Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **июль–август** **Том 60 № 4**

УДК 519.1

П. А. ИРЖАВСКИЙ, Ю. А. КАРТЫННИК, Ю. Л. ОРЛОВИЧ

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ 1-ТРЕУГОЛЬНЫХ ГРАФОВ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
irzhavski@bsu.by; kartynnik@bsu.by; orlovich@bsu.by

Граф называется 1-треугольным, если для любого максимального независимого множества *I* этого графа каждое ребро графа, не инцидентное ни одной вершине из *I*, образует единственный треугольник с вершиной из множества *I*. В работе получена структурная характеризация класса 1-треугольных графов, которая влечёт полиномиальный алгоритм их распознавания.

Ключевые слова: треугольный граф, рёберно-симплициальный граф, характеризация, независимое множество, совершенное окрестностное множество.

P. A. IRZHAVSKI, Yu. A. KARTYNNIK, Yu. L. ORLOVICH

A CHARACTERIZATION OF 1-TRIANGLE GRAPHS

Belarusian State University, Minsk, Belarus
irzhavski@bsu.by; kartynnik@bsu.by; orlovich@bsu.by

A graph is called 1-triangle if for each maximal independent set *I*, each edge of this graph with both end vertices not belonging to *I* forms exactly one triangle with a vertex from the set *I*. We have obtained a structural characterization of 1-triangle graphs which implies a polynomial time recognition algorithm for this class of graphs.

Keywords: triangle graph, edge simplicial graph, characterization, independent set, perfect neighbourhood set.

Введение. Теоретико-графовые понятия и обозначения, не оговоренные специально, следуют [1]. Под *графом* G всюду понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных рёбер с множеством вершин $V(G)$ и множеством рёбер $E(G)$. Число $|V(G)|$ вершин графа G называется его *порядком* и обозначается $|G|$. Множество всех вершин графа G, смежных с вершиной v, называется *окружением* вершины v и обозначается $N(v)$; *замкнутым окружением* вершины v называется множество $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Для произвольного подмножества $X \subseteq V(G)$ положим $N(X) = \bigcup_{v \in X} N(v) \setminus X$ и $N[X] = N(X) \cup X$ – *окружение* и *замкнутое окружение* множества X соответственно. *Замкнутым собственным окружением* произвольного ребра $e = uv \in E(G)$ называется множество вершин $PN[e] = N[u] \cap N[v]$. Подграф графа G, порождённый множеством вершин $X \subseteq V(G)$, обозначается через $G(x)$; положим $G - X = G(V(G) \setminus X)$. Граф G называется *H-свободным* для некоторого графа H, если G не содержит порождённых подграфов, изоморфных H. Через $K_4 - e$ будем обозначать граф, получаемый удалением произвольного ребра из полного графа K_4. Тогда $(K_4 - e)$-*свободный граф* – это граф, не содержащий порождённых подграфов, изоморфных $K_4 - e$.

Множество попарно несмежных вершин графа называется *независимым*. Независимое множество вершин графа называется *максимальным*, если оно не является подмножеством никакого другого независимого множества этого графа. Множество попарно смежных вершин графа называется *кликой*. Клика графа называется *максимальной*, если она не является подмножеством никакой другой клики этого графа. Если для вершины v клики C выполнено равенство $N[v] = C$, то вершина v называется *симплициальной вершиной*, а C – *симплициальной кликой*. Каждая симплициальная клика, очевидно, является максимальной.

Граф G называется *общим графом разбиений*, если существует множество S произвольной природы, для которого выполнены следующие условия:

1) каждой вершине $v \in V(G)$ можно поставить в соответствие непустое подмножество S_v множества S так, что две вершины u и v смежны в графе G тогда и только тогда, когда $S_u \cap S_v \neq \varnothing$;

2) для каждого максимального независимого множества I графа G набор подмножеств $\{S_v \mid v \in I\}$ является разбиением множества S.

Общие графы разбиений изучались ДеТемпл и соавт. в связи с триангуляциями многоугольников на целочисленной решётке [2], а также в более общем контексте [3–5]. Было обнаружено следующее необходимое «треугольное» условие принадлежности графа G классу общих графов разбиений ([5], «условие Т»; также см. [3], теорема 2): для каждого максимального независимого множества I графа G и каждого ребра $uv \in E(G-I)$ найдётся вершина $w \in I$, одновременно смежная с вершинами u и v (т. е. множество вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G).

