Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **июль–август** **Том 60 № 4**

УДК 519.173

В. И. БЕНЕДИКТОВИЧ

НЕПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ КОНФИГУРАЦИИ В ДОПОЛНЕНИЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФОВ И ДИЗЪЮНКТНАЯ СОВМЕСТИМОСТЬ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
vbened@im.bas-net.by

В работе для произвольного непересекающегося совершенного паросочетания за время $O(n^4 \log n)$ строится дизъюнктно совместимое остовное дерево максимальной степени вершин не больше 4. Получен критерий существования непересекающегося совершенного паросочетания в дополнении звезды порядка меньше $2n$ в K_{2n}. Доказано существование непересекающегося совершенного паросочетания в дополнении дерева порядка $(n + 1)$ в K_{2n} с числом внутренних вершин, не превышающим $(n - 1)$.

Ключевые слова: геометрический граф, (дизъюнктно) совместимые графы, двойственный мультиграф, непересекающееся совершенное паросочетание.

V. I. BENEDIKTOVICH

NON-CROSSING CONFIGURATIONS IN COMPLEMENTS OF GEOMETRIC GRAPHS AND DISJOINT COMPATIBILITY

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
vbened@im.bas-net.by

In this article, for any non-crossing perfect matching a disjoint compatible spanning tree with a maximum vertex degree no more than 4 is constructed with the complexity $O(n^4 \log n)$. The criterion of existence of a non-crossing perfect matching in the complement of a star of the order less than $2n$ in K_{2n} has been obtained. It has been proved that there exists a non-crossing perfect matching in the complement of a tree of the order $(n + 1)$ in K_{2n} with the number of inner vertices no more than $(n - 1)$.

Keywords: geometric graph, (disjoint) compatible graphs, dual multigraph, non-crossing perfect matching.

Геометрический граф $G = (V, E)$ – это граф, уложенный на плоскости таким образом, что множеством вершин V является множество точек на плоскости, а множество ребер E состоит из некоторых прямолинейных отрезков с концами из множества V, причем их внутренности не содержат других точек из V. Отметим, что последнее условие заведомо выполняется, если множество точек V на плоскости находится *в общем положении*, т. е. никакие три из них не лежат на одной прямой; среди проходящих через них прямых нет параллельных и никакие три из этих прямых не пересекаются в точке, не принадлежащей множеству V, что и будет предполагаться в дальнейшем. Говорят, что два ребра геометрического графа *пересекаются*, если у них есть общая точка, являющаяся внутренней для обоих ребер. Геометрический граф называется *непересекающимся* (или *плоским*), если никакие два его ребра не пересекаются.

Два геометрических графа без пересечений $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_1 = (V_2, E_2)$ называются *совместимыми*, если *граф* их *объединения* $G_1 \cup G_1 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ также является геометрическим графом без пересечений. Если дополнительно выполняется условие $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то графы G_1 и G_2 называются *дизъюнктно совместимыми* [1].

Используя произвольную триангуляцию заданного непересекающегося совершенного паросочетания M можно построить *охватывающее дерево*, т. е. совместимое с M остовное дерево, которое содержит M в качестве подграфа. Однако такой алгоритм может привести к тому, что степени некоторых вершин в построенном дереве могут оказаться достаточно большими. В 1995 г. P. Bose и G. T. Toussaint [2] доказали, что произвольное непересекающееся совершенное паросочетание M мощности n имеет охватывающее дерево T максимальной степени 7 и предложили алгоритм временной сложности $O(n \log n)$ для его построения. Позже [3] они улучшили этот результат, показав, что произвольное непересекающееся совершенное паросочетание M мощности n имеет охватывающее дерево T максимальной степени 3 (*двоичное дерево*), которое может быть построено за оптимальное время $\Theta(n \log n)$. Последняя граница на степень является наилучшей, потому что охватывающее дерево с максимальной степенью 2 является чередующейся гамильтоновой цепью, которая, как известно, не всегда существует. Этот же результат был подтвержден в 2010 г. в усиленной форме в работе M. Hoffmann и C. D. Tóth [4], где за время $O(n \log n)$ строится охватывающее бинарное дерево T, обладающее дополнительным свойством: для каждой вершины v дерева все инцидентные ей ребра T лежат в полуплоскости, границей которой является прямая, проходящая через ребро M, инцидентное v.

В 2009 г. D. L. Souvaine и C. D. Tóth [5] обобщили этот результат в другом направлении: произвольный несвязный геометрический граф на n вершинах может быть дополнен за время $O(n \log n)$ до связного геометрического графа так, что степень каждой вершины может увеличиться не больше, чем на 2.

