Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **июль–август** **Том 60 № 4**

УДК 511.42

А. В. ЛУНЕВИЧ

РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ, КОМПЛЕКСНЫХ И *P*-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ ПОРЯДКОМ ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
lunevichav@gmail.com

В данной работе найдено значение размерности Хаусдорфа множества точек (x, z, ω) из пространства действительных, комплексных и p-адических чисел, которые с заданным порядком приближаются алгебраическими числами.

Основу доказательства составляет метрическая теорема о точном порядке совместного приближения нуля в этом пространстве и построение регулярной системы из действительных алгебраических чисел, комплексных алгебраических чисел и p-адических алгебраических чисел из $\mathbb{Q}_p$.

Ключевые слова: размерность Хаусдорфа, регулярные системы чисел и векторов, совместные приближения.

A. V. LUNEVICH

HAUSDORFF DIMENSION OF THE SET OF REAL, COMPLEX AND *P*-ADIC NUMBERS WITH A GIVEN ORDER OF THE ALGEBRAIC NUMBER APPROXIMATION

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
lunevichav@gmail.com

In this article we found the value of the Hausdorff dimension of a set of points in the space of real, complex and p-adic numbers that are approximated with a given order by algebraic numbers.

The proof is based both on the metric theorem on the exact order of a simultaneous approximation of zero in this space and on the construction of a regular system of real algebraic numbers, complex algebraic numbers and p-adic algebraic numbers of $\mathbb{Q}_p$.

Keywords: Hausdorff dimension, regular systems of numbers and vectors, simultaneous approximations.

Введение. Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_j \subset \mathbb{Z}, 0 \le j \le n,$$

полином степени n и высоты $H = H(P) = \max_{0 \le j \le n} \{|a_j|\}$. Используя принцип ящиков Дирихле, нетрудно доказать, что при $w < n$ неравенство

$$|P(x)| < H^{-w} \tag{1}$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[x]$ ($\deg P \le n$) для всех $x \in \mathbb{R}$ [1].

Определим $L_n(w)$ как множество точек $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство (1) имеет бесконечно много решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[x]$. Равенство $\dim L_1(w) = \frac{2}{w}$ при $w > 2$ независимо друг от друга доказали Ярник [2] и Безикович [3]. В 1932 г. К. Малер [4] предположил, что если $w > n$, то мера множества $L_n(w)$ равна 0. Его предположение доказал В. Г. Спринджук [5]. Позже Бейкер и Шмидт [6] получили точное значение размерности Хаусдорфа множества действительных чисел, приближаемых алгебраическими действительными числами. Затем было доказано [7], что значение размерности Хаусдорфа множества $L_n(w)$ при $w > n$ равно $\frac{n+1}{w+1}$. Кроме того, было найдено точное значение размерности Хаусдорфа множества точек евклидова пространства, приближаемых точками с рациональными координатами [8], и получена [9] оценка снизу размерности Хаусдорфа в случае приближения нулями невырожденных функций.

Пусть $\mu_1(B)$ – мера Лебега некоторого измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$, $\mu_2(D)$ – мера Лебега некоторого измеримого множества $D \subset \mathbb{C}$ и $\mu_3(E)$ – мера Хаара некоторого измеримого множества $E \subset \mathbb{Q}_p$. Определим $\mu(A) = \mu(B \times D \times E) = \mu_1(B)\mu_2(D)\mu_3(E)$, где $A = B \times D \times E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ – измеримое множество. Пусть $w = (w_1, w_2, w_3)$ – вектор с действительными координатами, удовлетворяющий условию $w_i > 0, i = 1, 2, 3$.

Определение 1. *Пусть $L \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ – измеримое множество и F – счетное множество ограниченных подмножеств из $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Для любого $\rho > 0$ ρ-покрытием множества F будем называть величину*

$$V_\rho(F) = \sum_{E \in F} (a(E))^\rho,$$

где $a(E) = \sup\{|x_1 - x_2|, |z_1 - z_2|, |\omega_1 - \omega_2|_p : x_1, x_2 \in E \cap \mathbb{R}, z_1, z_2 \in E \cap \mathbb{C}; \omega_1, \omega_2 \in E \cap \mathbb{Q}\}$.