Изначальное предположение о том, что треугольное условие может являться достаточным для принадлежности графа классу общих графов разбиений, хотя и справедливо для AT-свободных графов и специальных графовых произведений [6], а также планарных графов [7], в общем случае оказалось верным лишь для графов порядка не более 8 [8] (в [9] построена бесконечная серия контрпримеров). Орлович и Зверович [10] назвали *треугольными* графы, удовлетворяющие треугольному условию.

Интерес к классу треугольных графов также обусловил результат Миклавича и Миланича [6] о том, что промежуточными звеньями в цепи включений между классом общих графов разбиений и классом треугольных графов являются классы *строго эквистабильных* и *эквистабильных* графов, фигурирующие в известной гипотезе Махадева, Пеледа и Сана [11]. Гипотеза заключалась в совпадении классов строго эквистабильных и эквистабильных графов. Миклавич и Миланич привели гипотезу о том, что оба эти класса совпадают с классом общих графов разбиений, которая оказалась верной в целом ряде частных случаев [6; 12]. Впоследствии указанные гипотезы были опровергнуты для общего случая Миланичем и Тротиньоном [13], доказавшими попарное различие всех трёх классов графов, т. е. классов общих графов разбиений, строго эквистабильных и эквистабильных графов. Борош, Гурвич и Миланич [14] приводят обширную иерархию классов графов, связанных с треугольными. В неё также входит класс *CIS-графов* (от англ. «Clique/Independent Set»), характеризующихся тем, что каждая максимальная клика в таком графе имеет непустое пересечение с каждым максимальным независимым множеством.

Множество D вершин графа G называется *доминирующим*, если $N[D] = V(G)$. Доминирующее множество D графа G называется *минимальным*, если оно не содержит никакого другого доминирующего множества этого графа. Множество вершин графа называется *независимым доминирующим*, если оно является одновременно независимым и доминирующим. Доминирующее множество D графа G называется *окрестностным* [15], если для каждого ребра $uv \in E(G-D)$ в D найдётся вершина, смежная одновременно с обоими его концами u и v. Это эквивалентно тому, что $G = \bigcup_{v \in D} G(N[v])$. Окрестностное множество графа G называется *минимальным*, если оно не содержит никакого другого окрестностного множества этого графа. Окрестностное множество D графа G называется *независимым окрестностным*, если оно является одновременно независимым и окрестностным; и *совершенным окрестностным*, если для любых двух различных вершин $u, v \in D$ подграфы, порождённые их замкнутыми окружениями $N[u]$ и $N[v]$, не имеют общих рёбер (в частности, каждое совершенное окрестностное множество является независимым) [16]. Множество R вершин графа G называется *избыточным*, если удаление некоторой вершины v из R не изменяет его замкнутого окружения, т. е. $N[R] = N[R \setminus \{v\}]$; и *неизбыточным*, или *ирридантным*, в случае, если такой вершины не существует [17]. Ирридантное множество вершин графа G называется *максимальным*, если оно не является подмножеством никакого другого ирридантного множества вершин этого графа. Заметим, что в произвольном графе каждое максимальное независимое множество является минимальным доминирующим, а каждое минимальное доминирующее множество является максимальным ирридантным.

В [18] был введён класс *доминантно-треугольных* графов (и класс *ирридантно-треугольных* графов) как графов, в которых каждое минимальное доминирующее (соответственно максимальное иррицантное) множество является окрестностным. Такие графы, очевидно, являются треугольными. Было показано, что классы доминантно-треугольных и ирридантно-треугольных графов совпадают и характеризуются в точности «условием Е» из [19], достаточным для принадлежности графа классу общих графов разбиений и заключающемся в том, что каждое ребро графа принадлежит подграфу, порождённому симплициальной кликой. Этим «рёберным» условием определяется класс *рёберно-симплициальных* графов, известный также как класс *графов верхних границ* [20]. Для этого класса графов существует алгоритм распознавания со сложностью $O(|V(G)|+|E(G)|)$, основанный на перечислении симплициальных клик [21]. В каждом доминантно-треугольном графе семейства всех максимальных ирридантных множеств, всех минимальных доминирующих множеств и всех минимальных окрестностных множеств совпадают.

В настоящей работе вводится и характеризуется класс 1-треугольных графов, основанный на дополнительном ограничении о единственности треугольника в формулировке треугольного условия. Устанавливается, что класс 1-треугольных графов совпадает с классами (K_4-e)-свободных CIS-графов и (K_4-e)-свободных треугольных графов. Получаемая впоследствии структурная характеризация 1-треугольных графов влечёт полиномиальный алгоритм их распознавания и указывает на тесную связь класса 1-треугольных графов с классом доминантно-треугольных графов. Именно, каждый связный 1-треугольный граф принадлежит хотя бы одному из следующих семейств графов: полные двудольные $K_{m,n}$, декартовы произведения $K_m \times K_m$ двух полных графов одинакового порядка, (K_4-e)-свободные доминантно-треугольные.