Если паросочетание M можно дополнить $|M|$ ребрами до непересекающегося цикла P, то каждое второе ребро этого цикла принадлежит паросочетанию M. Такой полигон называется *чередующейся полигонизацией* паросочетания M. Нетрудно видеть, что не каждое паросочетание обладает чередующейся полигонизацией. D. Rappaport показал в 1989 г. [6], что задача распознавания существования дополнения плоского геометрического графа, являющегося гамильтоновым, является NP-полной. Каждая чередующаяся полигонизация имеет четное число ребер и является объединением двух непересекающихся совершенных паросочетаний M_1 и M_2. С другой стороны, если M_1 и M_2 являются двумя непересекающимися дизъюнктно совместимыми совершенными паросочетаниями одного и того же множества точек S_M, то их объединение, вообще говоря, является совокупностью простых полигонов (циклов в $K(S_M)$), у каждого из которых четное число ребер. Отметим, что совершенное паросочетание с нечетным числом ребер не всегда имеет совместимое непересекающееся совершенное паросочетание. Была высказана *гипотеза о дизъюнктно совместимом совершенном паросочетании*, заключающаяся в том, что для каждого непересекающегося совершенного паросочетания M с четным числом ребер в общем положении существует непересекающееся совместимое совершенное паросочетание.

Сначала она была подтверждена для частных случаев [7], а именно, для *выпукло независимых* (каждый отрезок обладает, по крайней мере, одной концевой вершиной, лежащей на выпуклой оболочке концевых вершин всех отрезков) и *ортогональных отрезков*. Также было доказано, что всегда существует множество чередующихся полигонов, каждый из которых совместим с M и охватывает не менее 4/5 ребер из M.

При исследовании указанной гипотезы были сформулированы новые гипотезы, использующие понятие *выпуклое подразбиение* плоскости. Напомним, что *выпуклым подразбиением* плоскости для множества M отрезков называется множество C попарно непересекающихся выпуклых областей (*клеток*), каждая из которых не пересекается с отрезками множества M, и объединение замыканий которых покрывает всю евклидову плоскость. Обозначим через S множество всех концевых вершин отрезков из множества M. Отметим, что каждая вершина v из S инцидентна, по крайней мере, двум клеткам из множества C. Пусть σ – произвольное отображение

$$\sigma : S \to C \times C,$$
$$\sigma : s \mapsto (c_1, c_2),$$

где c_1 и c_2 – две смежные (т. е. инцидентные вершине s) клетки. Выпуклое подразбиение C и отображение σ определяют *двойственный мультиграф* $D(C, \sigma)$, множеством вершин $V(D)$ которого является множество всех клеток C, и каждая концевая вершина p отрезка из M соответствует ребру $(c_1, c_2) \in E(D)$, если $\sigma(p) = (c_1, c_2)$. В этом случае будем говорить, что клетка $c_i, i = 1, 2,$

инцидентна вершине p относительно σ. Поэтому если $n = |M|$, то $|E(D)| = 2n$, причем граф $D(C, \sigma)$, вообще говоря, может иметь двойные ребра.

Одним из классических способов построения выпуклого подразбиения евклидовой плоскости для множества отрезков из M является следующий. Для каждой вершины $q \in S$, являющейся концевой вершиной отрезка $pq \in M$, продолжим отрезок pq вдоль луча $\overrightarrow{pq}$ за вершину q, пока он не достигнет другого отрезка из M, либо предыдущего продолжения другого отрезка из M, либо в бесконечность. Очевидно, что различный порядок, согласно которому совершаются эти продолжения, приводит к различным выпуклым подразбиениям евклидовой плоскости. Кроме того, можно рассматривать продолжения концов отрезков в зависимости не только от порядка самих отрезков (т. е. когда продолжения концов для каждого отрезка выполняются последовательно), но и от порядка их концов, т. е. в зависимости от *перестановки* τ на множестве концевых вершин S. Во всех случаях евклидова плоскость будет подразбита на $n + 1$ выпуклых областей (*клеток*), и каждая вершина множества S будет инцидентна в точности двум клеткам. Такое выпуклое подразбиение называется *непосредственным* и будет обозначаться через C_τ. Отметим сразу, что не все выпуклые подразбиения плоскости могут быть получены таким способом; например, минимальное число клеток в выпуклом подразбиении может быть гораздо меньше, чем $n + 1$.

Как уже было сказано выше, новые гипотезы были сформулированы Aichholzer и др. [7] в терминах двойственного мультиграфа D, ассоциированного с подходящим выпуклым подразбиением. *Ориентация* произвольного ребра графа D, инцидентного вершине $v \in V(D)$, может рассматриваться как сопоставление концевой вершины отрезка клетке, которая соответствует v. При *четной ориентации* неориентированного мультиграфа ребра ориентируются таким образом, что каждая вершина имеет четную степень входящих ребер (*четную входящую степень*). В частности, четная ориентация D означает, что каждой выпуклой области подразбиения плоскости сопоставлено четное число концевых вершин отрезков. В этом случае можно соединить концевые вершины, сопоставленные каждой клетке, используя непересекающиеся отрезки, лежащие внутри нее (и следовательно, совместимые с паросочетанием M), кроме единственного исключительного случая, когда клетке сопоставлены ровно две концевые вершины одного и того же отрезка из паросочетания M.

