**Доклады Национальной академии наук Беларуси**

**2016** **июль–август** **Том 60 № 4**

## *МАТЕМАТИКА*

*УДК 512.552*

*Академик В. И. ЯНЧЕВСКИЙ*

# О РАЗЛОЖИМОСТИ УНИТАРНЫХ ИНВОЛЮЦИЙ В АЛГЕБРАХ НАД СПЕЦИАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ

*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
*yanch@im.bas-net.by*

Цель сообщения – показать, что всякая унитарная инволюция инволютивной простой центральной алгебры $A$ над глобальным полем либо полем, когомологическая размерность которого не превосходит 2, разложима относительно разложения алгебры $A$ в примарные компоненты.

*Ключевые слова:* алгебры с унитарными инволюциями, циклические алгебры с делением, разложимые инволюции.

*V. I. YANCHEVSKIĬ*

## DECOMPOSABILITY OF UNITARY INVOLUTIONS IN ALGEBRAS OVER SPECIAL FIELDS

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
*yanch@im.bas-net.by*

The aim of the presented article is to prove that any unitary involution of involutory central simple algebra $A$ over a global field or over a field of cohomological dimension not greater than 2 is decomposable with respect to the decomposition of $A$ into primary components.

*Keywords*: algebras with unitary involutions, cyclic division algebras, decomposable involutions.

**Введение.** Пусть $K$ – поле характеристики отличной от 2, $A$ – конечномерная центральная $K$-алгебра с делением и инволюцией τ.

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $A = A_1 \otimes_K A_2 \otimes_K \ldots \otimes_K A_t$ *– разложение* $A$ *в тензорное произведение простых центральных* $K$*-алгебр. Инволюция* τ (*алгебра* $A$) *называется разложимой относительного разложения* $A_1 \otimes_K A_2 \otimes_K \ldots \otimes_K A_t$, *если* $A_i^\tau = A_i$, $i = 1,\ldots, t$, $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \ldots \otimes \tau_t$, *где* $\tau_i$ *– ограничение* τ *на* $A_i$.

Хорошо известно, что все инволюции бывают трех типов: симплектические, ортогональные и унитарные. Проблеме разложимости (неразложимости) инволюций, тесно связанной с понятием их дискриминантов в случае инволюций первых двух видов, посвящено большое количество исследований (Кнус, Лэм, Роуэн, Солтман, Тиньоль, Паримала, Сридхаран, Сюреш, Янчевский, см., напр., [1; 2]). Случай унитарных инволюций изучен сравнительно мало. В этой работе мы интересуемся алгебрами с унитарными циклическими инволюциями и показываем, что во многих важных случаях они разложимы. Циклические инволюции играют важную роль при изучении внешних форм анизотропных алгебраических групп типа $A_n$. К сожалению, не все унитарные инволюции цикличны [3; 4]. Однако существуют целые важные классы полей $K$, для которых цикличность имеет место. Ниже для двух таких классов мы устанавливаем разложимость соответствующих инволюций.

**Основная часть.** Для формулировки и доказательства основных результатов нам потребуются следующие определения и обозначения.

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $K / k$ – *сепарабельное квадратичное расширение полей. Унитарная* $K / k$-*инволюция* $\tau$ *простой центральной* $K$-*алгебры* $A$ *называется циклической относительно ее максимального подполя* $Z$, *если* $A$ *обладает максимальным* $\tau$-*инвариантным подполем* $Z$ *таким, что подполе* $X$ *неподвижных относительно* $\tau$ *элементов из* $Z$ *является циклическим расширением поля* $k$.

Напомним, что через $A = (Z / K, \sigma, \gamma, n)$ обозначается циклическая центральная $K$-алгебра, обладающая максимальным подполем $Z$, являющимся циклическим расширением поля $K$ степени $n$ с образующей $\sigma$ группы Галуа $\mathrm{Gal}(Z / K)$, и элементом $\Gamma$ таким, что $\Gamma^n = \gamma \in K$ и для каждого $z \in Z$, $\Gamma z \Gamma^{-1} = z^\sigma$. Для расширения полей $E / F$ ниже через $N_{E / F}$ обозначено отображение нормы из $E$ в $F$.

Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ – разложение $n$ в произведение взаимно простых примарных степеней. Назовем разложение алгебры $A$ разложением на примарные компоненты, если $A = A_1 \otimes_K A_2 \otimes_K \ldots \otimes_K A_s$, где $A_i$ – $K$-алгебра степени $p_i^{\alpha_i}$. Сформулируем теперь первый основной результат работы.