Свойства (K_4-e)-свободных графов. При характеризации 1-треугольных графов потребуются следующие утверждения о (K_4-e)-свободных графах, приводимые здесь без доказательства (большинство из них, по-видимому, общеизвестны).

Т е о р е м а 1. *Граф G является (K_4-e)-свободным тогда и только тогда, когда любые две различные максимальные клики графа G имеют не более одной общей вершины.*

С л е д с т в и е 1. *Пусть C – произвольная максимальная клика (K_4-e)-свободного графа G. Тогда любая вершина $x \in V(G) \setminus C$ смежна не более чем с одной вершиной из C.*

С л е д с т в и е 2. *Пусть C, C_1 и C_2 – попарно различные максимальные клики (K_4-e)-свободного графа G, и пусть $u \in C \cap C_1$, $v \in C \cap C_2$, $u \neq v$. Тогда клики C_1 и C_2 не пересекаются.*

С л е д с т в и е 3. *Пусть C, C_1 и C_2 – попарно различные максимальные клики (K_4-e)-свободного графа G, и пусть $u \in C \cap C_1$, $v \in C \cap C_2$, $u \neq v$. Тогда никакие две различные вершины $u', u'' \in C_1$ не смежны одновременно с одной и той же вершиной $v' \in C_2$.*

Т е о р е м а 2. *Граф G является (K_4-e)-свободным тогда и только тогда, когда для каждого ребра $e \in E(G)$ его замкнутое собственное окружение $PN[e]$ является максимальной кликой.*

Свойства 1-треугольных графов. Заметим, что граф является треугольным тогда и только тогда, когда каждое максимальное независимое множество графа является его независимым окрестностным множеством. Граф G назовём 1-*треугольным*, если для каждого максимального независимого множества I графа G и каждого ребра $uv \in E(G-I)$ найдётся единственная вершина $w \in I$, одновременно смежная с вершинами u и v (т. е. множество вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G). Иными словами, как нетрудно видеть, граф является 1-треугольным, если и только если каждое его максимальное независимое множество является совершенным окрестностным. Каждый 1-треугольный граф, очевидно, является треугольным.

Т е о р е м а 3. Для *графа G следующие утверждения эквивалентны:*

1) G – 1-треугольный граф;

2) G – (K_4-e)-свободный треугольный граф;

3) G – (K_4-e)-свободный CIS-граф.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть G – 1-треугольный граф. Следовательно, он является треугольным. Требуется доказать, что в G нет порождённых подграфов, изоморфных K_4-e. Пусть, напротив, порождённый подграф $G(\{u, v, x, y\})$ изоморфен K_4-e, причём вершины x и y не смежны. Рассмотрим произвольное максимальное независимое множество I в графе G, содержащее вершины x и y. Тогда ребро $uv \in E(G-I)$ содержится по крайней мере в двух треугольниках $G(\{u, v, x\})$ и $G(\{u, v, y\})$, что противоречит свойству 1-треугольности графа G.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть G – $(K_4 - e)$-свободный треугольный граф. Покажем, что он является CIS-графом. Рассмотрим произвольную максимальную клику C этого графа. Если $|C| = 1$, то единственная вершина этой клики – изолированная и потому принадлежит каждому максимальному независимому множеству графа G. Иначе найдётся ребро $uv \in E(G)$, для которого $u, v \in C$. По теореме 2 замкнутое собственное окружение $PN[uv]$ ребра uv является максимальной кликой. Поскольку каждая клика, содержащая вершины u и v, является подмножеством $PN[uv]$, имеем $PN[uv] = C$. Треугольное свойство графа G эквивалентно тому, что каждое максимальное независимое множество I графа G пересекается с замкнутым собственным окружением $PN[e]$ каждого ребра $e \in E(G)$. В частности, каждое максимальное независимое множество I графа G пересекается с $PN[uv] = C$. Таким образом, каждая максимальная клика $C \subseteq V(G)$ пересекается с каждым максимальным независимым множеством $I \subseteq V(G)$, т. е. G является CIS-графом.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть G – $(K_4 - e)$-свободный CIS-граф. Рассмотрим произвольное максимальное независимое множество $I \subseteq V(G)$ и любое ребро $e \in E(G)$. По теореме 2 замкнутое собственное окружение $PN[e]$ ребра e является максимальной кликой, поэтому в CIS-графе G максимальная клика $PN[e]$ и максимальное независимое множество I имеют ровно одну общую вершину, т. е. $|PN[e] \cap I| = 1$. В силу произвольности I и e это эквивалентно тому, что граф G является 1-треугольным. Теорема доказана.

