Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **сентябрь–октябрь** **Том 60 № 5**

УДК 517.925

М. С. БЕЛОКУРСКИЙ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОТРАЖАЮЩИЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ ПЕРИОДАМИ ОДНОРОДНОЙ И НЕОДНОРОДНОЙ ЧАСТЕЙ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь
drakonsm@ya.ru

Для линейной неоднородной дифференциальной системы получены необходимые и достаточные условия совпадения ее отражающей функции с отражающей функцией соответствующей системы с нулевой матрицей. В качестве следствия дано достаточное условие того, чтобы линейная неоднородная система, однородная и неоднородная части которой периодические с несоизмеримыми периодами, имела периодическую отражающую функцию с периодом, равным периоду неоднородной части. Полученные условия применены для нахождения частично нерегулярных периодических решений квазипериодической системы матричных уравнений.

Ключевые слова: периодическая отражающая функция, квазипериодическая линейная дифференциальная система.

M. S. BELOKURSKY

PERIODIC REFLECTING FUNCTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH INCOMMESURABLE PERIODS OF HOMOGENEOUS AND NONHOMOGENEOUS PARTS

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus
drakonsm@ya.ru

The necessary and sufficient conditions, under which a reflecting function of a linear nonhomogeneous differential system coincides with that of the corresponding system with a zero matrix, were established. The sufficient condition for the linear nonhomogeneous system, the homogeneous and nonhomogeneous parts of which are periodic with incommensurable periods, has a periodic reflecting function with a period coinciding with that of the nonhomogeneous part. Due to the conditions obtained, the irregular periodic solutions of the quasi-periodic differential system of matrix equations were obtained.

Keywords: periodic reflecting function, quasi-periodic linear differential system.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с непрерывной по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемой по x правой частью. Через $\varphi(t; \tau, x)$ обозначим общее решение в форме Коши системы (1), т. е. $\varphi(t; \tau, x)$ – решение системы (1) с начальным условием $\varphi(\tau; \tau, x) = x$. Пусть I_x – максимальный симметричный относительно нуля интервал существования решения $\varphi(t; 0, x)$. Обозначим $D(X) := \{(t, \varphi(t; 0, x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in I_x, x \in \mathbb{R}^n\}$. Из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных и определения множества $D(X)$ вытекает, что $D(X)$ – открытая область в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, содержащая гиперплоскость $t = 0$. Отражающей функцией системы (1) называется [1; 2, с. 11; 3, с. 62] вектор-функция $F : D(X) \to \mathbb{R}^n$, действующая по правилу $(t, x) \mapsto \varphi(-t; t, x)$. Другими словами, для любого решения $x(t)$ этой системы, существующего на симметричном промежутке $(-\xi, \xi)$, верно тождество $F(t, x(t)) \underset{t}{\equiv} x(-t)$ для всех $t \in (-\xi, \xi)$. Это свойство можно принять [2, с. 16] за определение отражающей функции. Из определения отражающей функции и теоремы о дифференцируемости по начальным данным следует, что отражающая функция $F(t,x)$ системы (1) имеет в области $D(X)$ частные производные F_t и F_x.

Принципиально важным результатом теории отражающей функции является следующий критерий [1; 2, с. 11–12; 3, с. 63–64]: вектор-функция $F = F(t,x): D(X) \to \mathbb{R}^n$ является отражающей функцией системы (1), если и только если она удовлетворяет начальному условию $F(0,x) \equiv x$ и системе уравнений в частных производных

$$F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется [2, с. 12; 3, с. 63] основным уравнением (соотношением) для отражающей функции. Разработаны методы, которые в ряде случаев позволяют находить отражающую функцию системы (1) без нахождения ее решений. Более того, зная лишь некоторые свойства отражающей функции системы, можно исследовать поведение ее решений, не прибегая к построению отражающей функции [2–7].

Две системы называются эквивалентными в смысле совпадения отражающих функций [3, с. 75], если их отражающие функции совпадают в некоторой области, содержащей гиперплоскость $t = 0$. Так как решения эквивалентных систем обладают рядом одинаковых свойств, то задача о построении классов эквивалентных систем и выбора простейших (например, интегрируемых в конечном виде) систем-представителей этих классов представляется важной и актуальной.