Для любого $\eta > 0$ определим

$$m_\rho(\eta; L) = \inf_F \left\{ V_\rho(F) : \forall E \in F, a(E) \leqslant \eta, L \subset \bigcup_{E \in F} E \right\}.$$

Функцию

$$m_\rho(L) = \lim_{\eta \to 0+} m_\rho(\eta; L)$$

назовем ρ-мерой множества L. Размерностью Хаусдорфа множества L называется величина

$$\dim L = \inf\{\rho : m_\rho(L) = 0\}.$$

Определим $\mathcal{L}_{w,n}$ как множество точек параллелепипеда $T = I \times K \times D$, где $I \subset \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{Q}_p$, для которых система неравенств

$$|x - \alpha| < H^{-w_1 - 1},\ |z - \beta| < H^{-w_2 - 1},\ |\omega - \gamma|_p < H^{-w_3}$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[x]$, где α, β, γ – корни полинома P, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{Q}_p$ и

$$w_1 + 2w_2 + w_3 > n - 2,\ w_1, w_2, w_3 > 0.$$

Данная работа посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 1. *При $n \geq 3$ верно равенство:*

$$\dim \mathcal{L}_{w,n} = S_{w,n}. \tag{2}$$

Мы докажем теорему 1 в случае, когда

$$w_1 + 1 > w_2 + 1 > w_3. \tag{3}$$

Для других соотношений w_1, w_2, w_3 доказательство будет аналогичным.

Используя (3), мы можем вычислить $S_{w,n}$ и найти промежуток, которому он принадлежит:

$$S_{w,n} = \begin{cases} \dfrac{n + 2 + 3w_1 - 2w_2 - w_3}{w_1 + 1} \in [3; 4),\ 2w_2 + w_3 < n - 1; \\ \dfrac{n + 2 + w_2 - w_3}{w_2 + 1} \in (1; 3),\ 2w_2 + w_3 \geq n - 1, w_3 < n + 1; \\ \dfrac{n+1}{w_3} \in (0; 1],\ w_3 \geq n + 1. \end{cases}$$

Таким образом $S_{w,n} \in (0; 4)$.

Перед тем как перейти к доказательству теоремы, приведем некоторые вспомогательные рассуждения.

Предварительные сведения. Пусть $P \in \mathbb{Z}[x]$ – неприводимый полином над $\mathbb{Q}$ с высотой $H = H(P)$ и корнями $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, \gamma \in \mathbb{Q}_p$. Будем считать, что P – минимальный полином для алгебраических чисел α, β, γ.

Важным элементом доказательства теоремы 1 является построение регулярной системы векторов.

О п р е д е л е н и е 2. *Счетное множество* Γ *точек* $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ *из некоторого параллелепипеда* $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ *с вектор-функцией* $N(\mathbf{v}, x) = (N_0(\mathbf{v}), N_1(x), N_2(x), N_3(x))$ *называется оптимальной регулярной системой, если существуют константы* $c_1 > 0, c_2 > 0$ *и достаточно большое число* $M_0 = M_0(V, N(\mathbf{v}, x))$, *для которых при любом* $M > M_0$ *можно выбрать точки* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t \in \Gamma$, *с условиями* $N_0(\mathbf{v}_i) \leq M$, $1 \leq i \leq t$, *так, что параллелепипеды*

$$\Pi(\mathbf{v}_i) = \left\{(x; z; \omega) : |x - \alpha_i| < N_1(M),\ |z - \beta_i| < N_2(M),\ |\omega - \gamma_i|_p < N_3(M)\right\},\quad 1 \leq i \leq t,$$

не пересекаются, и

$$\frac{c_1 \mu(V)}{\mu(\Pi(\mathbf{v}_i))} < t < \frac{c_2 \mu(V)}{\mu(\Pi(\mathbf{v}_i))}.$$

Пусть вектор $u = (u_1; u_2; u_3)$ такой, что $u_1; u_2; u_3 > 0$, $u_1 + 2u_2 + u_3 = n - 2$. В работе [10] было доказано, что для любого натурального числа Q система векторов $\nu = (\alpha, \beta, \gamma)$ с функцией $N(\nu, x) = (H(\nu), x^{-w_1 - 1}, x^{-w_2 - 1}, x^{-w_3})$, где α, β, γ – корни одного минимального многочлена степени n и высоты $H(\nu) < Q$, образует регулярную систему. Это означает, что для любого фиксированного параллелепипеда $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ существует не менее $c_3 Q^{n+1} \mu(T)$ векторов $\nu = (\alpha, \beta, \gamma) \in T$, таких, что параллелепипеды

$$\Pi(\nu) = \{(x; z; \omega) : |x - \alpha| < Q^{-(u_1 + 1)},\ |z - \beta| < Q^{-(u_2 + 1)},\ |\omega - \gamma|_p < Q^{-u_3}\}$$

не пересекаются. Обозначим множество всех таких векторов ν через $\Omega = \Omega(Q, n, T, w)$.

