Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **июль–август** **Том 60 № 4**

УДК 539.12

Е. М. ОВСИЮК [1], О. В. ВЕКО [2], Я. А. ВОЙНОВА [3], В. В. КИСЕЛЬ [4], В. М. РЕДЬКОВ [5]

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ЭЛЕКТРОНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ, УЧЕТ АНОМАЛЬНОГО МАГНИТНОГО МОМЕНТА

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

[1]*Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь*
e.ovsiyuk@mail.ru
[2]*Гимназия г. Калинковичи, Калинковичи, Беларусь*
vekoolga@mail.ru
[3]*Кочищанская средняя школа Ельского района, Беларусь*
voinyuschka@mail.ru
[4]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь*
vasiliy_bspu@mail.ru
[5]*Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
v.redkov@dragon.bas-net.by

Уравнение Дирака для частицы со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом решено в присутствии внешнего однородного магнитного поля. После разделения переменных задача сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям 4-го порядка, они решены с использованием метода факторизации. Выведены обобщенные формулы, описывающие уровни Ландау для частицы со спином половина в магнитном поле, учитывающие наличие у частицы аномального магнитного момента. Построены соответствующие волновые функции.

Ключевые слова: электрон, аномальный магнитный момент, магнитное поле, точные решения.

E. M. OVSIYUK [1], O. V. VEKO [2], Y. A. VOYNOVA [3], V. V. KISEL [4], V. M. RED'KOV [5]

QUANTUM MECHANICS OF THE ELECTRON IN THE MAGNETIC FIELD, TAKING INTO ACCOUNT OF THE ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT

[1]*Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus*
e.ovsiyuk@mail.ru
[2]*Gymnasium, Kalinkovichi, Belarus*
vekoolga@mail.ru
[3]*Secondary school, Kochischany, Yelsk region, Belarus*
voinyuschka@mail.ru
[4]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus*
vasiliy_bspu@mail.ru
[5]*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
v.redkov@dragon.bas-net.by

The Dirac equation for spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment is solved in presence of the external uniform magnetic field. After separation of the variables, the problem is reduced to a 4-order ordinary differential equation, which is solved exactly with the use of the factorization method. A generalized formulas for Landau energy levels are found. Solutions are expressed in terms of confluent hypergeometric functions.

Keywords: electron, anomalous magnetic moment, magnetic field, exact solutions.

Уравнение Дирака для частицы со спином 1/2 с аномальным магнитным моментом в римановом пространстве–времени (при использовании тетрадного формализма) может быть представлено в виде [1–3]

$$\left\{\gamma^{c}\left[i\left(e^{\beta}_{(c)}\partial_{\beta}+\frac{1}{2}\sigma^{ab}\gamma_{abc}\right)-\frac{e}{\hbar c}A_{c}\right]-i\lambda\frac{2e}{Mc^{2}}\sigma^{\alpha\beta}(x)F_{\alpha\beta}(x)-\frac{Mc}{\hbar}\right\}\Psi=0. \qquad (1)$$

Отметим, размерности входящих в уравнение величин:

$$\left[\frac{Mc}{\hbar}\right]=l^{-1},\quad \left[\frac{e}{\hbar c}A\right]=l^{-1},\quad \left[\frac{e}{\hbar c}F\right]=l^{-2},\quad \left[\frac{eF}{Mc^2}\right]=l^{-1};$$

соответственно свободный параметр λ – безразмерный. Рассмотрим это уравнение в однородном магнитном поле с использованием цилиндрических координат и тетрады. С учетом равенства

$$\sigma^{\alpha\beta}(x)F_{\alpha\beta}(x)=2\sigma^{\phi r}F_{\phi r}=i\gamma^2\gamma^1 B=iB\Sigma_3$$

получаем (пусть $\Psi=\varphi/\sqrt{r}$):

$$\left[i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}+i\gamma^1\frac{\partial}{\partial r}+\gamma^2\left(\frac{i\partial_\phi}{r}+\frac{eBr}{2}\right)+i\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}+\lambda\frac{2eB}{Mc^2}\Sigma_3-\frac{Mc}{\hbar}\right]\varphi=0. \tag{2}$$