Поскольку в работе рассматриваются линейные дифференциальные системы, заданные при всех $t \in \mathbb{R}$, а для них область $D(X)$ определения отражающей функции совпадает с расширенным фазовым пространством $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, то для таких систем естественно изучать условия совпадения их отражающих функций во всем расширенном фазовом пространстве. Поэтому далее под эквивалентностью линейных систем в смысле совпадения их отражающих функций понимается совпадение отражающих функций этих систем во всем расширенном фазовом пространстве.

В данной работе рассматриваются квазипериодические двухчастотные линейные дифференциальные системы такие, что их однородная и неоднородная части являются периодическими с несоизмеримыми периодами, и выясняются условия существования периодических отражающих функций у таких систем.

Имеет место

Т е о р е м а. *Для того чтобы линейная неоднородная дифференциальная система*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

с непрерывными $n \times n$*-матрицей* $A(t)$ *и вектор-функцией имела ту же отражающую функцию, что и система*

$$\dot{x} = f(t), \tag{4}$$

необходимо и достаточно выполнения условий:

1) матричнозначная функция $A(t)$ *является нечетной*;

2) имеет место тождество

$$A(t)\int_t^{-t} f(s)ds = 0 \text{ для всех } t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

При этом отражающей функцией $F(t,x)$ *этих систем является вектор-функция*

$$F(t,x) = x + \int_t^{-t} f(s)ds. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Общее решение в форме Коши системы (4) задается формулой $\varphi(t;\tau,x) = x + \int_\tau^t f(s)ds$. Вследствие этого представления по определению отражающей функции легко находим, что отражающая функция $F(t,x)$ системы (4) задается равенством (6).

Покажем, что при выполнении условий 1) и 2) функция (6) является отражающей функцией и системы (3). Для этого достаточно убедиться, что функция (6) удовлетворяет основному соотношению (2) для отражающей функции системы (3). Подставляя в него функцию (6), после очевидно равносильных преобразований получим тождество

$$A(t)x + A(-t)x + A(-t)\int_{t}^{-t} f(t)dt \overset{t,x}{\equiv} 0. \quad (7)$$

Так как при выполнении условий 1) и 2) теоремы тождество (7), очевидно, является верным, то функция (6) является отражающей функцией системы (3). Достаточность доказана.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть системы (3) и (4) эквивалентны в смысле совпадения отражающих функций. Как показано выше, система (4) имеет отражающую функцию (6). Так как функция (6) является также отражающей функцией системы (3), то для системы (3) и этой функции выполняется основное тождество (2). Отсюда получим тождество (7). Это тождество выполнено при всех t и x. Полагая в нем $x = 0$ и заменяя $-t$ на t, получаем условие 2). Значит, должно выполняться тождество

$$(A(t) + A(-t))x \overset{t,x}{\equiv} 0. \quad (8)$$

Тождество (8) означает, что линейный оператор $A(t) + A(-t)$ является нулевым, т. е. $A(t) = -A(-t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Таким образом, функция $A(t)$ – нечетная и, как доказано выше, справедливо условие 2). Необходимость, а вместе с ней и теорема доказаны.

Заметим, что условие 2) равносильно условию

2′) при каждом $t \in \mathbb{R}$ вектор $\int_{-t}^{t} f(s)ds$ принадлежит ядру Ker $A(t)$ линейного оператора $A(t)$.

Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы. По матрице $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, определим множество $H_A := \{t \in \mathbb{R}\colon \det A(t) \neq 0\}$. Так как $A(t)$ нечетна, то множество H_A симметрично относительно нуля. Поскольку $A(t)$ непрерывна, то и функция $\det A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна, и поэтому множество H_A открыто в $\mathbb{R}$, т. е. состоит из объединения интервалов. Итак, H_A – симметричное относительно нуля открытое множество.

Так как Ker $A(t) = \{0\}$ для $t \in H_A$, то для любого $t \in H_A$ должно выполняться равенство $\int_{t}^{-t} f(s)ds = 0$. Дифференцируя это соотношение (что возможно, поскольку H_A открыто), получим $f(t) = -f(-t)$ для любого $t \in H_A$, т. е. вектор-функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является нечетной на симметричном относительно нуля множестве H_A и даже на его замыкании cl H_A, так как $f(t)$ непрерывна.

