Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 июль–август Том 60 № 4

УДК 519.872

М. А. МАТАЛЫЦКИЙ

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ В ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКЕ

(Представлено членом-корреспондентом Ю. С. Хариным)

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
m.matalytski@gmail.com

В сообщении представлены методы анализа марковских сетей массового обслуживания с доходами, которые применяются при прогнозировании ожидаемых доходов логистических транспортных систем.

Ключевые слова: логистическая транспортная система, сеть массового обслуживания, прогнозирование ожидаемых доходов.

M. A. MATALYTSKI

PROBABILISTIC ANALYSIS OF STOCHASTIC MODELS IN TRANSPORT LOGISTICS

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus
m.matalytski@gmail.com

The article presents the methods of analysis of the Markov queueing networks with incomes that are used in forecasting expected incomes of logistics transportation systems.

Keywords: logistics transportation system, queueing network, forecasting expected revenues.

Введение, постановка задачи. В последнее время большое внимание уделяется математическому моделированию и системному анализу различных экономических процессов и объектов. Математические, в частности, стохастические, модели позволяют изучать свойства и поведение реальных моделируемых объектов, не прибегая к практическим опытам, которые часто невозможно или нецелесообразно проводить. Одной из областей с широким приложением стохастических методов и моделей стала транспортная логистика.

В настоящее время осуществляется становление нового научного направления – математической логистики [1], занимающейся разработкой адекватных математических моделей функционирования логистических систем, методов их исследования, оптимизации и управления, базирующихся на использовании современного аппарата системного анализа, стохастического и компьютерного моделирования, других разделов математики и информатики.

Потоки транспортных средств (заявок), поступающих в случайные моменты времени, случайные длительности интервалов времени их обслуживания, важность рассмотрения различных производителей, складов и потребителей продукции (систем обслуживания (СМО)) как единой сети предопределили необходимость использования сетей массового обслуживания (МО) для разработки моделей функционирования логистических транспортных систем (ЛТС). Сеть МО представляет собой совокупность СМО, между которыми циркулируют заявки, переходя из одной СМО в другую.

Для различных ЛТС актуальным является решение проблем, тесно связанных с оценкой их производительности с учетом стоимости и прогнозированием доходов. Это привело к использованию новых математических моделей – марковских сетей с доходами, которые отличаются от классических тем, что требуют кроме изучения случайных процессов обслуживания заявок учитывать доходы, приносимые системам обслуживания этими заявками. В данной работе такие сети применяются при решении задач прогнозирования ожидаемых доходов в ЛТС.

Под состоянием сети МО с однотипными заявками будем понимать вектор

$$k(t) = (k,t) = (k_1,\ k_2,\ ...,\ k_n,\ t) = (k_1(t),\ k_2(t),\ ...,\ k_n(t)), \tag{1}$$

где $k_i(t)$ – число заявок (в очереди и на обслуживании) в момент времени t в системе S_i, $i = \overline{1, n}$. Пространство состояний i-й СМО, Z_i – некоторое подмножество точек с целочисленными неотрицательными координатами одномерного евклидового пространства, пространство состояний сети $Z = Z_1 \times Z_2 \times ... \times Z_n$.

Будем рассматривать экспоненциальную сеть, когда параметр входящего потока заявок зависит от времени, а параметры обслуживания заявок в СМО сети зависят от числа заявок в этих СМО. Это означает, что на интервале времени $[t, t + \Delta t)$ в сеть поступает заявка с вероятностью $\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$; если в момент времени t на обслуживании в i-й СМО находится $k_i(t)$ заявок, то на интервале $[t, t + \Delta t]$ обслуживание заявки закончится с вероятностью $\mu_i(k_i(t))\Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть $v_i(k,t)$ – полный ожидаемый доход, который получает система S_i за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии k, предположим, что эта функция дифференцируема по t. Нас будут интересовать методы нахождения функций $v_i(k,t)$, $i = \overline{1, n}$, в различных ситуациях. В последней части сообщения проведем асимптотический анализ поведения ожидаемых доходов в замкнутой сети с доходами при большом числе заявок и параметрах, зависящих от времени.

1. Случай, когда доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными функциями, зависящими от состояний сети и времени. Рассмотрим вначале случай, когда СМО сети являются однолинейными. Обозначим через $r_i(k)$ – доход системы S_i в единицу времени, когда сеть находится в состоянии k; $r_{0i}(k + I_i, t)$ – доход системы S_i, когда сеть совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k + I_i, t + \Delta t)$ за время Δt, где I_i – n-вектор, состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером i, которая равна 1; $-R_{i0}(k - I_i, t)$ – доход этой системы, если сеть совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k - I_i, t + \Delta t)$; $r_{ij}(k + I_i - I_j, t)$ – доход системы S_i (расход или убыток системы S_j), когда сеть изменяет свое состояние из (k,t) на $(k + I_i - I_j, t + \Delta t)$ за время Δt, $i, j = \overline{1, n}$. Обозначим через p_{ij} вероятность перехода заявок после обслуживания из системы S_i в систему S_j, $i, j = \overline{0, n}$, считая S_0 внешней СМО рассматриваемой сети.