Подстановка для волновой функции следующая:

$$\varphi=e^{-i\varepsilon t}e^{im\phi}e^{ikz}\begin{vmatrix}f_1(r)\\ f_2(r)\\ f_3(r)\\ f_4(r)\end{vmatrix},\left[\varepsilon\gamma^0+i\gamma^1\frac{\partial}{\partial r}-\gamma^2\mu(r)-k\gamma^3+\Gamma\Sigma_3-M\right]\begin{vmatrix}f_1(r)\\ f_2(r)\\ f_3(r)\\ f_4(r)\end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

где использованы обозначения

$$\frac{m}{r}-\frac{eBr}{2}\Rightarrow\mu(r),\quad \lambda\frac{2eB}{Mc^2}\Rightarrow\Gamma,\quad \frac{Mc}{\hbar}\Rightarrow M,\quad \frac{\varepsilon}{\hbar c}\Rightarrow\varepsilon. \tag{4}$$

Далее, учитывая явный вид матриц Дирака в спинорном представлении, получаем 4 радиальных уравнения

$$\begin{aligned}&-i\left(\frac{d}{dr}+\mu\right)f_4+(\varepsilon+k)f_3+(\Gamma-M)f_1=0,\quad -i\left(\frac{d}{dr}-\mu\right)f_3+(\varepsilon-k)f_4-(\Gamma+M)f_2=0,\\ &+i\left(\frac{d}{dr}+\mu\right)f_2+(\varepsilon-k)f_1+(\Gamma-M)f_3=0,\ +i\left(\frac{d}{dr}-\mu\right)f_1+(\varepsilon+k)f_2-(\Gamma+M)f_4=0.\end{aligned} \tag{5}$$

Пробуем наложить линейное ограничение (по аналогии со случаем частицы без аномального магнитного момента) $f_3=Af_1,\quad f_4=Af_2$; уравнения (5) принимают вид

$$\begin{aligned}&-i\left(\frac{d}{dr}+\mu\right)f_2+\left[\varepsilon+k+\frac{(\Gamma-M)}{A}\right]f_1=0,+i\left(\frac{d}{dr}+\mu\right)f_2+[\varepsilon-k+(\Gamma-M)A]f_1=0,\\ &-i\left(\frac{d}{dr}-\mu\right)f_1+\left[\varepsilon-k-\frac{(\Gamma+M)}{A}\right]f_2=0,+i\left(\frac{d}{dr}-\mu\right)f_1+[\varepsilon+k-(\Gamma+M)A]f_2=0.\end{aligned}$$

Здесь (1) и (3), а также (2) и (4) будут совпадать, если выполняются соотношения

$$\varepsilon+k+\frac{(\Gamma-M)}{A}=-[\varepsilon-k+(\Gamma-M)A],\quad \varepsilon-k-\frac{(\Gamma+M)}{A}=-[\varepsilon+k-(\Gamma+M)A];$$

их можно переписать так:

$$2\varepsilon=(M-\Gamma)\left(A+\frac{1}{A}\right),\quad 2\varepsilon=(M+\Gamma)\left(A+\frac{1}{A}\right).$$

Очевидно, что эти уравнения не совместны. Таким образом, при учете взаимодействия через аномальный магнитный момент невозможно диагонализировать оператор спиральности. Вследствие этого, возникающая система четырех зацепляющихся уравнений первого порядка (5) является сложной для анализа

Обратимся к полученным четырем уравнениям, их можно представить в виде двух линейных систем:

$$(\Gamma-M)f_1+(\varepsilon+k)f_3=i\left(\frac{d}{dr}+\mu\right)f_4=iD_+f_4,$$

$$+(\varepsilon-k)f_1+(\Gamma-M)f_3=-i\left(\frac{d}{dr}+\mu\right)f_2=-iD_+f_2,$$

$$-(\Gamma+M)f_2+(\varepsilon-k)f_4=i\left(\frac{d}{dr}-\mu\right)f_3=iD_-f_3,$$

$$+(\varepsilon+k)f_2-(\Gamma+M)f_4=-i\left(\frac{d}{dr}-\mu\right)f_1=-iD_-f_1.$$