Если множество H_A плотно в $\mathbb{R}$, то его замыкание cl $H_A = \mathbb{R}$. Поэтому $f(t)$ является нечетной при всех $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, легко видеть, что для нечетной на $\mathbb{R}$ функции $f(t)$ условие 2) выполнено при любой матрице $A(t)$. Таким образом, доказано

С л е д с т в и е 1. *Если матрица $A(t)$ невырождена при всех $t \in \mathbb{R}$, то системы (3) и (4) имеют одну и ту же отражающую функцию, если и только если матричнозначная функция $A(\cdot)$ и вектор-функция $f(\cdot)$ нечетны. При этом отражающей функцией систем (3) и (4) будет функция $F(t, x) = x$.*

Если же множество тех $t \in \mathbb{R}$, при которых матрица $A(t)$ невырождена, не совпадает с $\mathbb{R}$, то условие 2) теоремы не обязательно означает нечетность вектор-функции $f(\cdot)$, что подтверждает следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^2,$$

матрица $A(t)$ коэффициентов которой нечетная и имеет нулевой определитель при всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ a_3(t) & a_4(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что $a_1^2(t) + a_2^2(t) \neq 0$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Согласно теореме, данная система имеет ту же отражающую функцию, что и система $\dot{x} = f(t)$, тогда и только тогда, когда выполняется тождество (5). Из этого тождества получаем

$$a_1(t)\int\limits_t^{-t} f_1(s)ds \equiv -a_2(t)\int\limits_t^{-t} f_2(s)ds, \quad a_3(t)\int\limits_t^{-t} f_1(s)ds \equiv -a_4(t)\int\limits_t^{-t} f_2(s)ds. \tag{9}$$

Найдем все вектор-функции $f(t) = (f_1(t), f_2(t))^{\mathrm{T}}$, для которых выполнены эти тождества. Так как $\det A(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и первая строка матрицы $A(t)$ ненулевая, то вторая ее строка пропорциональна первой, а значит, для справедливости этих тождеств необходима и достаточна справедливость только первого из них.

Первое тождество в (9), поскольку вектор $(a_1(t), a_2(t))^{\mathrm{T}}$ ненулевой, выполняется тогда и только тогда, когда для некоторой функции $h(t)$ справедливы тождества

$$\int\limits_t^{-t} f_1(s)ds \equiv -a_2(t)h(t), \ \int\limits_t^{-t} f_2(s)ds \equiv a_1(t)h(t). \tag{10}$$

Для того чтобы тождества (10) выполнялись, необходимо, чтобы функция $h(t)$ была четной (поскольку левые части в (10) и функции $a_1(t)$, $a_2(t)$ – нечетные) и чтобы функции $a_1(t)h(t)$ и $a_2(t)h(t)$ были непрерывно дифференцируемыми (поскольку левые части в (10) – непрерывно дифференцируемые функции).

Покажем, что эти условия и достаточны для существования функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, удовлетворяющих тождествам (10). Зафиксируем какую-либо четную функцию $h(t)$, для которой правые части в (10) – непрерывно дифференцируемые функции. Обозначим $-a_2(t)h(t)$ через $g_1(t)$. Тогда первое тождество в (10) примет вид $\int\limits_t^{-t} f_1(s)ds \equiv g_1(t)$. Дифференцируя его по t, получим

$$f_1(t) + f_1(-t) \equiv -\dot{g}_1(t). \tag{11}$$

Функция $\dot{g}_1(t)$ четная, как производная нечетной функции, и непрерывная. Будем искать решение функционального уравнения (11) в виде

$$f_1(t) = -\frac{\dot{g}_1(t)}{2} + r_1(t), \tag{12}$$

где $r_1(t)$ – неизвестная непрерывная функция. Заменяя в (11) функцию $f_1(t)$ указанным представлением, получим с учетом четности $\dot{g}_1(t)$ тождество $r_1(t) + r_1(-t) \equiv 0$, т. е. $r_1(t)$ – нечетная функция. Обратно, легко видеть, что функция вида (12) с нечетной непрерывной функцией $r_1(t)$, удовлетворяет первому тождеству в (10). Действительно,

$$\int\limits_t^{-t} f_1(s)ds \equiv \int\limits_t^{-t}\left(-\frac{\dot{g}_1(s)}{2} + r_1(s)\right)ds = g_1(t) + \int\limits_t^{-t} r_1(s)ds = g_1(t) = -a_2(t)h(t).$$

Точно так же, если обозначить функцию $a_1(t)h(t)$ через $g_2(t)$, решение второго функционального уравнения в (10) найдем в виде

$$f_2(t) = -\frac{\dot{g}_2(t)}{2} + r_2(t), \tag{13}$$

где $g_2(t) \equiv a_1(t)h(t)$, а $r_2(t)$ – произвольная нечетная функция. Таким образом, решение задачи об описании множества вектор-функций $f(t) = (f_1(t), f_2(t))^{\mathrm{T}}$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих тождествам (9), сводится к задаче описания множества четных функций $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, для которых обе функции $a_1(t)h(t)$ и $a_2(t)h(t)$ были бы непрерывно дифференцируемыми.

