Доклады Национальной академии наук Беларуси
2016 сентябрь–октябрь Том 60 № 5

МАТЕМАТИКА

УДК 517.936

А. С. ПЛАТОНОВ[1], *С. Г. КРАСОВСКИЙ*[2]

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПФАФФА С МНОГОМЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ И ДОСТАТОЧНО ПРОИЗВОЛЬНЫМИ НИЖНИМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МНОЖЕСТВАМИ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

[1]*Университет гражданской защиты МЧС Беларуси, Минск, Беларусь*
alexpltn@mail.ru
[2]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
kras@im.bas-net.by

Получены конструктивные доказательства существования вполне интегрируемых систем Пфаффа $\partial x / \partial t_i = A_i(t)x,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t = (t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m_+,\ i = \overline{1, m},\ m \geq 2$, с бесконечно дифференцируемыми ограниченными матрицами коэффициентов, имеющих произвольное несвязное нижнее характеристическое множество положительной m-меры Лебега и произвольно заданные характеристическое и нижнее характеристическое множества.

Ключевые слова: вполне интегрируемые линейные системы Пфаффа, характеристическое множество, нижнее характеристическое множество, построение системы Пфаффа по заданному нижнему характеристическому множеству, совместная реализуемость характеристического и нижнего характеристического множеств линейной системы Пфаффа, ограниченное сверху (снизу) m-мерное множество, точная верхняя (нижняя) граница многомерного множества, замкнутое сверху (снизу) многомерное множество.

A. S. PLATONOV[1], *S. G. KRASOVSKII*[2]

CONSTRUCTING THE PFAFFIAN LINEAR SYSTEMS WITH MULTIDIMENSIONAL TIME AND ARBITRARY LOWER CHARACTERISTIC AND CHARACTERISTIC SETS

[1]*University of Civil Protection, Minsk, Belarus*
alexpltn@mail.ru
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
kras@im.bas-net.by

It is proved that there exist the completely integrable Pfaffian systems $\partial x / \partial t_i = A_i(t)x,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t = (t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m_+$, $i = \overline{1, m},\ m \geq 2$, with infinitely differentiable bounded coefficients such that the lower characteristic set of these systems is an arbitrary pre-assigned disconnected set and has a positive Lebesgue m-measure. Also, both characteristic and lower characteristic sets for these systems can be arbitrarily pre-assigned. The proofs are constructive.

Keywords: completely integrable linear Pfaffian systems, a characteristic set, the lower characteristic set, constructing or the linear Pfaffian system with arbitrary preassigned bounded disconnected lower characteristic set with positive Lebesgue m-measure, the joint realizability of the characteristic set and the lower characteristic set for the linear Pfaffian system, bounded from above (from below) m-dimensional set, supremum (infimum) of multidimensional set; closed from above (from below) multidimensional set.

Рассматриваем линейную систему Пфаффа

$$\partial x / \partial t_i = A_i(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m_+, \quad i = \overline{1, m}, \tag{1}$$

с ограниченными непрерывно дифференцируемыми в $\mathbb{R}^m_+ = \{t \in \mathbb{R}^m \mid t \geq 0\}$ матрицами коэффициентов $A_i(t)$, удовлетворяющими в ней условию полной интегрируемости [1, с. 14–24; 2, с. 16–26]. Характеристический [1, с. 83; 3] $\lambda[x] = \lambda$ и нижний характеристический [4] $p[x] = p$ векторы нетривиального решения $x : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ системы (1) будем определять условиями

$$L_x(\lambda) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}}[\ln\|x(t)\| - (\lambda, t)]/\|t\| = 0, \quad L_x(\lambda - \varepsilon e_i) > 0 \quad \forall\varepsilon > 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$l_x(p) \equiv \underline{\lim_{t\to\infty}}[\ln\|x(t)\| - (p, t)]/\|t\| = 0, \quad l_x(p + \varepsilon e_i) < 0 \quad \forall\varepsilon > 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $e_i = (\underbrace{0,...,0,1}_{i}, 0,...,0) \in \mathbb{R}_+^m$ – орт. Под характеристическим Λ_x [1] и нижним характеристическим P_x [4] множествами нетривиального решения $x : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ системы (1) понимают объединения всех характеристических векторов $\Lambda_x = \bigcup \lambda[x]$ и нижних характеристических векторов $P_x = \bigcup p[x]$ этого решения. Множества [3; 4] $\Lambda(A) = \bigcup_{x\neq 0} \Lambda_x$ и $P(A) = \bigcup_{x\neq 0} P_x$ называют соответственно характеристическим и нижним характеристическим множествами системы (1).

Основополагающие результаты теории характеристических векторов и функционалов изложены в монографиях И. В. Гайшуна [1; 2], где дано систематическое изложение теории вполне разрешимых многомерных дифференциальных уравнений. В частности, получено описание свойств характеристических функционалов решений указанных уравнений.