Определение 1. *Говорят, что два смежных ребра графа D конфликтны, если они соответствуют двум концевым вершинам одного и того же отрезка из M.*

Определение 2. *Говорят, что четная ориентация двойственного графа D бесконфликтна, если никакие два конфликтующих ребра не входят в вершину входящей степени* 2.

Следовательно, если для совершенного паросочетания M существует выпуклое подразбиение плоскости такое, что двойственному графу можно сопоставить бесконфликтную четную ориентацию, то отсюда немедленно следует существование непересекающегося дизъюнктно совместимого совершенного паросочетания для M.

Решение *гипотезы о дизъюнктно совместимом совершенном паросочетании* было найдено Ishaque и др. в 2011 г. [1]. Для каждого множества из $n \geq 2$ непересекающихся прямолинейных отрезков на плоскости, лежащих в общем положении, строится выпуклое подразбиение такое, что ассоциированный двойственный граф D содержит два дизъюнктно совместимых непересекающихся остовных дерева. Такое подразбиение строится итеративным способом, при котором число выпуклых областей может стать меньше, чем $n + 1$, но число ребер в ориентированном двойственном мультиграфе останется равным $2n$, так как они находятся во взаимно однозначном соответствии с концевыми вершинами отрезков совершенного паросочетания M. Также можно показать, что у каждого ассоциированного мультиграфа, который имеет четное число ребер и содержит два дизъюнктно совместимых непересекающихся остовных дерева, должна существовать бесконфликтная четная ориентация. Основываясь на этих соображениях, можно построить непересекающееся дизъюнктно совместимое совершенное паросочетание.

Отметим, что ни одна из новых гипотез, сформулированных Aichholzer и др. [7], еще не была подтверждена, наоборот, некоторые из них были опровергнуты. Например, если требуется, чтобы выпуклое подразбиение было построено указанным выше классическим алгоритмом, т. е. последовательно продолжая прямолинейные отрезки совершенного паросочетания M, то двойственный граф не всегда содержит два дизъюнктно совместимых непересекающихся остовных дерева. В доказательстве Ishaque и др. [1] очень существенно использование более широкого класса выпуклых подразбиений, у которых может быть меньше, чем $n + 1$ клеток.

В нашем сообщении исследуется проблема существования дизъюнктно совместимого остовного дерева для заданного непересекающегося совершенного паросочетания.

Т е о р е м а 1. *Для произвольного непересекающегося совершенного паросочетания M в общем положении существует дизъюнктно совместимое с ним непересекающееся остовное дерево T, максимальная степень вершин которого не превосходит* 4. *При этом такое дерево T может быть построено за время* $O(n^4 \log n)$.

Нам понадобится следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Л е м м а 1. *Пусть G является выпуклым полигоном с множеством вершин* $V(G)$, *у которого выбрано произвольное множество сторон H, не являющихся последовательными (при обходе его границы против часовой стрелки). Тогда за линейное время (от порядка полигона* $n = |V(G)|$*) остальные стороны полигона G могут быть дополнены до гамильтоновой цепи P полного графа* $K(V(G))$ *на вершинах* $V(G)$, *дизъюнктно совместимой с множеством H. При этом в качестве одной из концевых вершин этой цепи P может быть выбрана произвольная концевая вершина любой стороны из множества H.*

Доказательство этой леммы проведем индукцией по порядку $n = |V(G)|$ полигона G.

Действительно, при $n = 3$ утверждение очевидно. Поэтому предположим, что утверждение справедливо для $m < n$ и рассмотрим полигон G порядка n. Выберем произвольную сторону $e = pq$ из множества H и произвольную вершину p этой стороны. Без ограничения общности можно считать, что вершина q является предыдущей вершиной при обходе границы полигона G по часовой стрелке, а вершины $p_1, p_2, ..., p_{i-1}, p_i$ – последующими вершинами для вершины p, причем такими, что вершины $p_1, p_2, ..., p_{i-1}$ не являются вершинами ни одной из сторон H, а вершина p_i уже является вершиной следующей после pq стороны H. Построим новый выпуклый полигон (рис. 1)

$$G' = G - \{qp,\ pp_1,\ p_1p_2,\ ...,\ p_{i-1}p_i\} + p_iq.$$

Очевидно, что его порядок $\operatorname{ord} G' < n$, поэтому по индуктивному предположению для него существует гамильтонова цепь в полном графе $K(V(G'))$, дизъюнктно совместимая с множеством сторон $H' = H - pq$ и имеющая концевую вершину p_i. Тогда цепь

$$P = P' + \{pp_1,\ p_1p_2,\ ...,\ p_{i-1}p_i\}$$

является гамильтоновой цепью в полном графе $K(V(G))$, совместимая с множеством сторон H.