Отсюда следует

$$f_1=+i\frac{(\varepsilon+k)D_+f_2+(\Gamma-M)D_+f_4}{(\Gamma-M)^2-(\varepsilon^2-k^2)},\quad f_3=-i\frac{(\Gamma-M)D_+f_2+(\varepsilon-k)D_+f_4}{(\Gamma-M)^2-(\varepsilon^2-k^2)};$$
$$f_2=+i\frac{(\varepsilon-k)D_-f_1-(\Gamma+M)D_-f_3}{(\Gamma+M)^2-(\varepsilon^2-k^2)},\quad f_4=-i\frac{-(\Gamma+M)D_-f_1+(\varepsilon+k)D_-f_3}{(\Gamma+M)^2-(\varepsilon^2-k^2)}. \qquad (6)$$

Отмечаем равенства

$$D_+D_-=\frac{d^2}{dr^2}-\mu'-\mu^2,\quad D_-D_+=\frac{d^2}{dr^2}+\mu'-\mu^2.$$

С помощью (6) исключим переменные f_1, f_3 в уравнениях выше:

$$-\frac{\Gamma+M}{\Gamma-M}f_2+\frac{\varepsilon-k}{\Gamma-M}f_4=\frac{D_-D_+f_2}{(\Gamma-M)^2-(\varepsilon^2-k^2)}+\frac{\varepsilon-k}{\Gamma-M}\frac{D_-D_+f_4}{(\Gamma-M)^2-(\varepsilon^2-k^2)},$$
$$f_2-\frac{\Gamma+M}{\varepsilon+k}f_4=\frac{D_-D_+f_2}{(\Gamma-M)^2-(\varepsilon^2-k^2)}+\frac{\Gamma-M}{\varepsilon+k}\frac{D_-D_+f_4}{(\Gamma-M)^2-(\varepsilon^2-k^2)}. \qquad (7)$$

Вычтем из первого уравнения второе, отсюда следует

$$f_2=\frac{1}{2\Gamma(\varepsilon+k)}\left(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2+\frac{d^2}{dr^2}+\mu'-\mu^2\right)f_4.$$

Полученное выражение для f_2 подставим в первое уравнение (7):

$$-\frac{d^4f_4}{dr^4}+\left[\frac{e^2B^2}{2}r^2-eB(2m-1)-2(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2)+2\frac{m(m+1)}{r^2}\right]\frac{d^2f_4}{dr^2}+$$
$$\left[e^2B^2r-4\frac{m(m+1)}{r^3}\right]\frac{df_4}{dr}+\left[-\frac{e^4B^4}{16}r^4+\frac{e^2B^2}{4}(eB(2m-1)+2(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2))r^2-\right.$$
$$eB(2m-1)(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2)-(\Gamma^2+M^2+k^2-\varepsilon^2)^2+4\Gamma^2M^2-\frac{e^2B^2}{4}(6m^2-2m-1)+ \qquad (8)$$
$$\left.\frac{m(m+1)(eB(2m-1)+2(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2))}{r^2}-\frac{m(m-2)(m+3)(m+1)}{r^4}\right]f_4=0.$$

Можно получить уравнение 4-го порядка для функции f_2. Для этого (7) представим в виде

$$-\frac{\Gamma+M}{\varepsilon-k}f_2+f_4=\frac{1}{\varepsilon-k}\frac{(\Gamma-M)D_-D_+f_2}{(\Gamma-M)^2-(\varepsilon^2-k^2)}+\frac{D_-D_+f_4}{(\Gamma-M)^2-(\varepsilon^2-k^2)},$$

$$\frac{\varepsilon+k}{\Gamma-M}f_2-\frac{\Gamma+M}{\Gamma-M}f_4=\frac{1}{\Gamma-M}\frac{(\varepsilon+k)D_-D_+f_2}{(\Gamma-M)^2-(\varepsilon^2-k^2)}+\frac{D_-D_+f_4}{(\Gamma-M)^2-(\varepsilon^2-k^2)}.$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим

$$f_4=\frac{1}{2\Gamma(\varepsilon-k)}\left(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2+\frac{d^2}{dr^2}+\mu'-\mu^2\right)f_2.$$