О п р е д е л е н и е 1. *Множество $D \subset \mathbb{R}^m$ будем называть ограниченным сверху (снизу), если существует такое $r \in \mathbb{R}^m$, что $d \le r$ ($d \ge r$) для всех $d \in D$ ($d \le r \Leftrightarrow d_i \le r_i$, $i = \overline{1, m}$,).*

Введем аналог [5, с. 11; 6, с. 32] понятий точной верхней и точной нижней границ одномерного множества для ограниченного сверху множества $D \subset \mathbb{R}^m$, не рассматривая при этом указанные границы как элементы упорядоченного множества подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$. Для этого всякой точке $r \in \mathbb{R}^m$ поставим в соответствие множества

$$\overline{K}(r) = \{p \in \mathbb{R}^m : p \ge r\} \text{ и } \underline{K}(r) = \{p \in \mathbb{R}^m : p \le r\},$$

которые назовем соответственно *верхним* и *нижним прямыми m-мерными углами с вершиной в точке r*.

О п р е д е л е н и е 2. *Точной верхней (точной нижней) границей ограниченного сверху (снизу) множества $D \subset \mathbb{R}^m$ будем называть множество* $\sup D \subset \mathbb{R}^m$ ($\inf D \subset \mathbb{R}^m$) *вершин всех тех верхних прямых m-мерных углов $\overline{K}(r)$ (нижних прямых m-мерных углов $\underline{K}(r)$), каждый из которых имеет с множеством D единственную общую точку – вершину этого угла:*

$$\sup D \equiv \{r \in \mathbb{R}^m : \overline{D} \cap \overline{K}(r) = \{r\}\} \ \ (\inf D \equiv \{r \in \mathbb{R}^m : \overline{D} \cap \underline{K}(r) = \{r\}\}).$$

О п р е д е л е н и е 3. *Множество $D \subset \mathbb{R}^m$ назовем замкнутым сверху (снизу), если оно содержит свою точную верхнюю (нижнюю) границу.*

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ – односвязное замкнутое сверху и снизу выпуклое множество. Отметим, что множества, являющиеся его точной верхней границей $\sup D$ и точной нижней границей $\inf D$, обладают соответственно свойствами характеристического и нижнего характеристического множеств.

В работе [4] установлено существование линейной системы Пфаффа (1) с двумерным временем ($m = 2$) и нижним характеристическим множеством положительной меры Лебега. Далее в [7] было доказано существование линейной системы Пфаффа (1) с двумерным временем ($m = 2$), имеющей своим нижним характеристическим множеством произвольное несвязное множество положительной плоской меры Лебега. В работах [8; 9] установлено существование линейных систем Пфаффа с m-мерным временем ($m \ge 3$) и нижним характеристическим множеством положительной m-меры Лебега.

В работе [10] доказано существование линейной системы Пфаффа (1) с двумерным временем ($m = 2$) и бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами, имеющей в качестве характеристического $\Lambda(A)$ и нижнего характеристического $P(A)$ множеств произвольно заданные ограниченные замкнутые множества $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ и $P \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условию $\sup\{p_i : (p_1, p_2) \in P\} \le \inf\{\lambda_i : (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda\}$, $i = 1, 2$, и представимые монотонно убывающими выпуклыми соответственно вниз и вверх кривыми.

Обобщим указанные утверждения о существовании несвязного нижнего характеристического множества и о совместной реализации характеристического и нижнего характеристического множеств на систему (1) с m-мерным временем t.

В [9] доказана следующая

Л е м м а 1. *Нижнее характеристическое множество функции* $U(t)=\sum_{i=1}^{m} e^{-a_i t_i}$, $a_i>0$, $t_i\ge 0$, $m\ge 2$, *совпадает с множеством*

$$\Pi_a=\left\{ p\in\mathbb{R}_-^m \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m}\frac{p_i}{a_i}=-1,\ a_i>0 \right\}.$$

Легко обобщить на m-мерное пространство доказанную в [11] лемму.

Л е м м а 2. *Для любых точек* q *и* $r\in\Pi_a\subset\mathbb{R}_-^m$ *нижнее характеристическое множество функции* $u(t)=e^{(q,t)}+e^{(r,t)}$, $t\in\mathbb{R}_+^m$, *есть отрезок* S_{qr}, *соединяющий точки* q *и* r.