Т е о р е м а 1. *В вышеприведенных обозначениях пусть* $A$ – *простая центральная алгебра нечетной степени* $n$ *с циклической инволюцией* $\tau$ *относительно подполя* $Z$. *Тогда* $\tau$ *разложима относительно подходящего разложения алгебры* $A$ *на примарные компоненты*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку группа Галуа $\mathrm{Gal}(X / k)$ циклическая, то существует однозначное представление $X$ в виде $X_1 \otimes_k X_2 \otimes_k \ldots \otimes_k X_s$, где $X_i$ – подполе $X$, цикличное над $k$ степени $p_i^{\alpha_i}$. Рассмотрим поля $Z_i = X_i K$, $i = 1, \ldots, s$. Тогда $Z = Z_1 \otimes_K Z_2 \otimes_K \ldots \otimes_K Z_s$. Положим $\Gamma_i = \Gamma^{n/n_i}$ ($n_i = p_i^{\alpha_i}$) и рассмотрим алгебру $A_i = (Z_i / K, \sigma_i, \gamma, n_i)$, где $\sigma_i$ – образующая группы Галуа $Z_i / K$, индуцируемая, очевидно, элементом $\Gamma_i$. Нетрудно видеть, что $A = A_1 \otimes_K A_2 \otimes_K \ldots \otimes_K A_s$ – разложение алгебры $A$ на примарные компоненты, и для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что $A_i^\tau = A_i$, $i = 1, \ldots, s$. Ясно, что $Z_i^\tau = Z_i$, поэтому остается показать, что $\Gamma_i^\tau \in A_i$. Заметим, что наличие у алгебры $A$ инволюции $\tau$ влечёт существование элемента $x \in X$ со свойством

$$N_{X / k}(x) = \gamma\gamma^\tau.$$

Далее, пусть $\alpha$ – примитивный элемент расширение $X / k$. Нетрудно видеть, что $\alpha$ является примитивным элементом также и для расширения $Z / K$. Поскольку в алгебре $A$ имеет место соотношение

$$\Gamma\alpha\Gamma^{-1} = \alpha^\sigma,$$

то применив инволюцию $\tau$ к обоим частям последнего равенства, получим

$$\Gamma^{-\tau}\alpha^\tau\Gamma^\tau = \alpha^{\sigma\tau},$$

или

$$\Gamma^{-\tau}\alpha\Gamma^\tau = \alpha^\sigma.$$

Из предыдущего немедленно вытекает, что $\Gamma^{\tau+1} \in Z$. Тогда $\Gamma^\tau = z\Gamma^{-1}$, для некоторого $z \in Z$. Далее

$$\Gamma_i^\tau = (z\Gamma^{-1})^{n/n_i} = z\Gamma^{-1}z\Gamma^{-1} \ldots z\Gamma^{-1} = N_{Z/Z_i}(z)\Gamma_i^{-1}.$$

Так как $N_{Z/Z_i}(z) \in Z_i$, то $\Gamma_i^\tau \in A_i$, что и требовалось.

Непосредственным приложением предыдущей теоремы является установление разложимости унитарных $K/k$-инволюций в алгебрах нечетного индекса над глобальными полями.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $K$ – *глобальное поле характеристики отличной от* 2, $A$ – *центральная* $K$-*алгебра нечетной степени с унитарной* $K / k$-*инволюцией* $\tau$. *Тогда* $\tau$ *разложима на циклические инволюции относительно некоторого разложения алгебры* $A$ *на примарные компоненты*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, прежде всего, что инволюция $\tau$ на самом деле циклична ввиду теоремы 5.3 из [3], а тогда все следует из теоремы 1.

З а м е ч а н и е 1. *Для алгебр* $A$ *малых индексов и глобальных полей* $K$ *положительной характеристики предыдущий результат был получен совместно с Т. С. Бусел.*

Помимо классического случая глобальных полей $K$ применение теоремы 1 оказывается эффективным и в гензелевой ситуации.

Т е о р е м а 3. *Пусть $k$ – поле частных двумерной превосходной гензелевой локальной области целостности с алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики и $A$ – центральная простая $K$-алгебра нечетной степени с унитарной $K / k$-инволюцией $\tau$. Тогда $\tau$ разложима на циклические инволюции относительно некоторого разложения алгебры $A$ на примарные компоненты.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2, поскольку ввиду теоремы 5.4 из [3], всякая $K / k$-инволюция $\tau$ циклична.

З а м е ч а н и е 2. *Предыдущие результаты позволяют редуцировать классификацию алгебр с унитарными инволюциями нечетных степеней к алгебрам, степени которых примарны.*

**Заключение.** Установлена разложимость унитарных инволюций в простых центральных алгебрах над глобальными (и другими, см. теорему 3) полями, что позволяет во многих случаях сводить изучение унитарных инволюций в алгебрах произвольных нечетных степеней к изучению инволюций в алгебрах примарных степеней.

### Список использованной литературы

1. *Parimala, R.* A question on the discriminants of involutions of central division algebras / R. Parimala, R. Sridharan, V. Suresh // Math. Ann. – 1993. – Vol. 297. – P. 575–580.

2. *Yanchevskiĭ, V. I.* Symmetric and Skew-Symmetric Elements of Involutions, Associated Groups and the Problem of Decomposability of Involutions / V. I. Yanchevskiĭ // Proc. of Symp. in Pure Math. – 1995. – Vol. 58, N 2. – P. 431–444.

3. *Tikhonov, S. V.* Symmetric elements, Hermitian forms, and cyclic involutions / S. V. Tikhonov, V. I. Yanchevskiĭ // Communications in Algebra. – 2015. – Vol. 43, N 11. – P. 4735–4744.

4. *Прокопчук, А. В.* О нециклических унитарных инволюциях гензелевых дискретно нормированных алгебр с делением / А. В. Прокопчук, В. И. Янчевский // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 1. – С. 51–53.

*Поступило в редакцию 16.12.2015*