Пусть сеть находится в состоянии (k,t). В течение интервала времени Δt она может остаться в этом состоянии или перейти, например, в состояния $(k - I_i, t + \Delta t)$, $(k + I_i, t + \Delta t)$, $(k + I_i - I_j, t + \Delta t)$, $i, j = \overline{1, n}$. Если сеть остается в состоянии $(k, t + \Delta t)$, ожидаемый доход системы S_i составит $r_i(k)\Delta t$ плюс ожидаемый доход $v_i(k,t)$, который она получит за оставшиеся t единиц времени. Вероятность такого события равна $1 - \left(\lambda(t) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(k_j(t))u(k_j(t))\right)\Delta t + o(\Delta t)$, где $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$ – функция Хэвисайда. Если же сеть перейдет в состояние $(k + I_i, t + \Delta t)$ с вероятностью $\lambda(t)p_{0i}\Delta t + o(\Delta t)$, доход системы S_i составит $[r_{0i}(k + I_i, t) + v_i(k + I_i, t)]$, а если в состояние $(k - I_i, t + \Delta t)$ с вероятностью $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0}\Delta t + o(\Delta t)$, то доход этой системы составит $-R_{i0}(k - I_i, t) + v_i(k - I_i, t)$, $i = \overline{1, n}$. Аналогично, если сеть переходит из состояния (k,t) в состояние $(k + I_i - I_j, t + \Delta t)$ с вероятностью $\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}\Delta t + o(\Delta t)$, она приносит системе S_i доход в размере $r_{ij}(k + I_i - I_j, t)$ плюс ожидаемый доход за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было состояние $(k + I_i - I_j)$. Аналогично можно рассмотреть и другие возможные переходы из состояния (k,t) в состояния $(k - I_j, t + \Delta t)$, $(k + I_j, t + \Delta t)$, $(k - I_i + I_j, t + \Delta t)$, $(k + I_c - I_s, t + \Delta t)$, $j, c,\ s \ne i$, $i = \overline{1, n}$.

Поэтому, используя формулу полной вероятности для условного математического ожидания, для ожидаемого дохода системы S_i получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Ожидаемый доход $v_i(k,t)$ системы S_i удовлетворяет системе разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):*

$$\frac{dv_i(k,t)}{dt} = -\left[\lambda(t) + \sum_{j=1}^{n}\mu_j(k_j(t))\right] v_i(k,t) +$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda(t) p_{0j} v_i(k+I_j,t) + \mu_j(k_j(t))u(k_j(t)) p_{j0} v_i(k-I_j,t)\right] +$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[\mu_j(k_j(t))u(k_j(t)) p_{ji} v_i(k+I_i-I_j,t) + \mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) p_{ij} v_i(k-I_i+I_j,t)\right] +$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[\mu_j(k_j(t))u(k_j(t)) p_{ji} r_{ij}(k+I_i-I_j,t) - \mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) p_{ij} r_{ji}(k-I_i+I_j,t)\right] + \qquad (2)$$

$$\sum_{\substack{c,s=1\\ c,s\neq i}}^{n}\mu_s(k_s(t))u(k_s(t)) p_{sc} v_i(k+I_c-I_s,t) + \lambda(t) p_{0i} r_{0i}(k+I_i,t) -$$

$$\mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) p_{i0} R_{i0}(k-I_i,t) + r_i(k).$$

З а м е ч а н и е. Систему уравнений (2) можно получить, если доходы от переходов между состояниями сети имеют вид $r_{0i}(k+I_i, t+\Delta t)$, $R_{i0}(k-I_i, t+\Delta t)$, $r_{ij}(k+I_i-I_j, t+\Delta t)$, т. е. ещё зависят и от Δt, и эти функции являются дифференцируемыми по времени t. Это можно проверить, разложив данные функции в ряд Тейлора в окрестности точки t и проведя доказательство аналогичным образом.

Число уравнений в системе уравнений (2) равно числу состояний сети, т. е. равно бесконечности для открытых сетей. Если интенсивности $\lambda(t)=\lambda$, $\mu_i(k_i(t))=\mu_i(k_i)$, $i=\overline{1,n}$, не зависят от времени, то в [2] для решения системы РДУ типа (2) предложена методика, основанная на применении многомерных z-преобразований. Введя в рассмотрение многомерные z-преобразования для ожидаемых доходов систем сети $\varphi_i(z,t) = \sum_{\substack{k_j=0,\\ j=\overline{1,n}}}^{\infty} v_i(k,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{k_l}$, $z=(z_1, z_2, ..., z_n)$, $|z|<1$, $i=\overline{1,n}$, для них получены соотношения, на основе которых предложен алгоритм нахождения ожидаемых доходов. Для замкнутой сети система уравнений (2) может быть сведена к системе конечного числа линейных неоднородных ОДУ с постоянными коэффициентами, которую в матричной форме можно записать в виде

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = Q_i(t) + A_i W_i(t), \qquad (3)$$

где $W_i^T(t) = (v_i(1,t),\ v_i(2,t), ..., v_i(L,t))$ – искомый вектор доходов системы S_i; L – число состояний сети. Решение системы (3) можно найти, используя прямой метод (с помощью матричной экспоненты) или метод преобразований Лапласа [3; 4].