Введем в рассмотрение ограниченную односвязную замкнутую область $D\subset\mathbb{R}^m$, обладающую следующим свойством: существует вектор $V=(v_1,v_2,...,v_m)>0$ такой, что всякое непустое пересечение $P(D,\gamma)$ области D и гиперплоскости γ, нормальной вектору V, имеет некоторую внутреннюю точку O_γ, такую, что отрезок гиперплоскости γ, соединяющий эту точку с любой точкой границы $\partial P(D,\gamma)$, целиком лежит во множестве $P(D,\gamma)$. Множество всех областей, обладающих указанным свойством будем далее обозначать $\mathcal{G}(V)$. Множество, составленное из точек O_γ области D так, что из каждого пересечения $P(D,\gamma)$ берется единственная такая точка, обозначим $O_V(D)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть ограниченная замкнутая область* $D\subset\mathbb{R}^m$ *состоит из конечного числа* s *непересекающихся областей* $D_j\subset\mathcal{G}(V^{(j)})$, $0<V^{(j)}\in\mathbb{R}^m$, $j=\overline{1,s}$, *а ее точная верхняя граница* $\sup D$ *есть односвязное выпуклое вверх множество. Тогда для любых натуральных* $n\ge m\ge 2$ *существует вполне интегрируемая линейная система Пфаффа (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми матрицами коэффициентов* $A_i(t)$, *нижнее характеристическое множество* $P(A)$ *которой совпадает с* D.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Без ограничения общности, можно считать (с точностью до сдвига), что область D принадлежит m-мерному кубу $[d_1,d_2]\times...\times[d_1,d_2]\subset\mathbb{R}_-^m$, где

$$d_1=\min_{i=\overline{1,m}}\{p_i : p=(p_1,p_2,...,p_m)\in D\},\ d_2=\max_{i=\overline{1,m}}\{p_i : p=(p_1,p_2,...,p_m)\in D\},\ d_1<d_2<0.$$

Предварительные построения. Выберем для дальнейшего рассмотрения область $D_j\subset\mathcal{G}(V^{(j)})\subset\mathbb{R}_-^m$, $j\in\{1,...,s\}$. Пусть соответствующее ей множество $O_{V^{(j)}}(D_j)$ имеет параметрическое представление

$$p=o^{(j)}(\beta_1),\ \beta_1\in[2(j-1)(m-1)+1;2(j-1)(m-1)+2]\subset\mathbb{R},$$

а пересечение границы области D_j с гиперплоскостью, проходящей через точку $o^{(j)}(\beta_1)$ и ортогональной вектору $V^{(j)}$, задано параметрически $p=r^{(j)}(\beta)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_{m-1})$, где

$$\beta_i\in[2(j-1)(m-1)+2i-1;2(j-1)(m-1)+2i]\equiv\Delta_0^{(1)}(i,j),\quad i=\overline{1,m-1}.$$

Пусть для определенности, множество $\sup D\subseteq D_1$, а часть множества $O_{V^{(1)}}(D_1)$, соответствующего множеству $\sup D$, имеет параметрическое представление $p=\overline{o}(\alpha_1)$, где $\alpha_1\in[0;1]$. Тогда как и выше пересечение множества $\sup D$ с ортогональной вектору $V^{(1)}$ гиперплоскостью, проходящей через точку $\overline{o}(\alpha_1)$, будем считать заданной параметрически $p=H(\alpha)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{m-1})$, $\alpha_i\in[0;1]$.

Зафиксируем точку $M_{\overline{\alpha}}=H(\overline{\alpha})$ из указанного выше пересечения. В силу условий теоремы для каждой точки множества $\sup D\subset\mathbb{R}^m$ найдется касательная гиперплоскость, а если в какой-либо точке этого множества существует несколько касательных плоскостей, то будем выбирать ту из них, нормаль к которой имеет все координаты одного знака. При этом любая из указанных касательных гиперплоскостей μ находится «не ниже» этого множества, т. е. для каждого $s\in\sup D$ найдется такое $M_s\in\mu$, что $s\le M_s$. Пусть далее μ – одна из возможных касательных к множеству $\sup D$ в точке $M_{\overline{\alpha}}$ – определена точками $q^{(i)}(\alpha)$, $i=\overline{1,m}$:

$$\begin{aligned}\mu(\alpha,\zeta)&=q^{(1)}(\alpha)(1-\zeta_{m-1})\cdots(1-\zeta_2)(1-\zeta_1)+q^{(2)}(\alpha)(1-\zeta_{m-1})\cdots(1-\zeta_2)\zeta_1+...\\&\dots+q^{(m-1)}(\alpha)(1-\zeta_{m-1})\zeta_{m-2}+q^{(m)}(\alpha)\zeta_{m-1},\quad \zeta=(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_{m-1}),\quad \zeta_i\in[0;1].\end{aligned}\tag{2}$$

При этом положим $q^{(1)}(\alpha) = M_{\overline{\alpha}}$ и потребуем, чтобы проекции этих касательных на координатные оси лежали в границах соответствующих проекций множества $\sup D$.