Нам понадобится также следующее утверждение.

Л е м м а 2 [8]. *Для произвольного непересекающегося совершенного паросочетания M в общем положении за время* $O(n^4 \log n)$ *можно построить выпуклое подразбиение, дуальный мультиграф которого является реберно-2-связным.*

Отметим, что при доказательстве этого утверждения также используется более широкий класс выпуклых подразбиений, называемых выпуклыми подразбиениями *ориентированного дерева*, у которых число клеток остается равным $n + 1$. Они строятся из произвольного непосредственного выпуклого подразбиения C_τ с помощью применения последовательности «локальных модификаций», пока не будут исключены все запрещенные структуры, которые характеризуются существованием полигонов (состоящих из границы некоторых клеток) с некоторыми свойствами.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 1 следующим образом. По лемме 2 можно построить выпуклое подразбиение C и соответствие $\sigma : S \to C \times C$, двойственный мультиграф $D(C, \sigma)$ для которых является реберно-2-связным. Поэтому для каждой клетки $c \in C$ этого подразбиения существуют, по крайней мере, две вершины из S, инцидентные c относительно σ.

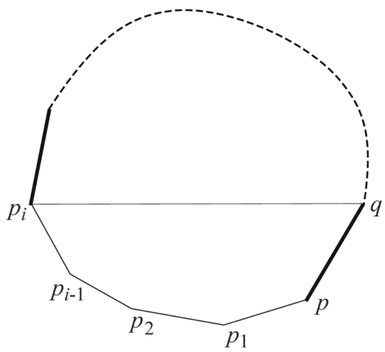

Рис. 1. Построение выпуклого полигона G' меньшего порядка

Если клетке $c \in C$ инцидентны относительно σ не менее трех вершин множества S (обозначим их число через $|c|$), то соединим их последовательно (при обходе ее границы по часовой стрелке). В результате для каждой такой клетки c получим выпуклый многоугольник V_c, не содержащий на границе двух последовательных ребер из M и лежащий в замыкании клетки c. В силу леммы 1 для каждого выпуклого многоугольника V_c можно построить непересекающуюся цепь P_c, лежащую в клетке $c \in C$ и не содержащую ребер совершенного паросочетания M.

Если клетке $c \in C$ инцидентны относительно σ в точности две вершины множества S, являющиеся концевыми вершинами разных отрезков множества M, то просто соединим их. В результате для каждой такой клетки c получим отрезок I_c, отличный от ребра из M и лежащий в замыкании клетки c.

Наконец, пусть клетке c инцидентны относительно σ в точности две вершины v и w, являющиеся концами одного ребра vw совершенного паросочетания M. Обозначим множество клеток с таким свойством через C'. Тогда каждой из вершин v и w может быть инцидентна относительно σ либо еще одна общая клетка c_{vw} выпуклого подразбиения, либо каждой вершине v и w инцидентны относительно σ две различные клетки: $c_1 = c_v$ и $c_2 = c_w$.

В первом случае в силу реберно-2-связности двойственного мультиграфа $D(C, \sigma)$ клетке c_{vw} должна быть инцидентна относительно σ, по крайней мере, еще одна вершина u совершенного паросочетания M, поэтому для клетки c_{vw} существует соответствующий выпуклый многоугольник $V_{c_{vw}}$, а значит, цепь $P_{c_{vw}}$ в силу леммы 1.

Во втором случае каждой клетке c_1 и c_2 должны быть инцидентны относительно σ, по крайней мере, еще по одной вершине множества S, которые являются концевыми вершинами ребер из M, отличных от vw. А значит, в клетках c_1 и c_2 можно построить отрезки I_{c1}, I_{c2} или выпуклые многоугольники V_{c1}, V_{c2}, для которых существуют цепи P_{c1}, P_{c2} в силу леммы 1.