Полученное выражение для f_4 подставим во второе уравнение (7)

$$\frac{d^4 f_2}{dr^4}+\left[-\frac{e^2B^2}{2}r^2+eB(2m-1)+2(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2)-2\frac{m(m+1)}{r^2}\right]\frac{d^2 f_2}{dr^2}+$$

$$\left[-e^2B^2r+4\frac{m(m+1)}{r^3}\right]\frac{df_2}{dr}+\left[\frac{e^4B^4}{16}r^4-\frac{e^2B^2}{4}(eB(2m-1)+2(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2))r^2+\right.$$

$$eB(2m-1)(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2)+(\Gamma^2+M^2+k^2-\varepsilon^2)^2-4\Gamma^2M^2+\frac{e^2B^2}{4}(6m^2-2m-1)-$$

$$\left.\frac{m(m+1)(eB(2m-1)+2(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2))}{r^2}+\frac{m(m-2)(m+3)(m+1)}{r^4}\right]f_2=0.$$

Замечаем, что уравнения для f_2 и f_4 одинаковы. Поэтому достаточно рассмотреть одно из них. Для исследования уравнения 4-го порядка будем использовать метод факторизации:

$$\widehat{F}_4(r)\,f(r)=\widehat{f}_2(r)\widehat{g}_2(r)\,f(r)=0,$$

$$\widehat{f}_2(r)\equiv\frac{d^2}{dr^2}+P_0r^2+P_1+\frac{P_2}{r^2},\quad \widehat{g}_2(r)=\frac{d^2}{dr^2}+Q_0r^2+Q_1+\frac{Q_2}{r^2}.$$

Вычислив оператор

$$\widehat{F}_4=\left[\frac{d^2}{dr^2}+P_0r^2+P_1+\frac{P_2}{r^2}\right]\left[\frac{d^2}{dr^2}+Q_0r^2+Q_1+\frac{Q_2}{r^2}\right]$$

и сопоставив с оператором из (8), найдем два набора числовых коэффициентов:

$$1)\qquad P_0=-\frac{1}{4}B^2e^2,\quad P_2=-m(m+1),$$

$$P_1=eB\left(m-\frac{1}{2}\right)+\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2+2\Gamma\sqrt{\varepsilon^2-k^2},$$

$$Q_0=-\frac{1}{4}B^2e^2,\quad Q_2=-m(m+1),$$

$$Q_1=eB\left(m-\frac{1}{2}\right)+\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2-2\Gamma\sqrt{\varepsilon^2-k^2};$$

и

$$2)\qquad P_0=-\frac{1}{4}B^2e^2,\quad P_2=-m(m+1),$$

$$P_1=eB\left(m-\frac{1}{2}\right)+\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2-2\Gamma\sqrt{\varepsilon^2-k^2},$$

$$Q_0=-\frac{1}{4}B^2e^2,\quad Q_2=-m(m+1),$$

$$Q_1=eB\left(m-\frac{1}{2}\right)+\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2+2\Gamma\sqrt{\varepsilon^2-k^2}.$$

Таким образом, предстоит решить два дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{B^2e^2r^2}{4}+eB\left(m-\frac{1}{2}\right)+\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2+\right.$$
$$\left.2\Gamma\sqrt{\varepsilon^2-k^2}-\frac{m(m+1)}{r^2}\right)f=0, \tag{9}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{B^2e^2r^2}{4}+eB\left(m-\frac{1}{2}\right)+\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2-\right.$$
$$\left.2\Gamma\sqrt{\varepsilon^2-k^2}-\frac{m(m+1)}{r^2}\right)g=0.$$

Рассмотрим первое уравнение (9). Перейдем в нем к переменной $x=eBr^2/2$:

$$x\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{1}{2}\frac{df}{dx}+$$
$$\left[-\frac{x}{4}+\frac{4\Gamma\sqrt{\varepsilon^2-k^2}+(2m-1)eB+2(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2)}{4eB}-\frac{1}{4}\frac{m(m+1)}{x}\right]f=0.$$

Будем искать решение в виде $f=x^a e^{bx}F$:

$$x\frac{d^2F}{dx^2}+\left(\frac{1}{2}+2a+2bx\right)\frac{dF}{dx}+\left[\left(b^2-\frac{1}{4}\right)x+\right.$$
$$\frac{2eBb(4a+1)+4\Gamma\sqrt{\varepsilon^2-k^2}+(2m-1)eB+2(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2)}{4eB}+$$
$$\left.\frac{1}{4}\frac{(2a+m)(2a-m-1)}{x}\right]F=0.$$