Построим последовательность $\{\tau_n^{(j)}(h)\}$, $h = (h_1, h_2, ..., h_{m-1})$, где j для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ пробегает значения $1, ..., s$, а h_i для фиксированных $n, j, h_1, ..., h_{i-1}$ – значения $1, ..., 2^n$ по следующему правилу. Первый элемент $\tau_1^{(1)}(1, ..., 1)$ этой последовательности положим равным 1, далее $\tau_n^{(j)}(h_1, ..., h_{m-2}, h_{m-1}) = 2\tau_n^{(j)}(h_1, ..., h_{m-2}, h_{m-1} - 1)$ и т. д. В итоге получим

$$\tau_n^{(j)}(h) = 2^{s\sum_{l=1}^{n}(2^{l-1})^{m-1} + (j-1)(2^n)^{m-1} + (h_1-1)(2^n)^{m-2} + ... + (h_{m-3}-1)(2^n)^2 + (h_{m-2}-1)2^n + h_{m-1} - 1} \le$$

$$\tau_n^{(j+1)}(1, ..., 1) = 2^{j(2^n)^{m-1} + s\sum_{l=1}^{n}(2^{l-1})^{m-1}} \equiv 2^{\sigma_{sm}(j,n)}.$$

Обозначим $\tau_t = t_1 + t_2 + ... + t_m$. Множество $\mathbb{R}_+^m = \{t = (t_1, t_2, ..., t_m) : t_i \ge 0\}$ временного пространства $\mathbb{R}^m$ плоскостями $\tau_t = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, разобьем на слои $\{t \in R_+^m : 2^k \le \tau_t < 2^{k+1}\}$, с замкнутой «нижней» и открытой «верхней» гранями. Символом $\Pi_0^{(1)}(1, ..., 1)$ обозначим начальный слой $\{t \in R_+^m : 0 \le \tau_t < \tau_1^{(1)}(1, ..., 1)\}$. Далее слои последовательно обозначим через $\Pi_n^{(j)}(h)$, где j для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ пробегает значения $1, ..., s$, а h_i для фиксированных $n, j, h_1, ..., h_{i-1}$ – значения $1, ..., 2^n$. Нижней частью слоя $\Pi_n^{(j)}(h)$ будем считать слой $\tilde{\Pi}_n^{(j)}(h) = \{t \in \Pi_n^{(j)}(h) : \tau_n^{(j)}(h) \le \tau_t < \bar{\tau}_n^{(j)}(h)\}$, где $\bar{\tau}_n^{(j)}(h) \equiv \tau_n^{(j)}(h)\sqrt{2}$, а верхней частью – слой $\tilde{\tilde{\Pi}}_n^{(j)}(h) = \{t \in \Pi_n^{(j)}(h) : \bar{\tau}_n^{(j)}(h) \le \tau_t < \bar{\tau}_n^{(j)}(h)\sqrt{2}\}$.

На отрезках $\Delta_0^{(1)}(i, j)$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, s}$, как в работах [7] и [9], используя величину $\varepsilon_n(i, j) = \exp(d_1 2^{\sigma_{sm}(j,n)})$, построим совершенные множества $P_0(i, j)$, аналогичные канторову совершенному множеству [12, с. 50], и модифицированные ступенчатые функции [12, с. 200]

$$\Theta_i^{(j)}(\alpha) : \Delta_0^{(1)}(i, j) \to [0; 1] = \{\Theta_i^{(j)}(\alpha) : \alpha \in P_0(i, j)\}.$$

Далее определим функции $\theta_i^{(j)}(\alpha) = 2(j-1)(m-1) + 2i - 1 + \Theta_i^{(j)}(\alpha)$, отображающие совершенные множества $P_0(i, j)$ отрезков $\Delta_0^{(1)}(i, j)$ на сами эти отрезки. Введем обозначение

$$\theta^{(j)}(\alpha, h) \equiv (\theta_1^{(j)}(\alpha_n^{(h_1)}(1, j)), ..., \theta_{m-1}^{(j)}(\alpha_n^{(h_{m-1})}(m-1, j))), \quad j = \overline{1, s}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Аналогичным образом, используя величину $\varepsilon_n = \exp(d_1 2^{\sigma_{sm}(s,n)})$, построим совершенное множество $\overline{P}_0$ на отрезке $\Delta_0^{(1)} = [0; 1]$ и модифицированную канторову ступенчатую функцию $\Theta_0(\alpha) : \Delta_0^{(1)} \to [0; 1] = \{\Theta_0(\alpha) : \alpha \in \overline{P}_0\}$. Середины сегментов $\Delta_n^{(k)}$ будем обозначать $\overline{\alpha}_n^{(k)}$. Введем обозначение $\Theta(\overline{\alpha}, h) \equiv (\Theta_0(\overline{\alpha}_n^{(h_1)}), ..., \Theta_0(\overline{\alpha}_n^{(h_{m-1})}))$, $n \in \mathbb{N}$.