Как видим, вектор-функция $f(t) = (f_1(t), f_2(t))^{\mathrm{T}}$, компоненты которой построены выше и задаются равенствами (12), (13), вообще говоря, не является нечетной, каковы бы ни были элементы вырожденной нечетной матрицы $A(t)$, первая строка которой при всех $t \in \mathbb{R}$ ненулевая ($a_1^2(t) + a_2^2(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$).

З а м е ч а н и е 1. *Рассмотренный пример дает частичное решение следующей задачи: для линейной однородной дифференциальной системы* $\dot{x} = A(t)x$ *в терминах ее матрицы коэффициентов* $A(t)$ *описать все такие ее неоднородные возмущения* $f(t)$, *при которых отражающие функции систем* $\dot{y} = A(t)y + f(t)$ *и* $\dot{z} = f(t)$ *совпадают.*

С л е д с т в и е 2. *Пусть матрица* $A(t)$ *имеет период* ω_1, *а вектор-функция* $f(t)$ – *период* ω_2. *Для того чтобы система (3) имела* ω_2*-периодическую по t отражающую функцию (6), необходимо и достаточно выполнения условий 1), 2) теоремы и равенства*

$$\int_0^{\omega_2} f(s)ds = 0. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как все условия теоремы выполнены, то система (3) имеет отражающую функцию (6). Из [8, с. 79, теорема 5.2] вытекает, что условие (14) является необходимым и достаточным для ω_2-периодичности интеграла $\int_t^{-t} f(s)ds$. Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 2. *В случае, когда числа* ω_1 *и* ω_2 – *несоизмеримы, следствие 2 дает достаточное условие существования у квазипериодической системы (3)* ω_2*-периодической по t отражающей функции.*

Пример 2. Рассмотрим квазипериодическую систему

$$\dot{x}_1 = 3x_1 \sin t - x_2 \sin t + \nu \cos \nu t, \quad \dot{x}_2 = 9x_1 \sin t - 3x_2 \sin t + 3\nu \cos \nu t, \quad \nu \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \tag{15}$$

с двухчастотным базисом. Для этой системы имеем

$$A(t) = \begin{pmatrix} 3\sin t & -\sin t \\ 9\sin t & -3\sin t \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \nu \cos \nu t \\ 3\nu \cos \nu t \end{pmatrix}.$$

Как видим, матрица $A(t)$ является 2π-периодической, $\det A(t) \equiv 0$, а вектор-функция $f(t)$ – четная и $(2\pi/\nu)$-периодическая, при этом числа 2π и $2\pi/\nu$ – несоизмеримы. Кроме того, $\operatorname{Ker} A(t) = \{\alpha(1,3)^{\mathrm{T}} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Условие 1) теоремы, очевидно, выполнено. Проверим условие 2). Так как, очевидно, интеграл $\int_t^{-t} f(s)ds$ принадлежит ядру $\operatorname{Ker} A(t)$, то выполняется равенство $A(t)\int_t^{-t} f(s)ds = 0$. Поэтому согласно теореме, система (15) имеет ту же отражающую функцию, что и $(2\pi/\nu)$-периодическая система

$$\dot{x}_1 = \nu \cos \nu t, \quad \dot{x}_2 = 3\nu \cos \nu t. \tag{16}$$

Отражающая функция этих систем $F(t, x_1, x_2) = (x_1 - 2\sin \nu t, x_2 - 6\sin \nu t)^{\mathrm{T}}$ является $2\pi/\nu$-периодической по *t*. Кроме того, функция $f(t)$ не является нечетной, а отражающие функции систем (15) и (16) совпадают, что дает еще один, наряду с примером 1, пример системы вида (3), для которой условие (5) выполняется не обязательно с нечетной функции $f(t)$.