Заметим, что в последние годы регулярные системы строятся на множествах малой меры [11].

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Докажем сначала, что

$$\dim \mathcal{L}_{w,n} \geq S_{w,n}. \tag{4}$$

Для каждого Q подберем такое k, что $2^{k-1} \leq Q < 2^k$. Тогда векторы ν из Ω удовлетворяют условиям:

1) существует такое число $k' = k'(n, T)$, что для любого $k \geq k'$ найдется не пустой набор векторов $A_k(T) = \{\nu_1, \ldots, \nu_{t_k}\}$, с условием $H(\nu_i) < 2^k$, $i = 1 \ldots t_k$;

2) параллелепипеды

$$\Pi_k(\nu_i, u) = \{(x; z; \omega) : |x - \alpha| < 2^{-(u_1 + 1)k},\ |z - \beta| < 2^{-(u_2 + 1)k},\ |\omega - \gamma|_p < 2^{-u_3 k}\}$$

не пересекаются для всех $\nu_i \in A_k(T)$ и $c_4 2^{(n+1)k} \mu(T) \leq t_k \leq c_5 2^{(n+1)k} \mu(T)$.

Обозначим через $G_k(\nu, w)$ объединение наибольшего числа кубов со стороной $2 \cdot 2^{-k(w_1 + 1)}$, взятых внутри параллелепипеда $\Pi_k(\nu, w)$ так, что ни один новый куб со стороной $2 \cdot 2^{-k(w_1 + 1)}$ не может пересекать сразу два куба из $G_k(\nu, w)$. Очевидно, что множество $G_k(\nu, w)$ будет содержать не менее $c_6 2^{k(3w_1 - 2w_2 - w_3 + 1)}$ кубов. Для каждого вектора w можно подобрать вектор $u = u(w)$ так, что $\Pi_k(\nu, w) \subset \Pi_k(\nu, u)$. При этом u_1, u_2, u_3 вычисляются по-разному, в зависимости от соотношений между w_1, w_2, w_3. Возможны три случая:

1. $w_2 + 1 < \dfrac{n+1}{4}$, тогда $u_1 \in [w_2; w_1]$ и $u_i = w_i$, $i = 2, 3$;
2. $w_2 + 1 > \dfrac{n+1}{4}$, $w_3 < \dfrac{n+1}{4}$, тогда $u_1 = u_2 \in [w_3 - 1; w_2]$ и $u_3 = w_3$;
3. $w_3 > \dfrac{n+1}{4}$, тогда $u_1 = u_2 = u_3 - 1 = \dfrac{n-3}{4}$.

Рассмотрим третий случай (для других случаев доказательство будет аналогичным).

Выберем подмножество $\widetilde{A}_k(T) \subset A_k(T)$ так, что ни один параллелепипед $\Pi_k((x_0; z_0; \omega_0), u)$, $(x_0; z_0; \omega_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ не может пересекать сразу два параллелепипеда $\Pi_k(\nu, u)$ для всех $\nu \in \widetilde{A}_k(T)$, и $\left|\widetilde{A}_k(T)\right| > c_7 2^{k(n+1)}$. Существование множества $\widetilde{A}_k(T)$ следует из построения множества Ω.

Предположим, что существует такое положительное число δ, при котором $\dim \mathcal{L}_{w,n} < \rho$, где

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{n+2+3w_1-2w_2-w_3}{w_1+1} - \delta \in (3;4), \ 2w_2 + w_3 < n-1; \\ \dfrac{n+2+w_2-w_3}{w_2+1} - \delta \in (1;3), \ 2w_2 + w_3 \ge n-1, \ w_3 < n+1; \\ \dfrac{n+1}{w_3} - \delta \in (0;1), \ w_3 \ge n+1. \end{cases}$$

Тогда существует некоторый счетный набор кубов $F = \{E\}(E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p)$, которыми можно покрыть все множество $\mathcal{L}_{w,n}$, и ряд $\sum\limits_{E \in F} (a(E))^\rho$ сходится. Без потери общности можно считать, что $\sum\limits_{E \in F} (a(E))^\rho < 1$. Далее мы построим последовательности подмножеств $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots$ и натуральных чисел $k' < k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$ по следующим правилам.