Рассмотрим теперь граф, равный объединению всех построенных цепей и отрезков (рис. 2)

$$P = \left(\bigcup_{\substack{c \in C \\ |c| \geq 3}} P_c \right) \bigcup \left(\bigcup_{\substack{c \in C \setminus C' \\ |c| = 2}} I_c \right).$$

Данный граф P является остовным, степень каждой вершины которого не превосходит 4, так как каждая вершина совершенного паросочетания M инцидентна относительно σ в точности двум клеткам из C. Кроме того, граф P является связным в силу связности двойственного мультиграфа $D(C, \sigma)$. Поэтому выбрасывая из графа P кратные ребра и применяя, например, алгоритм Прима, мы получим в результате искомое остовное дерево T с максимальной степенью вершин 4, дизъюнктно совместимое с совершенным паросочетанием M. Отметим, что общее время, требуемое на построение такого дерева, определяется временем на построение выпуклого подразбиения $D(C, \sigma)$, цепей P_c и временем $O(n)$ алгоритма Прима, т. е. временем $O(n^4 \log n)$. Теорема доказана.

С общей задачей существования непересекающегося подграфа H со свойством P в геометрическом графе тесно связана известная экстремальная проблема, восходящая еще к Эрдешу, об оценке числа $e_k(n)$ – максимального числа ребер в геометрическом графе на n вершинах, у которого среди произвольно выбранных $(k + 1)$ ребер найдутся два ребра, имеющие общую точку. Так, в [9] при нахождении числа $e_{n-1}(2n)$, в частности, было доказано следующее утверждение.

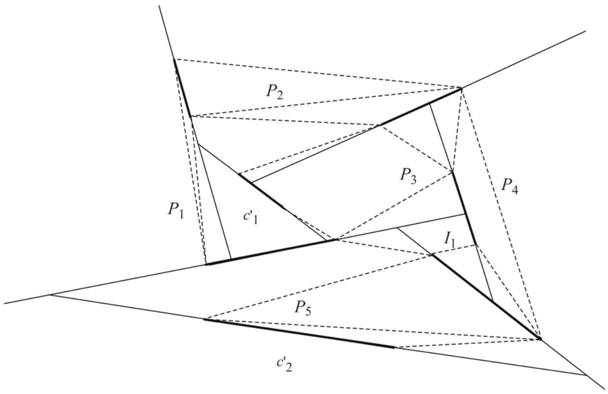

Рис. 2. Построение дизъюнктно совместимого остовного дерева P (жирные линии – ребра заданного совершенного паросочетания, пунктирные линии – цепи и отрезки для каждой клетки)

Т е о р е м а 2. [9] *Для произвольного полного графа $G = K_{2n}$ на $2n$ вершинах и произвольного его подграфа $H = (V(H), E(H))$, такого, что $|E(H)| \leq n - 1$, геометрическое дополнение $G - H$ содержит непересекающееся совершенное паросочетание.*

Там же была выдвинута гипотеза, что если рассматриваемый полный граф $G = K_{2n}$ имеет достаточно много *внутренних* вершин, то из графа K_{2n} может быть удалено больше ребер, и при этом полученный граф все еще будет содержать непересекающееся совершенное паросочетание.

Далее данная гипотеза подтверждается для некоторых классов подграфов. Введем некоторые определения.

О п р е д е л е н и е 3. *Пусть* $H = (V(H), E(H))$ *– произвольный геометрический подграф в полном геометрическом графе* $G = K_{2n}$ *на множестве* $V(G)$ *из* $2n$ *вершин. Тогда граф* H' *называется геометрическим дополнением графа* H *в* K_{2n}, *если* $V(H') = V(G)$ *и* $E(H') = E(G) \setminus E(H)$. *Геометрическое дополнение будем обозначать через* $H' = G - H$.

Выпуклую оболочку множества точек из V на плоскости будем обозначать через $\mathrm{conv}(V)$. В соответствии с общепринятой практикой, выпуклой оболочкой также называют ее *границу*, которая по теореме Жордана делит евклидову плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю.

О п р е д е л е н и е 4. *Вершины графа* $G = K_{2n}$, *лежащие внутри выпуклой оболочки* $\mathrm{conv}(V(G))$ *множества вершин* $V(G)$, *называют внутренними. Множество внутренних вершин будем обозначать через* $\mathrm{int}(V(G))$. *Вершины графа* $G = K_{2n}$, *лежащие на границе выпуклой оболочки* $\mathrm{conv}(V(G))$ *множества вершин* $V(G)$, *называют крайними*.

Закрасим n вершин множества $V(G)$ полного графа $G = K_{2n}$ в черный цвет, а остальные n вершин – в белый цвет. Такую раскраску вершин назовем *равномерной*.

О п р е д е л е н и е 5. *Прямую* L, *проходящую через любые две точки множества* $V(G)$, *будем называть прямой, определяемой множеством* $V(G)$. *Прямую* L, *определяемую множеством* $V(G)$, *назовем сбалансированной, если в каждой открытой полуплоскости, ограниченной этой прямой, число черных вершин равно числу белых вершин*.