Порождённая цепь $P_4 = (a, b, c, d)$ в графе G называется *плохой* P_4, если в этом графе существует максимальное независимое множество I, содержащее вершины a и d и не содержащее ни одной вершины, смежной с обеими вершинами b и c одновременно [6].

В дальнейшем будем опираться на следующую характеризацию треугольных графов, в которой нетрудно убедиться непосредственно.

Т е о р е м а 4 ([6]). *Граф G является треугольным тогда и только тогда, когда он не содержит плохих* P_4.

С л е д с т в и е 4. *Полный двудольный граф $K_{m,n}$ является* 1-*треугольным для любых* $m, n \geq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Граф $K_{m,n}$ не содержит треугольников и поэтому является $(K_4 - e)$-свободным. Кроме того, он не содержит порождённых цепей P_4 и поэтому является треугольным по теореме 4. Следовательно, по теореме 3 он является 1-треугольным. Следствие доказано.

Т е о р е м а 5. *Если связный* 1-*треугольный граф G содержит двухвершинную максимальную клику, не являющуюся симплициальной, то G является полным двудольным графом с долями мощности не менее* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что вершины x и y образуют двухвершинную максимальную клику в графе G, не являющуюся симплициальной. Рассмотрим множества вершин $X = N(y)$ и $Y = N(x)$ (таким образом, $x \in X$ и $y \in Y$). Эти множества не пересекаются в силу максимальности клики $\{x, y\}$. Каждое из них содержит не менее двух вершин, иначе клика $\{x, y\}$ была бы симплициальной.

Докажем, что каждая вершина множества X смежна с каждой вершиной множества Y. Это нужно доказать только для произвольных вершин $x' \in X$ и $y' \in Y$, отличных от x и y соответственно. Предположим, что вершины x' и y' не смежны. Рассмотрим произвольное максимальное независимое множество I графа G, содержащее x' и y'. Множество I обладает тем свойством, что в нём нет вершины, которая вместе с x и y порождает треугольник в графе G. Но тогда порождённая цепь (x', y, x, y') является плохой P_4, что противоречит теореме 4.

Докажем далее, что X и Y – независимые множества вершин в графе G. Без ограничения общности проведём доказательство лишь для множества X. Итак, допустим, что две вершины $x', x'' \in X$ смежны. В множестве Y выберем вершину y и произвольную отличную от неё вершину y', тогда y и y' будут несмежны (иначе $y' \in Y \cap N(y) = Y \cap X$, что невозможно). В результате получим изоморфный $K_4 - e$ порождённый подграф $G(\{x', x'', y, y'\})$, что противоречит свойству 1-треугольности графа G по теореме 3.

Наконец, предположим, что в графе G найдется вершина z, не принадлежащая множеству $X \cup Y$. В силу связности графа G без ограничения общности можно считать, что вершина z смежна с некоторой вершиной $x^* \in X$. При этом вершина z не смежна с вершиной x, так как $z \notin Y = N(x)$. Тогда порождённая цепь (z, x^*, y, x) является плохой P_4. Действительно, предположим, что в произвольном максимальном независимом множестве I графа G, содержащем вершины x и z, нашлась вершина $w \in I$, смежная одновременно с x^* и y. Тогда вершины $x^* \in X$ и $w \in N(y) = X$ смежны, что противоречит независимости множества X. Наличие указанной плохой P_4 снова противоречит свойству 1-треугольности графа G.

Таким образом, граф G является полным двудольным графом с долями $X = N(y)$ и $Y = N(x)$, при этом $|X| \geq 2$ и $|Y| \geq 2$. Теорема доказана.

Отметим, что все полные двудольные графы вида $K_{1,n}$ являются рёберно-симплициальными.

Т е о р е м а 6 ([6]). *Пусть* $G \cong K_{n_1} \times K_{n_2} \times \ldots \times K_{n_k}$, $k \geq 2, n_i \geq 2$. *Граф* G *является треугольным тогда и только тогда, когда* $k = 2$ *и* $n_1 = n_2$, *т. е.* $G \cong K_m \times K_m$ *для некоторого целого числа* $m \geq 2$.

С л е д с т в и е 5. *Граф* $K_m \times K_m$ *является* 1-*треугольным для любого целого числа* $m \geq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай $m = 1$ тривиален. Для случая $m \geq 2$ граф $G = K_m \times K_m$ является треугольным по теореме 6. Как нетрудно видеть, замкнутое собственное окружение каждого ребра графа G является максимальной кликой, поэтому по теореме 2 граф G – $(K_4 - e)$-свободный. Но тогда $(K_4 - e)$-свободный треугольный граф G является 1-треугольным по теореме 3. Следствие доказано.