2. Случай, когда доходы от переходов между состояниями сети являются случайными величинами. Отметим, что НМ-сети можно использовать не только для прогнозирования ожидаемых доходов ЛТС, но и для проектирования площадей складских помещений, нахождения количества бригад транспортно-складских рабочих, занимающихся погрузкой и разгрузкой грузов. Приведём следующий пример. Пусть в состав ЛТС входят n складов S_1, S_2, …, S_n, между которыми осуществляется перевозка грузов. Для погрузки и разгрузки автомобилей на складе S_i создано m_i бригад, $i=\overline{1,n}$. Для простоты предположим, что одна и та же бригада занимается разгрузкой автомобиля и после этого погрузкой его новой продукцией для дальнейшего транспортирования, чтобы простой автомобиля был минимальным. Транспортировка товара от одного склада к другому приносит последнему некоторый случайный доход (увеличивает занятую площадь склада на эту величину), и соответственно, доход первого склада уменьшается на эту СВ, хотя может быть и наоборот, для модели это не играет роли. Рассмотрим динамику изменения доходов системы S_i сети (занятой площади склада S_i ЛТС). Обозначим через $W_i(t)$ доход системы S_i

в момент времени t, а через $v_{i0} = W_i(0)$ её доход в начальный момент времени. Тогда её доход в момент времени $t + \Delta t$ можно представить в виде

$$W_i(t + \Delta t) = W_i(t) + \Delta W_i(t, \Delta t), \tag{4}$$

где $\Delta W_i(t, \Delta t)$ – изменение дохода СМО S_i на интервале времени $[t,\ t + \Delta t)$. Для нахождения этой величины выпишем события, которые могут произойти за время Δt, и изменение доходов системы S_i, связанное с этими событиями.

1. В систему S_i из внешней среды может поступить заявка (на склад S_i прибывает автомобиль), которая принесет ей доход (занимаемую площадь) r_{0i}, где r_{0i} – случайная величина (СВ) с математическим ожиданием (м. о.) $M\{r_{0i}\} = a_{0i}$, $i = \overline{1, n}$.

2. Заявка из системы S_i может уйти во внешнюю среду, при этом её доход уменьшится на величину (занимаемую площадь) R_{i0}, где R_{i0} – СВ с м. о. $M\{R_{i0}\} = b_{i0}$, $i = \overline{1, n}$.

3. Заявка из системы S_j может перейти в систему S_i, при этом доход системы S_i возрастет на величину (занимаемую площадь) r_{ji}, а доход S_j (т. е. занятая площадь склада S_j) уменьшится на эту величину, где r_{ji} – СВ с м. о. $M\{r_{ji}\} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

4. Заявка из системы S_i переходит в систему S_j, при этом доход S_i уменьшится на величину (занимаемую площадь) R_{ij}, а доход S_j (занятая площадь склада S_j) возрастет на эту величину, где R_{ij} – СВ с м. о. $M\{R_{ij}\} = b_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

5. На отрезке времени $[t,\ t + \Delta t)$ изменения состояния системы S_i не произойдет (занятая площадь склада S_i не изменится), $i = \overline{1, n}$.

Вероятности этих событий приведены в п. 1. Будем считать, что интервалы времени обслуживания заявки в каждой линии системы S_i (интервалы «разгрузки–погрузки» одного автомобиля на складе S_i) распределены по показательному закону с параметром μ_i, $i = \overline{1, n}$. Для ожидаемых доходов $v_i(t) = M\{W_i(t)\}$, $i = \overline{1, n}$, из (4) получаем следующее соотношение:

$$v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + M\{\Delta W_i(t, \Delta t)\} = v_i(t) + [\lambda(t) p_{0i} a_{0i} -$$

$$\mu_i \left(p_{i0} b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_{ij} b_{ij} \right) \min(k_i(t), m_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mu_j p_{ji} a_{ji} \min(k_j(t), m_j)] \Delta t + o(\Delta t).$$

Усреднив это выражение по $k_i(t)$, перенося $v_i(t)$ в левую часть и поделив обе части на Δt, при $\Delta t \to 0$ получим систему дифференциальных уравнений (ДУ), решения которой имеют вид

$$v_i(t) = v_i(0) + p_{0i} a_{0i} \int_0^t \lambda(s) ds - \mu_i \left(p_{i0} b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_{ij} b_{ij} \right) \int_0^t M \min(k_i(s), m_i) ds +$$
$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mu_j p_{ji} a_{ji} \int_0^t M \min(k_j(s), m_j) ds, \ i = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Приближенные выражения для нахождения $M \min(k_i(s), m_i)$, $i = \overline{1, n}$, приведены в [1]. Приведем здесь два случая, когда соотношение (5) является точным. Пусть $m_i = 1$, $i = \overline{1, n}$, и однолинейные СМО сети функционируют в условиях высокой нагрузки [1; 5], т. е. $k_i(t) > 0 \ \forall t > 0$, $i = \overline{1, n}$, что эквивалентно тому, что $\lim\limits_{t \to \infty} P\{k_i(t) = 0\} = 0$, $i = \overline{1, n}$, или коэффициенты загрузки СМО больше единицы. В этом случае $M \min(k_i(s), m_i) = 1$, $i = \overline{1, n}$, и

$$v_i(t) = v_i(0) + p_{0i} a_{0i} \int_0^t \lambda(s) ds - \left[\mu_i p_{i0} b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\mu_i p_{ij} b_{ij} - \mu_j p_{ji} a_{ji} \right) \right] t, \ i = \overline{1, n}.$$

