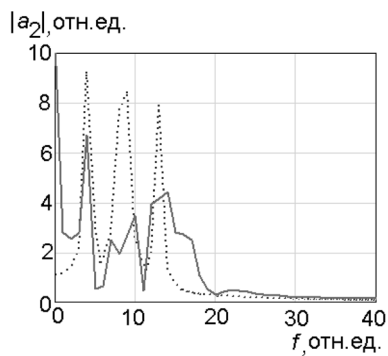


Рис. 4. Спектр ионно-звуковой волны, совмещенный со спектром собственных мод ионно-звуковой волны при  $t = 133$  отн. ед.: собственные моды – пунктирная кривая; дочерняя волна – сплошная кривая

нулевой моде в соответствии с начальным условием (5), по мере насыщения ее спектр начинает обогащаться модами высших порядков, что также хорошо согласуется с экспериментальными данными [7].

**Закключение.** Построена численная модель нелинейной абсолютной параметрической неустойчивости в неоднородной плазме. Получены численные решения для собственных мод неустойчивости. Показано, что в нелинейной постановке задачи абсолютная неустойчивость приводит к истощению накачки. Найден спектр неустойчивости, который преимущественно из ее собственных мод. В нелинейном случае наблюдается обогащение спектра собственными частотами, отсутствующими в начальном условии. Результаты численных расчетов хорошо согласуются с экспериментальными и будут использованы для развития теории параметрических неустойчивостей, а также для повышения эффективности нагрева плазмы электромагнитным излучением.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта БРФФИ–РФФИ (Ф14Р-047, 14-02-90003).

### Список использованной литературы

1. Пилия, А. Д. Нестационарная теория распадной неустойчивости в слабонеоднородной плазме / А. Д. Пилия // ЖЭТФ. – 1973. – Т. 64, № 4. – С. 1237–1244.
2. Гусаков, Е. З. Параметрические неустойчивости неоднородной плазмы в присутствии длинноволновых низкочастотных колебаний / Е. З. Гусаков, А. Д. Пилия // Физика плазмы. – 1980. – Т. 6. – С. 509–519.
3. Gusakov, E. Z. Nonlinear stage of the three-wave parametric interaction in an inhomogeneous medium / E. Z. Gusakov, A. N. Savel'ev // JETP. – 1988. – Vol. 67, N 4. – P. 698–705.
4. Suppression and Feedback Control of Anomalous Induced Backscattering by Pump-Frequency Modulation / V. I. Arkhipenko [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 101. – P. 175004.
5. Absolute parametric decay instability control by the complementary pump / V. I. Arkhipenko [et al.] // European Physical Letters. – 2011. – Vol. 93. – P. 25001.
6. Ограничение генерации быстрых электронов за счет параметрического отражения греющей волны / В. И. Архипенко [и др.] // Письма в ЖТФ. – 1986. – Т. 12, № 49. – С. 1190–1194.
7. Экспериментальное исследование абсолютной параметрической неустойчивости неоднородной плазмы / В. И. Архипенко [и др.] // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 93, № 10. – С. 1221–1234.

Поступило в редакцию 05.10.2015