Заметим, что любая сбалансированная прямая L всегда проходит через две вершины, имеющие разную окраску.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $H = K_{1,m}$ *– звезда, являющаяся подграфом полного графа* $G = K_{2n}$ *на* $2n$ *вершинах, причем* $m + 1 < 2n$. *Тогда дополнение* $G - H$ *содержит непересекающееся совершенное паросочетание только в следующих случаях:*

1) центр z *звезды* H *является внутренней вершиной* $V(G)$;

2) центр z *звезды* H *является крайней вершиной* $V(G)$, *но существует вершина* $v \in G \setminus H$, *являющаяся внутренней вершиной* $V(G)$;

3) центр z *звезды* H *и все вершины* $G \setminus H$ *являются крайними вершинами* $V(G)$, *но существует вершина* $v \in G \setminus H$, *такая, что в обеих полуплоскостях, определяемых прямой* (zv) *лежит четное число вершин множества* $V(G) \setminus \{z; v\}$.

Действительно, в случае 1) существует $v \in V(G) \setminus V(H)$. Тогда пусть $u_1, ..., u_{2n-2}$ обозначают элементы множества $V(G) \setminus \{z, v\}$, перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины z, начиная их обход от прямой (zv). Тогда, очевидно, что непересекающееся совершенное паросочетание P будут образовывать ребра $zv, u_1u_2, u_3u_4, ..., u_{2n-3}u_{2n-2}$ (рис. 3, *а*).

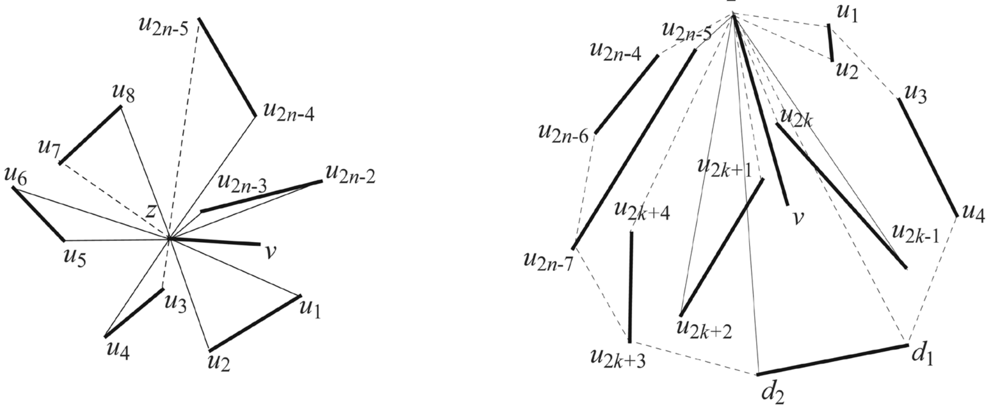

Рис. 3. Построение непересекающегося совершенного паросочетания P

В случае 2) будем рассматривать две возможности: а) в каждой полуплоскости, определяемой прямой (zv), лежит четное число вершин; б) в каждой полуплоскости, определяемой прямой (zv), лежит нечетное число вершин. Если выполняется условие а), то пусть $u_1, \ldots, u_{2k}$ обозначают элементы множества $V(G)\backslash\{z, v\}$, перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины z и лежащие слева от прямой (zv), а $u_{2k+1}, \ldots, u_{2n-2}$ обозначают элементы множества $V(G)\backslash\{z, v\}$, перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины z и лежащие справа от прямой (zv). Тогда, очевидно, что непересекающееся совершенное паросочетание P будут образовывать ребра $zv, u_1u_2, \ldots, u_{2k-1}u_{2k}, u_{2k+1}u_{2k+2}, \ldots, u_{2n-3}u_{2n-2}$. При выполнении условия б) пусть вершина v лежит внутри треугольника Δzd_1d_2, где вершины d_1, d_2 являются двумя последовательными крайними вершинами границы $\mathrm{conv}(V(G))$. Пусть теперь $u_1, \ldots, u_{2k}$ обозначают элементы множества $V(G)\backslash\{z, v, d_1, d_2\}$, перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины z и лежащие слева от прямой (zv), а $u_{2k+1}, \ldots, u_{2n-4}$ обозначают элементы множества $V(G)\backslash\{z, v, d_1, d_2\}$, перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины z и лежащие справа от прямой (zv). Тогда поскольку ребро d_1d_2 не пересекает никакое ребро из $E(G)$, то непересекающееся совершенное паросочетание P будут образовывать ребра $zv, u_1u_2, \ldots, u_{2k-1}u_{2k}, d_1d_2, u_{2k+1}u_{2k+2}, \ldots, u_{2n-5}u_{2n-4}$ (рис. 3, *б*).