Отметим, что декартово произведение $K_m \times K_m$ двух полных графов порядка m изоморфно рёберному графу $L(K_{m,m})$ от m-регулярного полного двудольного графа $K_{m,m}$.

Характеризация 1-треугольных графов. Напомним, что граф является рёберно-симплициальным, если каждое его ребро принадлежит подграфу, порождённому некоторой симплициальной кликой. Напомним также, что класс рёберно-симплициальных графов совпадает с классом доминантно-треугольных (и ирридантно-треугольных) графов.

Т е о р е м а 7. *Для связного графа* G *следующие утверждения эквивалентны:*

1) G – 1-*треугольный граф.*

2) Выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

(а) G *– полный двудольный граф;*

(б) G *– декартово произведение* $K_m \times K_m$ *двух полных графов равных порядков для некоторого натурального числа* m*;*

(в) G – $(K_4 - e)$-*свободный рёберно-симплициальный граф.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 2) $\Rightarrow$ 1). Покажем, что каждое из трёх условий утверждения 2) влечёт свойство 1-треугольности для графа G.

(а) Если G – полный двудольный граф, то он является 1-треугольным по следствию 4.

(б) Если граф G изоморфен $K_m \times K_m$, то он является 1-треугольным по следствию 5.

(в) Если граф G рёберно-симплициальный, то он является доминантно-треугольным и, следовательно, треугольным [18; 19]. В силу того, что G – $(K_4 - e)$-свободный граф, G является 1-треугольным по теореме 3.

1) $\Rightarrow$ 2). Непосредственная проверка показывает, что все связные графы порядка меньше четырёх являются 1-треугольными и рёберно-симплициальными. Пусть G – связный 1-треугольный граф порядка $|G| \geq 4$. Предположим, что G не является рёберно-симплициальным графом, иначе выполнено условие (в) утверждения 2).

Тогда в графе G существует несимплициальная максимальная клика C, т. е. обладающая тем свойством, что каждая её вершина принадлежит по крайней мере двум максимальным кликам этого графа. Обозначим $k = |C|$. Если $k = 2$, то по теореме 5 граф G является полным двудольным и, следовательно, выполнено условие (а) утверждения 2). Поэтому далее будем считать, что $k \geq 3$. Для каждой вершины v клики C зафиксируем клику C_v – произвольную из максимальных клик, отличных от C и содержащих v (согласно теореме 1, $C \cap C_v = \{v\}$). Для удобства дальнейших рассуждений введём обозначение $C'_v = C_v \setminus \{v\}$. Тогда $C'_v \cap C = \varnothing$ для всех $v \in C$.

Напомним, что 1-треугольный граф G является $(K_4 - e)$-свободным CIS-графом согласно теореме 3. По теореме 1 любые две его максимальные клики имеют не более одной общей вершины. По следствию 2 клики C_u и C_v не пересекаются для любых различных вершин $u, v \in C$. Это позволяет корректно ввести обозначение $r(v') = v$ для всех вершин v' каждой клики C_v, $v \in C$. По следствию 3 для любых двух различных клик C_u и C_v, $u, v \in C$, никакие две различные вершины $u', u'' \in C_u$ не смежны одновременно с одной и той же вершиной $v' \in C_v$.

В процессе доказательства теоремы все вспомогательные утверждения будут формулироваться в текущих предположениях: граф G – 1-треугольный, C – несимплициальная максимальная клика мощности $k \geq 3$ в этом графе; для каждой вершины v клики C зафиксирована другая содержащая эту вершину максимальная клика C_v, причём $C \cap C_v = \{v\}$ (клики C_v, $v \in C$, попарно не пересекаются); введены обозначения $C'_v = C_v \setminus \{v\}$ и $r(v') = v$ для всех $v' \in C_v$.