Построение системы. Для дальнейших построений воспользуемся бесконечно дифференцируемыми на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ функциями

$$e_{01}(\tau, \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \exp\{-[\tau - \tau_1]^{-2} \exp(-[\tau - \tau_2]^{-2})\}, & \tau_1 < \tau < \tau_2, \\ i - 1, & \tau = \tau_i, i = 1, 2, \end{cases}$$

$$e_{00}(\tau, \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \exp(2^4(\tau_2 - \tau_1)^{-4} - (\tau - \tau_1)^{-2}(\tau - \tau_2)^{-2}), & \tau_1 < \tau < \tau_2, \\ 0, & \tau = \tau_i, i = 1, 2, \end{cases}$$

являющимися аналогами стандартных бесконечно дифференцируемых на [0, 1] функций. Отметим, что функция $e_{00}(\tau, \tau_1, \tau_2)$ достигает своего максимального значения 1 на середине отрезка $[\tau_1, \tau_2]$. В [6] приведены оценки производных этих функций, определенных на отрезке $\tau \in (\tau_1, \tau_2) : e_{01}(\tau, \tau_1, \tau_2)$ и $e_{00}(\tau, \tau_1, \tau_2)$ на всяком отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ длины $\tau_2 - \tau_1 \le 1/2$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|de_{01}(\tau, \tau_1, \tau_2)/d\tau\right| \le 2(\tau_2 - \tau_1)[3/(2e)\exp(\tau_2 - \tau_1)^{-2}]^3 \equiv d_{01}, \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2);$$

$$\left|de_{00}(\tau, \tau_1, \tau_2)/d\tau\right| \le 2(\tau_2 - \tau_1)(\sqrt{3/(2e)})^3 \exp[2^4(\tau_2 - \tau_1)^{-4}] \equiv d_{00}, \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2).$$

Построим следующие вектор-функции:

$$\omega(\tau_t) = \begin{cases} 0, & t \in \tilde{\Pi}_n^{(j)}(h), \\ o^{(j)}(\theta_1^{(j)}(\alpha_n^{(h_1)}(1, j)))e_{00}(\tau_t / \bar{\tau}_n^{(j)}(h), 1, \sqrt{2}), & t \in \tilde{\tilde{\Pi}}_n^{(j)}(h), \end{cases}$$

$$\rho(\tau_t)=\begin{cases}0, & t\in\tilde{\Pi}_n^{(j)}(h),\\ r^{(j)}(\theta^{(j)}(\alpha,h))e_{00}(\tau_t/\bar{\tau}_n^{(j)}(h),1,\sqrt{2}), & t\in\tilde{\tilde{\Pi}}_n^{(j)}(h),\end{cases}\quad j=\overline{1,s};$$

$$Q^{(i)}(\tau_t)=\begin{cases}0, & t\in\tilde{\Pi}_n^{(j)}(h),\\ q^{(i)}(\Theta(\bar{\alpha},h))e_{00}(\tau_t/\bar{\tau}_n^{(j)}(h),1,\sqrt{2}), & t\in\tilde{\tilde{\Pi}}_n^{(j)}(h),\end{cases}\quad i=\overline{1,m}.$$

Функции $F^{(i)}(\tau_t)$ на замыкании слоя $\tilde{\tilde{\Pi}}_n^{(j)}(h)$ положим равными $F^{(i)}(\tau_t)=\alpha_n^{(h_i)}(i,j)\in P_0(i,j)$, $h_i\in\{1,...,2^n\}$, а на слое $\tilde{\Pi}_n^{(j)}(h)$ без ее нижней грани будем определять по формуле

$$F^{(i)}(\tau_t)=F^{(i)}(\tau_n^{(j)}(h))+[F^{(i)}(\bar{\tau}_n^{(j)}(h))-F^{(i)}(\tau_n^{(j)}(h))]e_{01}(\tau_t/\tau_n^{(j)}(h),1,\sqrt{2}),$$

где $\tau_t\in(\tau_n^{(j)}(h),\bar{\tau}_n^{(j)}(h))$, $i=\overline{1,m-1}$.