Второй случай, когда число линий обслуживания в каждой СМО больше или равно числу заявок в сети, например, все СМО сети являются бесконечнолинейными, $m_i = \infty$, $i = \overline{1, n}$. В данном случае $M \min(k_i(s), m_i) = Mk_i(s) = N_i(s)$, где $N_i(s)$ – среднее число заявок (ожидающих и обслуживающихся) в системе S_i в момент времени s, $i = \overline{1, n}$, и

$$v_i(t) = v_i(0) + p_{0i}a_{0i}\int_0^t \lambda(s)ds - \mu_i\left(p_{i0}b_{i0} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n p_{ij}b_{ij}\right)\int_0^t N_i(s)ds + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n \mu_j p_{ji}a_{ji}\int_0^t N_i(s)ds,\ i = \overline{1, n}.$$

Методы нахождения величин $N_i(s)$, $i = \overline{1, n}$, описаны в [1].

3. Асимптотический анализ ожидаемых доходов в замкнутой НМ-сети, когда число линий обслуживания и вероятности переходов заявок между системами зависят от времени. В ЛТС на практике общее число транспортных средств, передвигающихся между различными объектами, и количество погрузочно-разгрузочных бригад (рабочих или, например, действующих погрузочно-разгрузочных железнодорожных путей на станциях) зависят от времени. Поэтому актуальной является следующая задача.

Рассмотрим сеть МО, состоящую из $n+1$ СМО S_0, S_1, …, S_n, общее число однотипных заявок в которой в момент времени t составляет $K(t)$, при этом $K(t)$ является кусочно-постоянной функцией времени с q интервалами постоянства:

$$K(t) = \begin{cases} K_1,\ t \in [T_0, T_1), \\ K_2,\ t \in [T_1, T_2), \\ \ldots \\ K_q,\ t \in [T_{q-1}, T], \end{cases}$$

где K_l – число заявок в сети на l-м интервале времени $[T_{l-1},\ T_l)$, $l = \overline{1, q}$. В связи с достаточно высокой стоимостью транспортных средств и относительно долгим периодом их эксплуатации, число таких средств в ЛТС меняется через определенные значительные промежутки времени, т. е. интервалы постоянства достаточно велики (на практике обычно 1–2 года). Под системой S_0 понимается внешняя среда, а под системами S_1, S_2, …, S_n – конкретные СМО сети, в которых производится обслуживание заявок. Пусть $m_i(t)$ – число линий обслуживания в системе S_i, $i = \overline{1, n}$, положим, $m_0(t) = K(t)$ и времена обслуживания заявок каждой из линий распределены по показательному закону с интенсивностью $\mu_i(t)$, также зависящей от времени, $i, j = \overline{0, n}$. Заявки на обслуживание выбираются в соответствии с дисциплиной FIFO. Заявка, обслуживание которой в системе S_i закончилось, с вероятностью $p_{ij}(t)$ переходит в систему S_j, $i, j = \overline{0, n}$. Матрица вероятностей переходов $P(t) = \|p_{ij}(t)\|$, $i, j = \overline{0, n}$, является в каждый момент времени матрицей вероятностей переходов неприводимой марковской цепи, $0 \le p_{ij}(t) \le 1$, $\sum_{j=0}^n p_{ij}(t) = 1$.

Состояние сети в момент времени t описывается вектором (1), который образует n-мерный марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний. Очевидно, что число заявок в системе S_0 равно $k_0(t) = K(t) - \sum_{i=1}^n k_i(t)$. Основная задача исследования заданной сети состоит в асимптотическом анализе процесса ожидаемых доходов сети при большом числе заявок.

Обозначим через $V_l(k, t)$ полный ожидаемый доход, который получит сеть за время t на l-м интервале времени, если в начальный момент этого интервала она находится в состоянии k. Очевидно, что $V_l(k, t) = \sum_{i=0}^n v_{il}(k, t)$, где $v_{il}(k, t)$ – ожидаемый доход, который получает система S_i за время t на l-м интервале времени, если в начальный момент интервала сеть находится в состоянии k. В течение малого промежутка времени Δt сеть может остаться в состоянии $(k, t + \Delta t)$ либо совершить переход в состояние $(k + I_i - I_j, t + \Delta t)$, $i, j = \overline{0, n}$, где I_0 – n-вектор, состоящий из нулей.

Т е о р е м а 2. *Плотность распределения дохода на l-м промежутке времени* $p_{vl}(x_l,t)$ *с точностью до членов порядка малости* $O(\varepsilon_l^2)$, $\varepsilon_l=\dfrac{1}{K_l}$, *аппроксимируется плотностью вероятностей, определяемой уравнением в частных производных:*

$$\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}A_{il}(x_l,t)\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{il}}+\frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{i,j=1}^{n}B_{ijl}(x_l,t)\frac{\partial^2 p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{il}\partial x_{jl}}+$$
$$K_l\sum_{i,j=0}^{n}\mu_j(t)p_{ji}(t)\min(x_{jl},l_{jl}(t))r_{jil}(t)+r_l(t), \tag{6}$$