Л е м м а 1. *Пусть задано независимое множество $I_0 \subseteq \bigcup_{v \in C} C'_v$, содержащее по одной вершине некоторых из клик C'_v, $v \in C$ (возможно пустое). Обозначим $Z(I_0) = C \setminus \{r(v') \mid v' \in I_0\}$. Тогда множество $Z(I_0)$ непусто, а для любой вершины $z \in Z(I_0)$ существует независимое множество $\mathcal{I}(I_0, z)$, включающее I_0 и содержащее по одной вершине из каждой клики C'_x, $x \in Z(I_0) \setminus \{z\}$. Более того, существует такая биекция $f_{\mathcal{I}} : C'_z \to \mathcal{I}(I_0, z)$, для которой две произвольные вершины $z' \in C'_z$ и $w \in \mathcal{I}(I_0, z)$ смежны в графе G тогда и только тогда, когда $f_{\mathcal{I}}(z') = w$. Другими словами, подграф графа G, порождённый множеством рёбер $\{z'w \mid z' \in C'_z, w \in \mathcal{I}(I_0, z)\}$, является совершенным паросочетанием.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $Z(I_0) = \varnothing$, то I_0 содержит по одной вершине из каждой клики C'_v, $v \in C$. Но тогда после дополнения I_0 до максимального независимого множества I' приходим к противоречию с теоремой 3, поскольку клика C не имеет общих вершин с I', что невозможно в CIS-графе G.

Поэтому $Z(I_0) \neq \varnothing$. Введём обозначение $\mathbf{C}' = \{C'_v \mid v \in Z(I_0)\}$. Занумеруем элементы множества $\mathbf{C}'$ натуральными числами от 1 до $|\mathbf{C}'|$ в произвольном порядке так, чтобы клика C'_z имела наибольший номер. Будем строить независимое множество I, начиная с множества вершин I_0 и последовательно, пока это возможно, добавляя в него по одной вершине x', не смежной с ранее выбранными вершинами, из каждой клики $C'_x \in \mathbf{C}'$ в порядке возрастания номеров клик.

Если бы, действуя по указанной схеме, удалось включить во множество I по одной вершине из каждой клики $C'_x \in \mathbf{C}'$, то после дополнения I до максимального независимого множества I' снова получили бы противоречие с теоремой 3.

Таким образом, описанный процесс построения множества I останавливается на некоторой клике $C'_x \in \mathbf{C}'$ по той причине, что каждая вершина из C'_x смежна с некоторой вершиной из I. Введём отображение $f : C'_x \to I$, которое ставит в соответствие каждой вершине $x' \in C'_x$ некоторую смежную с ней вершину $f(x') \in I$. Отображение f инъективно, так как наличие двух различных вершин $x', x'' \in C'_x$, одновременно смежных с $f(x') = f(x'') \in V(G) \setminus C_x$, противоречит следствию 1. Обозначим через I^* образ множества C'_x при отображении f. Тогда сужение $f : C'_x \to I^*$ будет биекцией.

Предположим теперь, что имеется клика C'_y, $y \in Z(I_0)$, отличная от C'_x, для которой $I^* \cap C'_y = \varnothing$. Тогда вершина y не смежна ни с одной вершиной из I^* по следствию 1. Поэтому, дополнив множество $I^* \cup \{y\}$ до максимального независимого множества I', получим $I' \cap C_x = \varnothing$, что невозможно в CIS-графе G.

Из этого следует, что процесс построения множества I не мог остановиться раньше, чем на клике C'_z с наибольшим номером, поэтому $x = z$. Также из этого следует, что $I \setminus I^* = \varnothing$, поэтому $f : C'_z \to I$ – требуемая биекция. Таким образом, можно положить $\mathcal{I}(I_0, z) = I$ и $f_{\mathcal{I}} = f$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 6. *Для любой вершины $v \in C$ выполняется соотношение*

$$|C_v| = |C'_v| + 1 = |C| = k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим по лемме 1 независимое множество $I = \mathcal{I}(\varnothing, v)$. Из существования биекции $f_{\mathcal{I}}$ между C'_v и множеством I, содержащим ровно по одной вершине каждой из остальных клик C_u, $u \neq v$, следует, что

$$|C'_v| = |I| = |C \setminus \{v\}| = |C| - 1 = k - 1.$$

Следствие доказано.

С л е д с т в и е 7. *Каждая вершина из любой клики C_x смежна ровно с одной вершиной из каждой другой клики C_y.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любая вершина $x' \in C_x$ не может быть смежна с двумя различными вершинами клики C_y по следствию 3. Поэтому достаточно показать, что каждая вершина $x' \in C_x$

смежна хотя бы с одной вершиной клики C_y. Это верно для вершины x, которая смежна с вершиной $y \in C_y$. Рассмотрим произвольную вершину $x' \in C'_x$. Построим согласно лемме 1 независимое множество $\mathcal{I}(\{x'\}, y)$. Это множество будет содержать вершину x', с которой будет смежна вершина $y' = f_{\mathcal{I}}^{-1}(x') \in C'_y \subseteq C_y$. Следствие доказано.