1. Пусть $J_0 = T$. Множество J_j $(j \ge 1)$ является объединением кубов, принадлежащих G_j, где $G_j = \bigcup\limits_{\nu \in \widetilde{A}_{k_j}(J_{j-1})} (G_{k_j}(\nu, w))$. Количество кубов в J_j обозначим m_j.

2. J_j не пересекается с $E \in F$, если $a(E) > 2^{-k_j(w_1+1)}$, $j \ge 1$.

3. $m_j > c_8 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3-\delta(w_1+1))}$, $j \ge 1$.

Из построения следует, что $J_\infty \subset \mathcal{L}_{w,n}, J_\infty \ne \varnothing, J_\infty \not\subset F$, но это противоречит предполагаемому неравенству $\dim \mathcal{L}_{w,n} < \rho$. Таким образом, построив вышеописанные последовательности, мы докажем неравенство $\dim \mathcal{L}_{w,n} < \rho$, из которого очевидно следует неравенство (4).

Без потери общности можно считать, что $\mu(T) = 1$ и $\max\limits_{E \in F}(a(E)) < 2^{-k_0(w_1+1)}$, константа k_0 будет определена позже. Разобьем F на подмножества F_j^1, F_j^2, F_j^3, $j = 1, 2, \ldots$, следующим образом:

$$F_j^1 = \{E \in F : 2^{-k_j(w_1+1)} < a(E) < 2^{-k_j(w_2+1)}\};$$
$$F_j^2 = \{E \in F : 2^{-k_j(w_2+1)} < a(E) < 2^{-k_j w_3}\};$$
$$F_j^3 = \{E \in F : 2^{-k_j w_3} < a(E) < 2^{-k_{j-1}(w_1+1)}\}.$$

Обозначим через H_j объединение кубов из G_j, каждый из которых пересекается хотя бы с одним кубом из $F_j^1 \cup F_j^2 \cup F_j^3$. Объединение кубов из $G_j \setminus H_j$ обозначим как J_j. Количество кубов в H_j и G_j обозначим h_j и g_j соответственно. Тогда $J_j \subset J_{j-1}$. Очевидно, что любой куб E из множества $F_j^1 \cup F_j^2 \cup F_j^3$ не может пересекать сразу два куба из J_{j-1}. Используя это, мы можем оценить сверху количество кубов в H_j следующим образом:

$$c_9^{-1} h_j \le \sum_{E \in F_j^1} (a(E))^3 2^{3k_j(w_1+1)} + \sum_{E \in F_j^2} a(E) 2^{k_j(3w_1-2w_2+1)} + \sum_{E \in F_j^3} (a(E))^4 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}.$$

В зависимости от того, какому промежутку принадлежит ρ, получим следующие оценки.

Пусть $\rho \in (0;1)$ $\left(\rho = \dfrac{n+1}{w_3} - \delta\right)$. Тогда, используя неравенство $\sum\limits_E (a(E))^\rho < 1$, мы получим:

$$c_9^{-1}h_j \le \sum_{E\in F_j^1}\left((a(E))^{\rho}(a(E))^{3-\rho}2^{3k_j(w_1+1)}\right)+\sum_{E\in F_j^2}\left((a(E))^{\rho}(a(E))^{1-\rho}2^{k_j(w_1+1)}2^{k_j(2w_1-2w_2)}\right)+$$

$$\sum_{E\in F_j^3}\left((a(E))^{\rho}(a(E))^{4-\rho}2^{k_j(n+1)}2^{k_j(3w_1-2w_2-w_3+1)}\right)<$$

$$(2^{-k_j(w_2+1)})^{3-\rho}2^{3k_j(w_1+1)}+(2^{-k_jw_3})^{1-\rho}2^{k_j(w_1+1)}2^{k_j(2w_1-2w_2)}+(2^{-k_{j-1}(w_1+1)})^{4-\rho}2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}<$$

$$2^{k_j\left(3w_1+3-\frac{(3w_3-n-1)(w_2+1)}{w_3}-\delta(w_2+1)\right)}+2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3-\delta w_3)}+$$

$$2^{-k_{j-1}\left(\frac{(4w_3-n-1)(w_1+1)}{w_3}+\delta(w_1+1)\right)}2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}.$$

Так как $\delta>0,$ то при достаточно большом k_j получаем

$$h_j\le 2c_9 2^{-k_{j-1}\left(4(w_1+1)-\frac{(n+1)(w_1+1)}{w_3}+\delta(w_1+1)\right)}2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}.$$