в точках существования производных, где

$$A_{il}(x_l,t)=\sum_{j=1}^{n}\mu_j(t)p^*_{ji}(t)\min(x_{jl},l_{jl}(t))+\mu_0(t)p_{0i}(t)\left(1-\sum_{j=1}^{n}x_{jl}\right), \tag{7}$$

$p^*_{ji}(t)=\begin{cases}p_{ji}(t)-1, & j=i,\\ p_{ji}(t), & j\neq i,\end{cases}$ $q^*_{ji}(t)=\begin{cases}1+p_{ji}(t), & j=i,\\ p_{ji}(t), & j\neq i,\end{cases}$ $l_{jl}(t)=\dfrac{m_j(t)}{K_l}$, $j=\overline{1,n}$, $B_{ijl}(x_l,t)$ – *кусочно-линейная функция относительно* x_l,

$$B_{iil}(x_l,t)=\sum_{j=0}^{n}\mu_j(t)q^*_{ji}(t)\min(x_{jl},l_{jl}(t)),\ B_{ijl}(x_l,t)=-\mu_j(t)p_{ij}(t)\min(x_{il},l_{il}(t)),\ l=\overline{1,q}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что если на интервале времени $[t,t+\Delta t]$ сеть совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k+I_i-I_j,t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_j(t)p_{ji}(t)\min(k_j(t),m_j(t))\Delta t+o(\Delta t)$, то её доход в момент времени $t+\Delta t$ составит $R_{jil}(t)$ плюс ожидаемый доход $V_l(k+I_i-I_j,t)$, который она получает за оставшееся время *t*, если бы начальным было состояние $(k+I_i-I_j)$. Кроме того, будем считать, что сеть получает доход в размере $R(t)$ за единицу времени в течение пребывания её в состоянии (k,t). Сеть остаётся в состоянии (k,t) в течение малого промежутка времени Δt с вероятностью $1-\sum_{i=0}^{n}\mu_i(t)\min(k_i(t),m_i(t))\Delta t+o(\Delta t)$, при этом её доход составит $R(t)\Delta t+V_l(k,t)$.

Тогда полный ожидаемый доход $V_l(k,t+\Delta t)$ в момент времени $t+\Delta t$ удовлетворяет следующей системе разностных уравнений:

$$V_l(k,t+\Delta t)=\left\{1-\sum_{i=0}^{n}\mu_i(t)\min(k_i(t),m_i(t))\Delta t\right\}(R(t)\Delta t+V_l(k,t))+$$
$$\sum_{i,j=0}^{n}\mu_j(t)p_{ji}(t)\min(k_j(t),m_j(t))\Delta t(R_{ji}(t)+V_l(k+I_i-I_j,t))+o(\Delta t),$$

которая может быть сведена к системе РДУ:

$$\frac{dV_l(k,t)}{dt}=\sum_{i,j=0}^{n}\mu_j(t)p_{ji}(t)\min(k_j(t),m_j(t))(V_l(k+I_i-I_j,t)-V_l(k,t))+$$
$$\sum_{i,j=0}^{n}\mu_j(t)p_{ji}(t)\min(k_j(t),m_j(t))R_{ji}(t)+R(t). \tag{9}$$

Далее рассмотрим случай большого числа заявок в сети; положим, что K_l достаточно велико, $1<<K_l<N$. Будем использовать технику, предложенную в [6], при нахождении плотности распределения вероятностей состояний замкнутой сети МО. Перейдем к вектору относительных переменных

$$\xi_l(t)=(\xi_l,t)=\left(\frac{k_1(t)}{K_l},\ \frac{k_2(t)}{K_l},\ ...,\ \frac{k_n(t)}{K_l}\right)=(\xi_{1l}(t),\ \xi_{2l}(t),\ ...,\ \xi_{nl}(t)).$$

Возможные значения вектора $\xi_l(t)$ принадлежат ограниченному замкнутому множеству $G_l = \left\{ x_l = (x_{1l},\, x_{2l},\, ...,\, x_{nl}) : x_{il} \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_{il} \leq 1 \right\}$, в котором они располагаются в узлах n-мерной решетки на расстоянии $\varepsilon_l = \dfrac{1}{K_l}$ друг от друга. При увеличении значений K_l число узлов решетки возрастает и можно считать, что вектор $\xi_l(t)$ имеет непрерывное распределение в области G_l. При этих предположениях можем считать, что полный ожидаемый доход сети непрерывно изменяется в зависимости от начального состояния (x_l, t). Поэтому можем ввести в рассмотрение функцию плотности распределения (концентрации) ожидаемого дохода $p_{vl}(x_l, t)$ в области G_l [1]. Она определяется как следующий предел:

$$p_{vl}(x_l, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V(x_{1l} \leq \xi_{1l}(t) \leq x_{1l} + \varepsilon_l,\, ...,\, x_{nl} \leq \xi_{nl}(t) \leq x_{nl} + \varepsilon_l)}{\varepsilon_l^n}. \tag{10}$$

Очевидно, что плотность распределения дохода $p_{vl}(x_l, t)$, по аналогии с плотностью распределения вероятности, будет обладать следующими свойствами:

1) $\iint\limits_{G_l} ...\int p_{vl}(x_l, t) dx_l = V_{\text{sum } l}$, где $V_{\text{sum } l}$ – суммарный доход в области G_l;

2) доход сети при условии изменения вектора состояния сети по области D_l равен

$$V(\xi_l \in D_l, t) = \iint\limits_{D_l} ... \int p_{vl}(x_l, t) dx_l.$$

В качестве начального условия для уравнения (6) можно взять $p_{vl}(x_l, t_0) = p_{v0l}(x_l)$, где $p_{v0l}(x_l)$ – некоторая известная плотность распределения.