Также введем в рассмотрение функции

$$E(t)=e^{(\omega(\tau_t),t)}+e^{(\rho(\tau_t),t)},\quad \mathcal{E}(t)=e^{(Q^{(1)}(\tau_t),t)}+e^{(Q^{(2)}(\tau_t),t)}+\dots+e^{(Q^{(m)}(\tau_t),t)}.$$

Определим m-мерную бесконечно дифференцируемую функцию

$$x(t,c)=(c_1E(t),[c_1F^{(1)}(\tau_t)+c_2]\mathcal{E}(t),\dots,[c_1F^{(m-1)}(\tau_t)+c_m]\mathcal{E}(t)),\quad t\in\mathbb{R}_+^m, \tag{3}$$

зависящую от произвольного постоянного вектора $c\in\mathbb{R}^m$ и являющуюся решением линейной системы Пфаффа

$$\partial x/\partial t_i=B_i(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^m,\quad t\in\mathbb{R}_+^m,\quad i=\overline{1,m}, \tag{1_2}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на $\mathbb{R}_+^m$ матрицами

$$B_i(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial E(t)/\partial t_i}{E(t)} & 0 & \cdots & 0\\ \dfrac{\partial F^{(1)}(\tau_t)}{\partial t_i}\dfrac{\mathcal{E}(t)}{E(t)} & \dfrac{\partial\mathcal{E}(t)/\partial t_i}{\mathcal{E}(t)} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial F^{(m-1)}(\tau_t)}{\partial t_i}\dfrac{\mathcal{E}(t)}{E(t)} & 0 & \cdots & \dfrac{\partial\mathcal{E}(t)/\partial t_i}{\mathcal{E}(t)}\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}_+^m,\quad i=\overline{1,m}. \tag{4}$$

Бесконечная дифференцируемость этих матриц следует из аналогичного свойства вектор-функций $\omega(\tau_t)$, $\rho(\tau_t)$, $Q^{(i)}(\tau_t)$, $i=\overline{1,m}$, и функций $F^{(i)}(\tau_t)$, $i=\overline{1,m-1}$, через которые они определены. Ограниченность матриц (4) следует из оценок

$$\left|E^{-1}(t)\partial E(t)/\partial t_i\right|=|d_1|(\sqrt{2m}d_{00}+1),\quad \left|\mathcal{E}^{-1}(t)\partial\mathcal{E}(t)/\partial t_i\right|\le|d_1|(\sqrt{2m}d_{00}+1),$$
$$\left|\partial F(\tau_t)/\partial t_i\right|\le 2s(m-1)d_{01}/\tau_n^{(j)}(h)\quad i=\overline{1,m}. \tag{5}$$

Выполнение условия полной интегрируемости для матриц (4) обеспечивается бесконечной дифференцируемостью вектор-функции (3).

Вычисление нижнего характеристического множества. Можно показать, что все решения $x(t,c)$ с вектором c, коллинеарным вектору $(c_1,-\alpha(1,j)c_1,...,-\alpha(m-1,j)c_1)$, где $\alpha(i,j)\in P_0(i,j)$, $j\in\{1,...,s\}$, $i=\overline{1,m-1}$, имеют в качестве своего нижнего характеристического множества отрезок, соединяющий точки $o^{(j)}(\alpha)$ и $r^{(j)}(\alpha)$, где $\alpha=(\alpha(1,j),...,\alpha(m-1,j))$, а для всех остальных решений нижним характеристическим множеством является множество $\sup D$.

Т е о р е м а 2. *Пусть множества $P\subset\mathbb{R}^m$ и $\Lambda\subset\mathbb{R}^m$ определены соответственно выпуклой вверх $p_m=f_P(p_1,...,p_{m-1}):\mathbb{R}^{m-1}\to\mathbb{R}$ и выпуклой вниз $\lambda_m=f_\Lambda(\lambda_1,...,\lambda_{m-1}):\mathbb{R}^{m-1}\to\mathbb{R}$ непрерывными монотонно убывающими в своих выпуклых замкнутых ограниченных областях определения функциями, и удовлетворяют условию*

$$\sup\{p_i:(p_1,p_2,...,p_m)\in P\}\le\inf\{\lambda_i:(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)\in\Lambda\},\quad i=\overline{1,m}.$$

Тогда существует вполне интегрируемое уравнение Пфаффа

$$\partial x / \partial t_i = A_i(t)x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+^m, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1_3}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми матрицами коэффициентов $A_i(t)$ с характеристическим множеством $\Lambda(A) = \Lambda$ и нижним характеристическим множеством $P(A) = P$.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Без ограничения общности можно считать, что множество $P \subset \mathbb{R}^m$ принадлежит m-мерному кубу $[d_1, d_2]\times\ldots\times[d_1, d_2] \subset \mathbb{R}_-^m$, а множество $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ – кубу $\big[|d_2|, |d_1|\big]\times\ldots\times\big[|d_2|, |d_1|\big] \subset \mathbb{R}_+^m$, где

$$d_1 = -\max_{i=1,m}\{|p_i| : p = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in P \cup \Lambda\},$$

$$d_2 = -\min_{i=1,m}\{|p_i| : p = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in P \cup \Lambda\}, \; d_1 < d_2 \le 0.$$