Если ρ принадлежит интервалам (1; 3) или (3; 4), то, проводя аналогичные вычисления, получаем оценки

$$h_j\le 2c_9 2^{-k_{j-1}\left(4(w_1+1)-\frac{(n+2+w_2-w_3)(w_1+1)}{w_2+1}+\delta(w_1+1)\right)}2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)},$$

$$h_j\le 2c_9 2^{-k_{j-1}(4(w_1+1)-(n+2+3w_1-2w_2-w_3)+\delta(w_1+1))}2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}$$

соответственно. Сравнивая эти три оценки, для любого ρ получаем

$$h_j\le 2c_9 2^{-k_{j-1}(4(w_1+1)-(n+2+3w_1-2w_2-w_3)+\delta(w_1+1))}2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}=$$

$$2c_9 2^{-k_{j-1}(w_1+2w_2+w_3-n+2+\delta(w_1+1))}2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}.$$

Очевидно, что

$$g_1\ge c_6c_7 2^{k_1(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}\ge$$

$$4c_9 2^{-k_0(-n+2+w_1+2w_2+w_3+\delta(w_1+1))}2^{k_1(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}\ge 2h_1$$

при достаточно большом k_0. Предположим, что

$$m_{j-1}>c_8 2^{k_{j-1}(n+2+3w_1-2w_2-w_3-\delta(w_1+1))}$$

для $j>1,$ тогда

$$g_j\ge m_{j-1}c_6c_7 2^{-4k_{j-1}(w_1+1)}2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}\ge$$

$$c_6c_7c_8 2^{-k_{j-1}(-n+2+w_1+2w_2+w_3+\delta(w_1+1))}2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}\ge 2h_j$$

при $c_8=\dfrac{4c_9}{c_6c_7},$ откуда следует, что

$$m_j\ge g_j-h_j\ge\frac{1}{2}g_j\ge 2c_9 2^{-k_{j-1}(-n+2+w_1+2w_2+w_3+\delta(w_1+1))}2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}>$$

$$c_8 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3-\delta(w_1+1))}.$$

Полученное неравенство

$$m_j>c_8 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3-\delta(w_1+1))},\quad j=1,2,\ldots,$$

завершает построение последовательностей $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots$ и $k' < k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$. Таким образом, мы доказали неравенство (4).

Противоположное неравенство

$$\dim \mathcal{L}_{w,n} \leq S_{w,n} \tag{5}$$

получается при помощи непосредственных вычислений [12].

Очевидно, из неравенств (4), (5) и следует необходимое равенство (2).

Теорема 1 доказана.

Список использованной литературы

1. *Касселс, Дж. В. С.* Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.
2. *Jarnik, V.* Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass / V. Jarnik // Матем. сб. – М., 1929. – Т. 36. – С. 371–382.
3. *Besicovitch, A. S.* Sets of fractional dimension (IV): On rational approximations to real numbers / A. S. Besicovich // J. London Math. Soc. – 1934. – Vol. 9. – P. 126–131.
4. *Mahler, K.* Uber das Mass der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 3, N 106. – P. 131–139.
5. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967.
6. *Baker, A.* Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. M. Schmidt // Proc. London Math. Soc. – 1970. – Vol. 3, N 21. – P. 1–11.
7. *Берник, В. И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arithm. – 1983. – Vol. 42, N 3. – P. 219–253.
8. *Rynne, P.* Hausdorff dimension and generalized simultaneous diophantine approximation / P. Rynne // Bulletin of the London Mathematical Society. – 1998. – Vol. 30, N 4. – P. 365–376.
9. *Dickinson, H.* Extremal manifolds and Hausdorff dimension / H. Dickinson, M. Dodson // Duke Math. – 2000. – Vol. 101, N 2. – P. 271–281.
10. *Bernik, V. I.* A divergent Khitchine's theorem in the real, complex and p-adic felds / V. I. Bernik, N. Budarina, D. Dickinson // Lithunian Mathematical J. – 2008. – Vol. 48, N 2. – P. 158–173.
11. *Гётце, Ф.* Алгебраические числа в коротких интервалах / Ф. Гётце, А. Г. Гусакова // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 59, № 4. – С. 11–16.
12. *Шамукова, Н. В.* Об оценке сверху размерности Хаусдорфа в совместных приближениях алгебраическими числами / Н. В. Шамукова, Д. В. Коледа, А. В. Луневич // Материалы XII Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящ. восьмидесятилетию проф. Виктора Николаевича Латышева. – Минск, 2014. – С. 99–100.

Поступило в редакцию 18.01.2016