Из (10) следует, что для $V_l(k, t)$ справедлива следующая аппроксимация при $K_l \to \infty$:

$$V_l(k, t) = V_l(x_l K_l, t) = \varepsilon_l^n p_{vl}(x_l, t) \text{ или } p_{vl}(x_l, t) = K_l^n V_l(x_l K_l, t). \tag{11}$$

Тогда $\dfrac{\partial V_l(k, t)}{\partial t} = \dfrac{\partial V_l(x_l K_l, t)}{\partial t} = \varepsilon_l^n \dfrac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial t}$. Кроме того, при $K_l \to \infty$ доходы $R_{ji}(t)$ и $R(t)$ удовлетворяют следующим асимптотическим равенствам:

$$K_l^n R_{ji}(t) = r_{jil}(t), \;\; K_l^n R(t) = r_l(t). \tag{12}$$

Уравнение для плотности распределения дохода с учетом (9)–(11) может быть представлено в виде

$$\varepsilon_l^n \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial t} = \varepsilon_l^{n-1} \sum_{i,j=0}^{n} \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t))(p_{vl}(x_l + e_{il} - e_{jl}, t) - p_{vl}(x_l, t)) +$$
$$\varepsilon_l^{n-1} \sum_{i,j=0}^{n} \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t)) r_{jil}(t) + r_l(t)$$

или с учетом (12)

$$\begin{gathered} \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial t} = K_l \sum_{i,j=0}^{n} \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t))(p_{vl}(x_l + e_{il} - e_{jl}, t) - p_{vl}(x_l, t)) + \\ K_l \sum_{i,j=0}^{n} \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t)) r_{jil}(t) + r_l(t), \end{gathered} \tag{13}$$

где $l_{jl} = \dfrac{m_j(t)}{K_l}$, $e_{jl} = \varepsilon_l I_j$, $j = \overline{1, n}$. По условию теоремы, мы можем разложить функцию $p_{vl}(x_l + e_{il} - e_{jl}, t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (x_l, t), используя члены до второго порядка включительно:

$$p_{vl}(x_l+e_{il}-e_{jl},t)=p_{vl}(x_l,t)+\varepsilon_l\left(\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{il}}-\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{jl}}\right)+$$
$$\varepsilon_l^2\left(\frac{\partial^2 p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{il}^2}-2\frac{\partial^2 p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{il}\partial x_{jl}}+\frac{\partial^2 p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{jl}^2}\right)+o(\varepsilon_l^2),\ i,j=\overline{1,n}.$$

Поэтому уравнение (13) можно записать в виде

$$\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial t}=\sum_{i,j=0}^{n}\mu_j(t)p_{ji}(t)\min(x_{jl},l_{jl}(t))\left[\left(\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{il}}-\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{jl}}\right)+\right.$$
$$\left.\varepsilon_l^2\left(\frac{\partial^2 p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{il}^2}-2\frac{\partial^2 p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{il}\partial x_{jl}}+\frac{\partial^2 p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{jl}^2}\right)\right]+$$
$$K_l\sum_{i,j=0}^{n}\mu_j(t)p_{ji}(t)\min(x_{jl},l_{jl}(t))r_{jil}(t)+r_l(t).$$

Последнее уравнение с точностью до членов порядка $O(\varepsilon_l^2)$ можем записать в более компактном виде (6), используя обозначения (7), (8). Теорема доказана.

Опишем теперь как можно найти выражение для общего ожидаемого дохода сети. Учитывая (8), выражение $\frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{i,j=1}^{n}B_{ijl}(x_l,t)\frac{\partial^2 p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{il}\partial x_{jl}}$ можно отнести к $O(\varepsilon_l^2)$. Поэтому будем рассматривать следующее уравнение:

$$\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}A_{il}(x_l,t)\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{il}}+K_l\sum_{i,j=0}^{n}\mu_j(t)p_{ji}(t)\min(x_{jl},l_{jl}(t))r_{jil}(t)+r_l(t).$$

Проинтегрировав обе части этого уравнения по $x_l=(x_{1l},x_{2l},...,x_{nl})$ в области G_l и разделив обе части уравнения на объем области G_l, равный $m(G_l)$, получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(G_l)}\iint\limits_{G_l}\ldots\int\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial t}dx_l=-\frac{1}{m(G_l)}\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{G_l}\ldots\int A_{il}(x_l,t)\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{il}}dx_l+\\ \frac{K_l}{m(G_l)}\sum_{i,j=0}^{n}\mu_j(t)p_{ji}(t)\iint\limits_{G_l}\ldots\int\min(x_{jl},l_{jl}(t))dx_l r_{jil}(t)+\\ \frac{K_l}{m(G_l)}\sum_{i=0}^{n}\mu_0(t)p_{0i}(t)r_{0il}(t)\iint\limits_{G_l}\ldots\int\left(1-\sum_{j=1}^{n}x_{jl}\right)dx_l+\frac{r_l(t)}{m(G_l)}\iint\limits_{G_l}\ldots\int dx_l.\end{aligned}\tag{14}$$

Будем предполагать, что в замкнутой области G_l функция $p_{vl}(x_l,t)$ и ее частная производная $\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial t}$ являются непрерывными. Тогда в левой части последнего равенства допустима перемена порядка интегрирования и дифференцирования [7] и

$$\frac{1}{m(G_l)}\iint\limits_{G_l}\ldots\int\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial t}dx_l=\frac{1}{m(G_l)}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{G_l}\ldots\int p_{vl}(x_l,t)dx_l=\frac{d}{dt}\overline{v_{G_l}}(t),$$

где $\overline{v_{G_l}}(t)$ – среднее по x_l значение дохода при условии изменения начального состояния x_l в области G_l.