С л е д с т в и е 8. *Пусть x, y, z – произвольные попарно различные вершины клики C. Тогда любые две вершины $y' \in C'_y$ и $z' \in C'_z$, одновременно смежные с вершиной $x' \in C'_x$, смежны между собой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: пусть вершины y' и z' несмежны. По лемме 1 построим независимое множество $I = \mathcal{I}(\{y', z'\}, x)$. Тогда вершина x' будет смежна по меньшей мере с двумя вершинами $y', z' \in I$ – противоречие с утверждением леммы 1. Следствие доказано.

Обозначим порождённый подграф $G\left(\bigcup_{v \in C} C_v\right)$ через H и полностью опишем его структуру. Для этого пронумеруем вершины клики C произвольным образом натуральными числами от 1 до k. Пусть $\alpha(v)$ – номер вершины v в клике C согласно этой нумерации. Для всех вершин v' каждой клики C'_v, $v \in C$, положим $\alpha(v') = \alpha(v)$. Зафиксируем произвольную клику C_v, $v \in C$, и также пронумеруем её вершины натуральными числами от 1 до k (независимо от номера вершины v в клике C). Пусть $\beta(v')$ – номер вершины v' в клике C_v согласно этой нумерации. Для каждой вершины $u' \in C_u$, $u \neq v$, положим $\beta(u') = \beta(v')$, где v' – единственная вершина из клики C_v, смежная с u' по следствию 7. Тогда вершины с одинаковым значением α образуют клики C_v, $v \in C$, по определению значений α, а вершины с одинаковым значением β, отличные от вершин клики C, образуют клики по следствию 8. Между вершинами порождённого подграфа H нет других рёбер по следствию 7.

Таким образом, две вершины u и v графа H смежны тогда и только тогда, когда $\alpha(u) = \alpha(v)$ или $\beta(u) = \beta(v)$. Поэтому $H \cong K_k \times K_k$.

Далее будем обозначать через $v_{i,j}$, $1 \le i, j \le k$, ту единственную вершину x графа H, для которой $\alpha(x) = i$ и $\beta(x) = j$. Введём обозначения для клик $R_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots, v_{i,k}\}$, $1 \le i \le k$, и $Q_j = \{v_{1,j}, v_{2,j}, \ldots, v_{k,j}\}, 1 \le j \le k$.

Каждая клика $R_i, 1 \le i \le k$, является максимальной в графе G по построению (она совпадает с максимальной кликой C_v для той вершины $v \in C$, для которой $\alpha(v) = i$). Покажем, что каждая клика $Q_j, 1 \le j \le k$, также является максимальной в графе G. Предположим противное: пусть, без ограничения общности, клика Q_1 не является максимальной, т. е. найдётся вершина $s \in V(G) \setminus V(H)$, для которой $Q_1 \subseteq N(s)$. Для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ вершина s не может быть смежна ни с одной из вершин $v_{i,j}$, $2 \le j \le k$, по следствию 1, поскольку она уже смежна с другой вершиной $v_{i,1}$ максимальной клики R_i. Но тогда произвольное максимальное независимое множество, содержащее независимое множество $\{s, v_{2,2}, v_{3,3}, \ldots, v_{k,k}\}$, не будет пересекаться с максимальной кликой R_1, что невозможно в CIS-графе G.

Осталось показать, что $G = H$, т. е. что в графе G нет вершин, не принадлежащих порождённому подграфу H. Предположим, что в G имеется вершина $t \notin V(H)$. В силу связности графа G без ограничения общности можно считать, что вершина t смежна в графе G хотя бы с одной вершиной подграфа H. По следствию 1 вершина t не может быть смежна одновременно с двумя вершинами u и v, принадлежащими одной максимальной клике R_i или Q_j, $1 \le i, j \le k$. Ввиду этого, опять же без ограничения общности, будем считать, что $N(t) \cap V(H) = \{v_{1,1}, v_{2,2}, \ldots, v_{r,r}\}$ для некоторого $r \le k$ (этого можно добиться перестановкой номеров внутри α- и/или β-нумерации вершин, что эквивалентно перенумерации клик R_i или Q_j). Но тогда произвольное максимальное независимое множество, содержащее независимое множество $\{t, v_{2,k}, v_{3,2}, v_{4,3}, \ldots, v_{k,k-1}\}$ (напомним, что $k \ge 3$), не будет пересекаться с максимальной кликой R_1, что невозможно в CIS-графе G.

Таким образом, $G = H \cong K_m \times K_m$ при $m = k$ и выполнено условие (б) утверждения 2). Теорема доказана.