Предварительные построения. Положим, что множества P и Λ, определяемые функциями f_P и f_Λ, допускают следующие параметрические представления

$$P : p = H(\alpha) \text{ и } \Lambda : p = G(\alpha), \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}), \; \alpha_i \in [0;1].$$

В силу условий теоремы для каждой точки множеств P и $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ найдется касательная гиперплоскость, а если в какой-либо точке этих множеств существует несколько касательных плоскостей, то будем выбирать ту из них, нормаль к которой имеет все координаты одного знака. При этом любая из указанных касательных гиперплоскостей μ к множеству $P \subset \mathbb{R}^m$ находится «не ниже» этого множества, а любая из касательных гиперплоскостей ν к множеству $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ находится «не выше» множества Λ. Это означает, что для каждого $s \in P$ найдется такое $M_s \in \mu$, что $s \le M_s$, а для каждого $s \in \Lambda$ найдется такое $M_s \in \nu$, что $s \ge M_s$.

Пусть касательная гиперплоскость $\mu(\alpha,\zeta)$ к множеству P в точке $H(\alpha)$ и касательная гиперплоскость $\nu(\alpha,\zeta)$ к множеству Λ в точке $G(\alpha)$ определены соответственно m-ками точек $q^{(i)}(\alpha) \in \mathbb{R}^m$ и $r^{(i)}(\alpha) \in \mathbb{R}^m$, $i = \overline{1,m}$, по формулам вида (2). При этом положим $q^{(1)}(\alpha) = H(\alpha)$, $r^{(1)}(\alpha) = G(\alpha)$ и потребуем, чтобы проекции этих касательных на координатные оси лежали в границах соответствующих проекций поверхностей P и Λ.

Как и выше построим последовательность $\{\tau_n^{(j)}(h)\}$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_{m-1})$, где j для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ пробегает значения 1, 2, а h_i для фиксированных n, j, $h_1, \ldots, h_{i-1}$ – значения $1, \ldots, 2^n$. Будем иметь

$$\tau_n^{(j)}(h) = 2^{\,s\sum\limits_{l=1}^{n}(2^{l-1})^{m-1} + (j-1)(2^n)^{m-1} + (h_1-1)(2^n)^{m-2} + \ldots + (h_{m-3}-1)(2^n)^2 + (h_{m-2}-1)2^n + h_{m-1} - 1} \le$$

$$\tau_n^{(j+1)}(1, \ldots, 1) = 2^{\,2\sum\limits_{l=1}^{n+1}(2^{l-1})^{m-1}} \equiv 2^{\sigma_m(n)}.$$

Множество $\mathbb{R}_+^m = \{t = (t_1, t_2, \ldots, t_m) : t_i \ge 0\}$ временного пространства $\mathbb{R}^m$ плоскостями $\tau_t = t_1 + t_2 + \ldots + t_m = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, снова разобьем на слои $\Pi_n^{(j)}(h) = \{t \in R_+^m : 2^k \le \tau_t < 2^{k+1}\}$.

На отрезке $\Delta_0^{(1)} = [0;1]$, используя величину $\varepsilon_n = \exp(d_1 2^{\sigma_m(n)})$, построим совершенное множество P_0, аналогичное канторову совершенному множеству, и модифицированную ступенчатую функцию $\Theta(\alpha) : \Delta_0^{(1)} \to [0;1] = \{\Theta(\alpha) : \alpha \in P_0\}$. Введем обозначение $\Theta(\alpha, h) \equiv (\Theta(\alpha_n^{(h_1)}), \ldots, \Theta(\alpha_n^{(h_{m-1})}))$, $n \in \mathbb{N}$.

Построение системы. На множествах

$$\Pi^{(1)} \equiv \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{h_1=1}^{2^n}\ldots\bigcup_{h_{m-1}=1}^{2^n}\Pi_n^{(1)}(h) \text{ и } \Pi^{(2)} \equiv \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{h_1=1}^{2^n}\ldots\bigcup_{h_{m-1}=1}^{2^n}\Pi_n^{(2)}(h)$$

определим вектор-функции

$$\mathcal{Q}^{(i)}(\tau_t) = \begin{cases} 0, & t \in \tilde{\Pi}_n^{(j)}(h), \\ q^{(i)}(\Theta(\alpha,h))e_{00}(\tau_t / \bar{\tau}_n^{(j)}(h), 1, \sqrt{2}), & t \in \approx\!\!\Pi_n^{(j)}(h), \end{cases} \quad i = \overline{1,m};$$

$$\mathcal{R}^{(i)}(\tau_t)=\begin{cases}0, & t\in\tilde{\Pi}_n^{(j)}(h),\\ r^{(i)}(\Theta(\alpha,h))e_{00}(\tau_t/\bar{\tau}_n^{(j)}(h),1,\sqrt{2}), & t\in\tilde{\tilde{\Pi}}_n^{(j)}(h),\end{cases}\quad i=\overline{1,m}.$$