Рассмотрим интегралы в правой части (14). Используем интегрирование по частям, а также предположим, что выполняются граничные условия [8]: $A_{il}(x_l,t)p_{vl}(x_l,t)\big|_{x_l\in\Gamma(G_l)}=0$, $i=\overline{1,n}$, где $\Gamma(G_l)$ – граница области G_l, т. е. $A_{nl}(x_l,t)p_{vl}(x_l,t)\Big|_{x_{nl}=0}^{x_{nl}=1-x_{1l}-x_{2l}-\ldots-x_{n-1,l}}=0$, $A_{n-1,l}(x_l,t)p_{vl}(x_l,t)\Big|_{x_{n-1,l}=0}^{x_{n-1,l}=1-x_{1l}-x_{2l}-\ldots-x_{n-2,l}-x_{nl}}=0,\ldots,$ $A_{1l}(x_l,t)p_{vl}(x_l,t)\Big|_{x_{1l}=0}^{x_{1l}=1-x_{2l}-x_{3l}-\ldots-x_{nl}}=0,\ldots,$ которые означают, что не допускается поток дохода через границу области G_l или что в граничных точках области G_l поставлены отражающие экраны. Тогда, учитывая, что $\frac{\partial A_{il}(x_l,t)}{\partial x_{il}}$ не зависят от x_{jl}, $j=\overline{1,n}$, получаем

$$\frac{1}{m(G_l)}\iint\limits_{G_l}\ldots\int A_{il}(x_l,t)\frac{\partial p_{vl}(x_l,t)}{\partial x_{il}}dx_l=-\frac{\partial A_{il}(x_l,t)}{\partial x_{il}}\overline{v_{G_l}}(t),\ i=\overline{1,n},$$

т. е. приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dt}\overline{v_{G_l}}(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{il}(x_l,t)}{\partial x_{il}}\overline{v_{G_l}}(t)+\frac{K_l}{m(G_l)}\sum_{i,j=0}^{n}\mu_j(t)p_{ji}(t)r_{jil}(t)\iint\limits_{G_l}\ldots\int\min(x_{jl},l_{jl}(t))dx_l+$$
$$\frac{K_l}{m(G_l)}\sum_{i=0}^{n}\mu_0(t)p_{0i}(t)r_{0il}(t)\iint\limits_{G_l}\ldots\int\left(1-\sum_{j=1}^{n}x_{jl}\right)dx_l+\frac{r_l}{m(G_l)}\iint\limits_{G_l}\ldots\int dx_l,\ l=\overline{1,q}. \tag{15}$$

Из (7) видим, что коэффициенты $A_{il}(x_l,t)$ представляют собой кусочно-линейные по x_{jl}, $j=\overline{1,n}$, функции, т. е. (15) – это ДУ с кусочно-постоянной правой частью. Обозначим множество индексов компонент вектора $x_l=(x_{1l},x_{2l},\ldots,x_{nl})$ через $\Omega_l=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Разобьем Ω_l на два непересекающихся множества $\Omega_{0l}(\tau)$, $\Omega_{1l}(\tau)$ такие, что $\Omega_{0l}(\tau)=\{j:l_{jl}(t)<x_{jl}\le 1\}$, $\Omega_{1l}(\tau)=\{j:0\le x_{jl}\le l_{jl}(t)\}$, τ – номер разбиения. При фиксированном t число разбиений такого типа равно 2^n, $\tau=\overline{1,2^n}$. Каждое разбиение будет задавать в множестве G_l непересекающиеся области $G_{l\tau}$ такие, что $G_{l\tau}=\{x_l(t):l_{jl}(t)<x_{jl}\le 1,\ j\in\Omega_{0l}(\tau);\quad 0\le x_{jl}\le l_{jl}(t),\ j\in\Omega_{1l}(\tau);\sum_{i=1}^{n}x_{il}\le 1\}$, $\tau=\overline{1,2^n}$, $\bigcup_{\tau=1}^{2^n}G_{l\tau}=G_l$. Теперь в каждой из области разбиения фазового пространства можем записать явный вид (15) и при определенных начальных условиях найти средний ожидаемый доход для каждой из областей $G_{l\tau}$.

Пример. Транспортное предприятие (ТП, система S_3), в распоряжении которого имеется большое число автомобилей (заявок), посылает их для выполнения ряда определенных перевозок между различными городами (внешняя среда, система S_0). После этого они возвращаются на базу ТП, предварительно пройдя в двух пунктах (системы S_1 и S_2) технический осмотр, который может включать и ремонт автомобилей. Количество функционирующих линий обслуживания в пунктах S_1 и S_2 в момент времени t равно соответственно $m_1(t)$ и $m_2(t)$. В системе S_3 осуществляется загрузка автомобилей перед выходом в рейс, которой занимаются $m_3(t)$ бригад погрузки (линий обслуживания).