При a,b, выбранных согласно

$$a=-\frac{1}{2}m,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m,\quad b=-\frac{1}{2},$$

уравнение упрощается

$$x\frac{d^2F}{dx^2}+\left(\frac{1}{2}+2a-x\right)\frac{dF}{dx}-$$
$$\frac{eB(4a+1)-4\Gamma\sqrt{\varepsilon^2-k^2}-(2m-1)eB-2(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2)}{4eB}F=0$$

и является уравнением для вырожденной гипергеометрической функции с параметрами

$$\alpha=\frac{eB(4a+1)-4\Gamma\sqrt{\varepsilon^2-k^2}-(2m-1)eB-2(\Gamma^2-M^2-k^2+\varepsilon^2)}{4eB},\quad \gamma=\frac{1}{2}+2a.$$

Чтобы построить решения, отвечающие связанным состояниям, следует использовать положительные значения параметра a и отрицательные значения параметра b (для определенности предполагаем, что $eB>0$):

$$a=-\frac{m}{2},\quad (m<0);$$
$$a=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}>0\quad (m\geq 0).$$

Условие обрыва ряда до полинома $\alpha=-n$ (пусть $\varepsilon^2-k^2=\lambda$) или

$$\frac{eB(4a+1)-4\Gamma\sqrt{\lambda}-(2m-1)eB-2(\Gamma^2-M^2)-2\lambda}{4eB}=-n$$

даст правило квантования для значений энергии:

$$a+\frac{1}{2}-\frac{m}{2}+\frac{M^2-\Gamma^2}{2eB}+n=\frac{\Gamma\sqrt{\lambda}}{eB}+\frac{\lambda}{2eB}.$$

Отсюда получаем

$$(\sqrt{\lambda}+\Gamma)^2 = N, \quad N = M^2 + 2eB\left(a+\frac{1}{2}-\frac{m}{2}+n\right), \; \lambda = (\sqrt{N}-\Gamma)^2 > 0.$$

Далее находим формулу для разрешенных значений энергии

$$\varepsilon^2 - k^2 = \left(\sqrt{M^2 + 2eB\left(a+\frac{1}{2}-\frac{m}{2}+n\right)} - \Gamma\right)^2.$$

В зависимости от значения a получаем два выражения для N:

$$m<0, \quad a = -\frac{m}{2}, \quad \varepsilon^2 - k^2 = \left(\sqrt{M^2 + 2eB\left(\frac{1}{2}-m+n\right)} - \Gamma\right)^2;$$

$$m \ge 0, \quad a = \frac{m}{2}+\frac{1}{2}, \quad \varepsilon^2 - k^2 = \left(\sqrt{M^2 + 2eB(1+n)} - \Gamma\right)^2.$$

Фактически, исследованный случай отвечает первому варианту факторизации оператора 4-го порядка:

$$1) \quad \lambda = (\sqrt{N}-\Gamma)^2.$$

Другая возможная факторизация отличается лишь заменой $\Gamma \Rightarrow -\Gamma$. Поэтому без каких-либо вычислений можно получить решения и второго типа:

$$2) \quad \lambda = (\sqrt{N}+\Gamma)^2.$$

Это означает, что для частицы с аномальным магнитным моментом есть две серии уровней энергии, формально различающиеся знаком при параметре Γ.

Таким образом, уравнение Дирака для частицы со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом решено в присутствии внешнего однородного магнитного поля. Выведены обобщенные формулы, описывающие уровни Ландау для частицы со спином половина в магнитном поле, учитывающие наличие у частицы аномального магнитного момента. Построены соответствующие волновые функции.

Список использованной литературы

1. *Редьков, В. М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 496 с.

2. *Кисель, В. В.* Теория Петраша для частицы со спином 1/2 в искривленном пространстве–времени / В. В. Кисель, Н. Г. Токаревская, В. М. Редьков. – Препринт № 737 / Институт физики НАН Беларуси. – Минск, 2002. – 25 с.

3. Теория Петраша для частицы со спином 1/2 в искривленном пространстве–времени / А. А. Богуш [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 1. – С. 63–68.

Поступило в редакцию 21.03.2016