В случае 3) пусть $u_1, \ldots, u_{2k}$ обозначают элементы множества $V(G)\backslash\{z, v\}$, перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины z и лежащие слева от прямой (zv), а $u_{2k+1}, \ldots, u_{2n-2}$ обозначают элементы множества $V(G)\backslash\{z, v\}$, перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины z и лежащие справа от прямой (zv). Тогда, очевидно, что непересекающееся совершенное паросочетание P будут образовывать ребра $zv, u_1u_2, \ldots, u_{2k-1}u_{2k}, u_{2k+1}u_{2k+2}, \ldots, u_{2n-3}u_{2n-2}$.

Наконец, пусть в оставшемся случае, т. е. когда центр z звезды H и все вершины $G \setminus H$ являются крайними вершинами $V(G)$, но не существует вершины $v \in G \setminus H$, такой, что в обеих полуплоскостях, определяемых прямой (zv), лежит четное число вершин множества $V(G) \setminus \{z; v\}$, дополнение $G - H$ содержит непересекающееся совершенное паросочетание P. Тогда для некоторой крайней вершины $v \in G \setminus H$ $zv \in P$. Но в силу выпуклости $\mathrm{conv}(V(G))$ паросочетание P не может содержать ребро с концевыми вершинами, лежащими в разных полуплоскостях, определяемых прямой (zv). А значит, вершины G, лежащие слева и справа от прямой (zv) должны образовывать два отдельных непересекающихся подпаросочетания, следовательно, число вершин, лежащих слева и справа от прямой (zv), должно быть четным, противоречие. Теорема доказана.

В частности, отсюда вытекает следующее утверждение.

С л е д с т в и е. *Пусть* $H = K_{1,m}$ *– звезда, являющаяся подграфом полного графа* $G = K_{2n}$ *на* $2n$ *вершинах, причем* $|\mathrm{int}(V(G))| \geq (m - 1)$ и $m + 1 < 2n$. *Тогда дополнение* $G - H$ *содержит непересекающееся совершенное паросочетание.*

Действительно, в силу условия следствия, если центр z звезды H является крайней вершиной $V(G)$ и не существует вершины $v \in G \setminus H$, являющейся внутренней вершиной $V(G)$, то, по крайней мере, одно из двух ребер границы $\mathrm{conv}(V(G))$ инцидентных z, не принадлежит $E(H)$. В то же время очевидно, что для такого ребра vd четное множество вершин $V(G) \setminus \{v, d\}$ лежит в одной полуплоскости, определяемой прямой (vd).

Т е о р е м а 4. *Для произвольного дерева* H *порядка* $(n + 1)$ *полного графа* $G = K_{2n}$ *на* $2n$ *вершинах, такого, что* $|\mathrm{int}(V(G))| \leq (n - 1)$, *геометрическое дополнение* $G - H$ *содержит непересекающееся совершенное паросочетание.*

Для доказательства этой теоремы будем использовать следующие утверждения.

Л е м м а 3. *Полный двудольный граф* $G = K_{m,m}$ *всегда содержит непересекающееся совершенное паросочетание.*

Доказательство этой леммы основано на существовании совершенного паросочетания минимальной длины, которое является непересекающимся в силу свойства четырехугольника, заключающегося в том, что сумма его диагоналей больше суммы противоположных сторон.

Л е м м а 4. *Для произвольной равномерной раскраски вершин графа* G *и произвольной крайней вершины* v_0 *множества* $V(G)$ *всегда существует сбалансированная прямая, проходящая через нее.*

Действительно, пусть $u_1, \ldots, u_{2n-1}$ обозначают элементы множества $V \backslash \{v\}$, перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины v. Без ограничения общности можно предположить, что вершина v закрашена в белый цвет. Если вершины u_1 или u_{2n-1} окрашены в черный цвет, то утверждение очевидно, так как в этом случае прямая (vu_1) или (vu_{2n-1}) соответственно является сбалансированной. Иначе, начнем вращать прямую (vu_1) по часовой стрелке вокруг вершины v, отслеживая значение l, равное разности между числом вершин, окрашенных в белый цвет, и вершин, окрашенных в черный цвет, лежащих в левой полуплоскости от этой прямой. В момент, когда эта прямая проходит через вершину u_2, имеем $l = 1$. В конце, когда прямая проходит через точку u_{2n-1} имеем $l = -2$. Каждый раз, когда прямая проходит через новую точку, значение l изменяется на 1. Поэтому существует максимальный индекс $i > 2$, такой, что слева от прямой (vu_i) значение $l = 0$. В силу максимальности i, вершина u_i должна быть окрашена в черный цвет. Следовательно, значение r разности между числом вершин, окрашенных в белый цвет, и вершин, окрашенных в черный цвет, лежащих в правой полуплоскости от прямой (vu_i), также равно $r = 0$, т. е. прямая (vu_i) является сбалансированной. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать теорему 4. Так как порядок дерева H равен $(n + 1)$, а число внутренних вершин $|\mathrm{int}(V(G))| \le (n - 1)$, то на выпуклой оболочке $\mathrm{conv}(V(G))$ лежат, по крайней мере, две различные вершины v и w, которые принадлежат дереву H. Положим

$$V_1 = V(H) \setminus \{w\}, \quad V_2 = V(G) \setminus V_1.$$

Очевидно, что $|V|_1 = |V_2| = n$. Поэтому по лемме 4 для крайней вершины v существует сбалансированная прямая L_v.