Предложенный подход можно в некоторых случаях использовать для нахождения частично нерегулярных [9, с. 16] периодических решений систем матричных уравнений. В частности, рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A(-t)S(t) = 0, \quad \dot{r}(t) + S(t)f(t) + A(-t)r(t) + f(-t) = 0, \\ &S(0) = E, \qquad r(0) = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

в которой непрерывные ω_1-периодическая и нечетная $n \times n$-матрица $A(t)$ и ω_2-периодическая *n*-вектор-функция $f(t)$ заданы, причем $A(t)\int_t^{-t} f(s)ds \equiv 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\int_0^{\omega_2} f(s)ds = 0$, отношение ω_1/ω_2 – иррационально, а $n \times n$-матрица $S(t)$ и *n*-вектор-функция $r(t)$ неизвестны. Будем искать ω_2-периодическое решение $(S(t), r(t))$ системы (17).

Предварительно по матрице $A(t)$ и вектор-функции $f(t)$ построим квазипериодическую линейную неоднородную систему (3). С одной стороны, общее решение $\varphi(t; \tau, x)$ в форме Коши системы (3) имеет вид $\varphi(t; \tau, x) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)x + \overline{x}(t)$, где $\Phi(t)$ – какая-либо фундаментальная матрица однородной системы $\dot{x} = A(t)x$, а $\overline{x}(t)$ – частное решение системы (3) с начальным условием $\overline{x}(0) = 0$. Тогда по определению отражающей функции находим $F(t, x) = \Phi(-t)\Phi^{-1}(t)x + \overline{x}(-t)$. Запишем это представление, введя обозначения $S(t) = \Phi(-t)\Phi^{-1}(t)$, $r(t) = \overline{x}(-t)$, в виде $F(t, x) = S(t)x + r(t)$. Так как $F(t, x)$ – отражающая функция, то $F(0, x) \equiv x$. Поэтому справедливы равенства $S(0) = E$, $r(0) = 0$.

Отражающая функция системы (4), как показано выше, имеет вид $F(t,x) = x + \int\limits_t^{-t} f(s)ds$, а так как выполнены условия следствия 2, то отражающие функции систем (3) и (4) совпадают, т. е. верно тождество $(S(t)-E)x + r(t) - \int\limits_t^{-t} f(s)ds \overset{t,x}{\equiv} 0$. Из него находим представления $S(t) \equiv E$, $r(t) \equiv \int\limits_t^{-t} f(s)ds$.

Покажем, что матрица $S(t)$ и вектор $r(t)$ удовлетворяют системе (17). Составим основное соотношение для отражающей функции системы (3):

$$\dot{S}(t)x + \dot{r}(t) + S(t)(A(t)x + f(t)) + A(-t)(S(t)x + r(t)) + f(-t) \overset{t,x}{\equiv} 0. \tag{18}$$

Это тождество выполнено при всех t и x. Полагая в нем $x = 0$, получим тождество $\dot{r}(t) + S(t)f(t) + A(-t)r(t) + f(-t) \overset{t}{\equiv} 0$. С учетом этого из тождества (18) вытекает следующее тождество $(\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A(-t)S(t)) \overset{t}{\equiv} 0$. Выполнение последних двух тождеств означает, что матрица $S(t)$ и вектор $r(t)$ – решение задачи (17).

Таким образом, найдено частично нерегулярное ω_2-периодическое решение $S(t) = E$, $r(t) = \int\limits_t^{-t} f(s)ds$ системы (17).

Автор выражает благодарность В. И. Мироненко и А. К. Деменчуку за постановку задач, внимание к работе и обсуждение результатов.

Список использованной литературы

1. *Мироненко, В. И.* Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В. И. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 9. – С. 1635–1638.
2. *Мироненко, В. И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В. И. Мироненко. – Минск: Университетское, 1986.
3. *Мироненко, В. И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В. И. Мироненко. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004.
4. *Мироненко, В. И.* Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий и отображения Пуанкаре / В. И. Мироненко, В. В. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1347–1352.
5. *Musafirov, E. V.* Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter / E. V. Musafirov // Indian Jornal of Mathematics. – 2008. – Vol. 50, N 1. – P. 63–76.
6. *Mironenko, V. I.* How to construct equivalent differential systems / V. I. Mironenko, V. V. Mironenko // Applied Mathematic Letters. – 2009. – Vol. 22. – P. 1356–1359.
7. *Мироненко, В. И.* Временные симметрии уравнения Риккати / В. И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1(2). – С. 31–33.
8. *Fink, A. M.* Almost periodic differential equations / A. M. Fink // Lecture notes in math. – Vol. 377. – Berlin: Springer, 1974.
9. *Деменчук, А. К.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления / А. К. Деменчук. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2012.

Поступило в редакцию 06.04.2016