Также введем в рассмотрение функции

$$\mathcal{E}(t)=e^{(\mathcal{Q}^{(1)}(\tau_t),t)}+e^{(\mathcal{Q}^{(2)}(\tau_t),t)}+\ldots+e^{(\mathcal{Q}^{(m)}(\tau_t),t)} \text{ на } t\in\Pi^{(1)},$$

$$E(t)=\left[e^{-(\mathcal{R}^{(1)}(\tau_t),t)}+e^{-(\mathcal{R}^{(2)}(\tau_t),t)}+\ldots+e^{-(\mathcal{R}^{(m)}(\tau_t),t)}\right]^{-1} \text{ на } t\in\Pi^{(2)}.$$

Построим функцию $x(t),\, t\in R_+^m$, по следующему правилу:

$$x(t)=\begin{cases} m^{-1}+[m-m^{-1}]e_{01}(\tau_t/\tau_n^{(j)}(h),1,\sqrt{2}), & t\in\tilde{\Pi}_n^{(1)}(1,1,\ldots,1),\\ \mathcal{E}(t), & t\in\Pi^{(1)}\setminus\tilde{\Pi}_n^{(1)}(1,1,\ldots,1),\\ m+[m^{-1}-m]e_{01}(\tau_t/\tau_n^{(j)}(1,1,\ldots,1),1,\sqrt{2}), & t\in\tilde{\Pi}_n^{(2)}(1,1,\ldots,1),\\ E(t), & t\in\Pi^{(2)}\setminus\tilde{\Pi}_n^{(2)}(1,1,\ldots,1).\end{cases}$$

Эта функция бесконечно дифференцируема и является решением уравнения Пфаффа (1_3) с ограниченными, в силу оценок вида (5), бесконечно дифференцируемыми на $\mathbb{R}_+^m$ коэффициентами $A_i(t)=x^{-1}(t)\partial x(t)/\partial t_i$. Бесконечная дифференцируемость $A_i(t)$ следует из аналогичного свойства функций, через которые они определены.

Вычисление характеристических множеств. Можно показать, что нижним характеристическим множеством функции $x(t)$ является поверхность $P=P_{\mathcal{E}}$, а характеристическим множеством – поверхность $\Lambda=\Lambda_E$.

Полученные результаты для системы (1_2) и уравнения (1_3) легко переносятся на систему вида (1).

Авторы выражают глубокую признательность академику НАН Беларуси Н. А. Изобову за плодотворное обсуждение результатов настоящей работы и члену-корреспонденту НАН Беларуси В. В. Гороховику за полезные консультации по теории множеств.

Список использованной литературы

1. *Гайшун, И. В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И. В. Гайшун. – Минск, 1983.

2. *Гайшун, И. В.* Линейные уравнения в полных дифференциалах / И. В. Гайшун. – Минск, 1989.

3. *Грудо, Э. И.* Характеристические векторы и множества функций двух переменных и их основные свойства / Э. И. Грудо // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 12. – С. 2115–2128.

4. *Изобов, Н. А.* О существовании линейных систем Пфаффа с множеством нижних характеристических векторов положительной плоской меры / Н. А. Изобов // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 12. – С. 1623–1630.

5. *Шефер, Х.* Топологические векторные пространства / Х. Шефер. – М.: Мир, 1971. – 360 с.

6. *Колмогоров, А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 543 с.

7. *Изобов, Н. А.* О существовании линейной системы Пфаффа с несвязным нижним характеристическим множеством положительной меры / Н. А. Изобов, А. С. Платонов // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 65–71.

8. *Изобов, Н. А.* Существование линейных систем Пфаффа с нижним характеристическим множеством положительной меры Лебега в пространстве $\mathbb{R}^3$ / Н. А. Изобов, С. Г. Красовский, А. С. Платонов // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1311–1318.

9. *Изобов, Н. А.* Линейные системы Пфаффа с нижним характеристическим множеством положительной *m*-меры Лебега / Н. А. Изобов, С. Г. Красовский, А. С. Платонов // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 5. – С. 635–646.

10. *Изобов, Н. А.* Построение линейного уравнения Пфаффа с произвольно заданными характеристическим и нижним характеристическим множествами / Н. А. Изобов, А. С. Платонов // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 12. – С. 1596–1603.

11. *Платонов, А. С.* Существование линейных систем Пфаффа с произвольным нижним характеристическим множеством, являющимся счетным множеством отрезков пространства $\mathbb{R}^3$ / А. С. Платонов, А. А. Тимофеева // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 10. С. 1444–1452.

12. *Натансон, И. П.* Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – М., 1974.

Поступило в редакцию 09.03.2016