Аналогичная ситуация может возникнуть, когда автомобили возвращаются из S_0 и разгружаются на двух складах ТП (системы S_1 и S_2); в этом случае $m_1(t)$ и $m_2(t)$ – количество бригад разгрузки соответственно на складе S_1 и S_2.

В данном случае матрица $P(t)$ имеет вид

$$P(t)=\left\|p_{ij}(t)\right\|_{4\times 4}=\begin{pmatrix}0 & p_{01}(t) & p_{02}(t) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ p_{01}(t)+p_{02}(t)=1,\ \forall t\in[0,\ T].$$

Пусть изменение параметров сети носит сезонный характер, например, они могут принимать одни значения в осенне-зимний период и другие – в весенне-летний. Положим, что $q=2$, $T_1=\frac{T}{2}$,

$$\mu_j(t)=\begin{cases}\mu_j^{(1)},\ t\in\left[0,\ \frac{T}{2}\right),\\ \mu_j^{(2)},\ t\in\left[\frac{T}{2},\ T\right],\end{cases}\ j=\overline{0,\ 3},\ m_j(t)=\begin{cases}m_j^{(1)},\ t\in\left[0,\ \frac{T}{2}\right),\\ m_j^{(2)},\ t\in\left[\frac{T}{2},\ T\right],\end{cases}\ j=\overline{1,\ 3},$$

$$p_{0i}(t)=\begin{cases} p_{0i}^{(1)},\ t\in\left[0,\ \frac{T}{2}\right), \\ p_{0i}^{(2)},\ t\in\left[\frac{T}{2},\ T\right], \end{cases}\quad i=1,2.$$

Пусть также доходы от переходов между состояниями сети являются кусочно-постоянными функциями с двумя интервалами постоянства: $r_{ji1}(t)=r_{ji}^{(1)},\ t\in\left[0,\ \frac{T}{2}\right),\ r_{ji2}(t)=r_{ji}^{(2)},\ t\in\left[\frac{T}{2},\ T\right],$ $i,j=\overline{0,\ 3},\ r_1(t)=r^{(1)},\ t\in\left[0,\ \frac{T}{2}\right),\ r_2(t)=r^{(2)},\ t\in\left[\frac{T}{2},\ T\right].$

Найдем ожидаемый доход сети $\overline{v_1}(t),$ например, на интервале $\left[0,\ \frac{T}{2}\right).$ Решение уравнения (15) на этом интервале времени имеет вид

$$\overline{v_1}(t)=\left(v_0^{(1)}+\frac{r_1}{\mu_0^{(1)}}\right)e^{\mu_0^{(1)}t}-\frac{r_1}{\mu_0^{(1)}},\ t\in\left[0,\ \frac{T}{2}\right),$$

где $\overline{v_1}(0)=v_0^{(1)},$

$$r_1=\frac{1}{m_1(G_{11})}\Big[\mu_1^{(1)}m_1^{(1)}r_{13}^{(1)}+\mu_2^{(1)}m_2^{(1)}r_{23}^{(1)}+\mu_3^{(1)}m_3^{(1)}r_{30}^{(1)}+\frac{K_1\mu_0^{(1)}}{24}\left(p_{01}^{(1)}r_{01}^{(1)}+p_{02}^{(1)}r_{02}^{(1)}\right)\times$$
$$(1-l_{11}-l_{21})^2((1-l_{11}-l_{21})^2-4(1-l_{11}-l_{21})l_{31}+6l_{31}^2))+r^{(1)}\Big],$$

$$m_1(G_{11})=\frac{1}{6}(1-l_{11}-l_{21})^2(1-l_{11}-l_{21}-3l_{31}),\ l_{i1}=\frac{m_i^{(1)}}{K_1},\ i=\overline{1,\ 3}.$$

Список использованной литературы

1. *Маталыцкий, М. А.* Математический анализ НМ-сетей и их применение в транспортной логистике / М. А. Маталыцкий, О. М. Китурко. – Гродно: ГрГУ, 2015.
2. *Matalytski, M. A.* Application of a z-transforms method for investigation of Markov G-networks / M. A. Matalytski, V. V. Naumenko // J. of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2014. – Vol. 13, N 1. – P. 61–73.
3. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2004.
4. *Маталыцкий, М. А.* Марковские сети массового обслуживания произвольной топологии с доходами / М. А. Маталыцкий, Е. В. Колузаева // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 4. – С. 10–17.
5. *Вишневский, В. М.* Теоретические основы проектирования систем / В. М. Вишневский. – М.: Техносфера, 2003.
6. *Медведев, Г. А.* Об оптимизации замкнутой системы массового обслуживания / Г. А. Медведев // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1975. – № 6. – С. 65–73.
7. *Кудрявцев, Л. Д.* Математический анализ / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Высш. шк., 1993. – Т. 2.
8. *Гардинер, К. В.* Стохастические методы в естественных науках / К. В. Гардинер. – М.: Мир, 1986.

Поступило в редакцию 27.01.2016