По аналогии с классом 1-треугольных графов можно ввести классы k-треугольных графов для $k > 1$. А именно, граф G назовём *k-треугольным*, если для каждого максимального независимого множества I графа G и каждого ребра $uv \in E(G - I)$ число вершин $w \in I$, одновременно смежных с вершинами u и v (т. е. для которых множество вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G), лежит в пределах от 1 до k включительно. Задача характеризации k-треугольных графов для $k > 1$ является открытой.

Работа выполнена при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф15МЛД-022).

Список использованной литературы

1. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. – М.: Наука, 1990. – 384 с.

2. *DeTemple, D.* Graphs associated with triangulations of lattice polygons / D. DeTemple, J. M. Robertson // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1989. – Vol. 47, N 3. – P. 391–398.

3. *DeTemple, D.* Partition graphs / D. DeTemple, F. Harary, J. Robertson // Soochow J. Math. – 1987. – Vol. 13, N 2. – P. 121–129.

4. On the recognition of general partition graphs / T. Kloks [et al.] // Lect. Notes Comput. Sci. – 2003. – Vol. 2880. – P. 273–283.

5. *McAvaney, K.* A characterization and hereditary properties for partition graphs / K. McAvaney, J. Robertson, D. DeTemple // Discrete Math. – 1993. – Vol. 113, N 1–3. – P. 131–142.

6. *Miklavič, S.* Equistable graphs, general partition graphs, triangle graphs, and graph products / S. Miklavič, M. Milanič // Discrete Appl. Math. – 2011. – Vol. 159, N 11. – P. 1148–1159.

7. *Cerioli, M. R.* Structural results for general partition, equistable and triangle graphs / M. R. Cerioli, T. L. Martins // Electron. Notes Discrete Math. – 2015. – Vol. 49. – P. 713–718.

8. Recent examples in the theory of partition graphs / D. W. DeTemple [et al.] // Discrete Math. – 1993. – Vol. 113, N 1–3. – P. 255–258.

9. *Зверович, И. Е.* О графах разбиений / И. Е. Зверович, Ю. Л. Орлович // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 4. – С. 38–42.

10. *Orlovich, Yu. L.* Independent domination in triangle graphs / Y. L. Orlovich, I. E. Zverovich // Electron. Notes Discrete Math. – 2007. – Vol. 28. – P. 341–348.

11. *Mahadev, N. V. R.* Equistable graphs / N. V. R. Mahadev, U. N. Peled, F. Sun // J. Graph Theory. – 1994. – Vol. 18, N 3. – P. 281–299.

12. *Levit, V. E.* Equistable simplicial, very well-covered, and line graphs / V. E. Levit, M. Milanič // Discrete Appl. Math. – 2014. – Vol. 165. – P. 205–212.

13. *Milanič, M.* Equistarable graphs and counterexamples to three conjectures on equistable graphs / M. Milanič, N. Trotignon // ArXiv e-prints (arXiv:1407.1670) [Electronic resource]. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/1407.1670. – Date of access: 17.05.2016.

14. *Boros, E.* On equistable, split, CIS, and related classes of graphs / E. Boros, V. Gurvich, M. Milanič // ArXiv e-prints (arXiv:1505.05683) [Electronic resource]. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/1505.05683. – Date of access: 17.05.2016.

15. *Sampathkumar, E.* The neighbourhood number of a graph / E. Sampathkumar, P. S. Neeralagi // Indian J. Pure Appl. Math. – 1985. – Vol. 16. – P. 126–132.

16. *Sampathkumar, E.* Independent, perfect and connected neighbourhood numbers of a graph / E. Sampathkumar, P. S. Neeralagi // J. Combin. Inf. Syst. Sci. – 1994. – Vol. 19, N 3–4. – P. 139–145.

17. *Bollobás, B.* Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance / B. Bollobás, E. J. Cockayne // J. Graph Theory. – 1979. – Vol. 3, N 3. – P. 241–249.

18. *Картынник, Ю. А.* Доминантно-треугольные графы и графы верхних границ / Ю. А. Картынник, Ю. Л. Орлович // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 1. – С. 16–25.

19. When are chordal graphs also partition graphs? / C. Anbeek [et al.] // Australas. J. Combin. – 1997. – Vol. 16. – P. 285–293.

20. Simplicial graphs / G. A. Cheston [et al.] // Congr. Numer. – 1988. – Vol. 67. – P. 105–113.

21. *Cheston, G. A.* A survey of the algorithmic properties of simplicial, upper bound and middle graphs / G. A. Cheston, T. S. Jap // J. Graph Algorithms Appl. – 2006. – Vol. 10, N 2. – P. 159–190.

Поступило в редакцию 11.05.2016