Если прямая $L_v = (vu)$ и $vu \notin E(H)$, то легко построить требуемое непересекающееся совершенное паросочетание: в каждой полуплоскости, определяемой прямой L_v, по лемме 3 можно построить непересекающиеся совершенные паросочетания P_1, P_2, объединение которых вместе с ребром vu и будет искомым паросочетанием.

Пусть теперь $L_v = (vw)$ и $vw \in E(H)$. Из связности дерева H следует, что выполняется, по крайней мере, одно из неравенств: $\mathrm{ord}_H(v) \ge 2$ или $\mathrm{ord}_H(w) \ge 2$. Пусть, например, $\mathrm{ord}_H(v) \ge 2$, и инцидентные (в полном графе G) вершине v ребра vu_1, vu_2 лежат на границе выпуклой оболочки $\mathrm{conv}(V(G))$.

Покажем, что если хотя бы одно из этих ребер не принадлежит дереву H, то можно построить требуемое непересекающееся совершенное паросочетание. Действительно, пусть $vu_1 \notin E(H)$. Тогда положим $V' = V(G) \setminus \{v, u_1\}$ и рассмотрим индуцированные графы $G[V_1] = K_{2n-2}$ и $H[V_1 \bigcap V(H)]$. Очевидно, что $|E(H_1)| \le n - 2$, поэтому по теореме 2 в графе $K_{2(n-1)} - H_1$ существует непересекающееся совершенное паросочетание P_1, которое вместе с ребром vu_1 образует искомое паросочетание в графе $G - H$.

Поэтому можно считать, что оба ребра $vu_1, vu_2 \in E(H)$. Следовательно, по крайней мере, одна из вершин u_1 или u_2 отлична от вершины w. Пусть $u_1 \ne w$. Тогда для прежней раскраски и крайней вершины u_1 по лемме 4 существует сбалансированная прямая L_{u_1}. В силу отсутствия циклов в дереве H имеем $u_1 w \notin E(H)$, поэтому $L_{u_1} = (u_1 x)$ и $u_1 x \notin E(H)$. А значит, как указано выше, можно построить требуемое непересекающееся совершенное паросочетание. Теорема 4 доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект № Ф14РА-004).

Список использованной литературы

1. *Ishaque, M.* Disjoint compatible geometric matchings / M. Ishaque, D. L. Souvaine, C. D. Tóth // Proceedingsof the 27th Symposium on Computational Geometry (Paris, 2011). – New York, 2011. – P. 125–134.

2. *Bose, P.* Growing a tree from its branches / P. Bose, G. T. Toussaint, // J. Algorithm. – 1995. – Vol. 19, N 1. – P. 86–103.

3. *Bose, P.* Every set of disjoint segments admits a binary tree / P. Bose, M. E. Houle, G. T. Toussaint // Discr. Comput. Geom. – 2001. – Vol. 26, N 3. – P. 387–410.

4. *Hoffmann, M.* Pointed binary encompassing trees: simple and optimal / M. Hoffmann, C. D. Toth // Comput. Geom. Theor. Appl. – 2010. – Vol. 43, N 1. – P. 35–41.

5. *Souvaine, D. L.* A vertex-face assignment for plane graphs / D. L. Souvaine, C. D. Tóth, // Comp. Geom. Theor. Appl. – 2009. – Vol. 42, N 5. – P. 388–394.

6. *Rappaport, D.* Computing simple circuits from a set of line segments is NP-complete / D. Rappaport // SIAM J. Comput. – 1989. – Vol. 18, N 6. – P. 1128–1139.

7. Compatible geometric matchings / O. Aichholzer [et al.] // Comp. Geom. Theor. Appl. – 2009. – Vol. 42. – P. 617–626.

8. Convex partitions with 2-edge connected dual graphs / M. Al-Jubeh [et al.] // J. Combin. Opt. – 2011. – Vol. 22, N 3. – P. 409–425.

9. Edge-removal and non-crossing configurations in geometric graphs / O. Aichholzer [et al.] // Discr. Math. Theor. Comput. Sci. – 2010. – Vol. 12, N 1. – P. 75–86.

Поступило в редакцию 21.12.2015