

УДК 511.42

В. И. БЕРНИК¹, Н. В. БУДАРИНА², Х. О’ДОННЕЛЛ²ВЕЛИЧИНЫ ДИСКРИМИНАНТОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ
В АРХИМЕДОВОЙ И НЕАРХИМЕДОВОЙ МЕТРИКАХ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

¹Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
bernik@im.bas-net.by²Технологический институт Дублина, Дублин, Ирландия
buda77@mail.ru; hugh.odonnell@nuim.ie

Рассмотрим класс $\mathcal{P}_3(Q)$ многочленов $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ степени 3 и высоты $H(P) \leq Q$, $Q > 1$. Выделим в $\mathcal{P}_3(Q)$ подкласс $S_3(Q)$ полиномов $P(t)$, дискриминанты которых не превосходят $Q^{2n-2-2v_1}$ и делятся на степень простого числа p^e , $p^e > Q^{2v_2}$, $v_1 \geq 0$, $v_2 \geq 0$, $0 \leq v_1 + v_2 < 3/2$. Найдена оценка сверху для мощности подкласса $S_3(Q)$. Доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ и $Q > Q_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\#S_3(Q) < Q^{4-5/3(v_1+v_2)+\varepsilon}$.

Ключевые слова: диофантовы приближения, целочисленный многочлен, дискриминант целочисленного многочлена, p -адические числа, неархимедова метрика.

V. I. BERNIK¹, N. V. BUDARINA², H. O'DONNELL²DISCRIMINANT VALUES OF INTEGRAL POLYNOMIALS IN THE ARCHIMEDEAN
AND NON-ARCHIMEDEAN METRICS¹Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
bernik@im.bas-net.by²Dublin Institute of Technology, Dublin, Ireland
buda77@mail.ru; hugh.odonnell@nuim.ie

Consider the class $\mathcal{P}_3(Q)$ of the polynomials $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ of degree 3 and height $H(P) \leq Q$, $Q > 1$. Define a subclass $S_3(Q)$ in $\mathcal{P}_3(Q)$ by taking the polynomials $P(t)$ having discriminants not exceeding $Q^{2n-2-2v_1}$ and divisible by the power of the prime number p^e , $p^e > Q^{2v_2}$, $v_1 \geq 0$, $v_2 \geq 0$, $0 \leq v_1 + v_2 < 3/2$. The upper bound on the number of the elements in $S_3(Q)$ is found. It has been proved that for any $\varepsilon > 0$ and $Q > Q_0(\varepsilon)$, the inequality $\#S_3(Q) < Q^{4-5/3(v_1+v_2)+\varepsilon}$ is valid.

Keywords: diophantine approximation, integral polynomial, discriminant of an integral polynomial, p -adic numbers, non-archimedean metric.

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

– многочлен с целыми коэффициентами степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$. Для натурального числа $Q > 1$ введем класс многочленов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(t) \in \mathbb{Z}[t], \deg P = n, H(P) \leq Q\}.$$

Через $\#B$ будем обозначать количество элементов конечного множества B , $\mu_1 A_1$ – меру Лебега измеримого множества $A_1 \subset \mathbb{R}$, $\mu_2 A_2$ – меру Хаара измеримого множества A_2 p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Постоянные и величины, зависящие от n , но не зависящие от H и Q , будем обозначать $c_1, c_2, \dots$. Будем использовать символ Виноградова $\ll$, означающий, что запись $A < cB$ можно заменить на $A \ll B$. Дискриминантом многочлена (1) с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называется число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Нетрудно доказать [1], что $D(P) \in \mathbb{Z}$, и получить оценку сверху $D(P)$. Поэтому, если $D(P) \neq 0$, то

$$1 \leq |D(P)| < c_1 Q^{2n-2}, \quad c_2 Q^{-2n+2} < |D(P)|_p \leq 1. \quad (2)$$

В (2) величина $|a|_p$ – это p -адическая норма целого числа $a = p^b a_1$, определенная для простого числа p и максимальной степени b , с которой простое число p входит в a , т. е. $(p, a_1) = 1$:

$$|a|_p = p^{-b}.$$

Для любого a , поэтому и для $D(P) \neq 0$, справедлива формула произведения

$$1 \leq |D(P)| |D(P)|_p.$$

Для вектора $\bar{v} = (v_1, v_2)$ с неотрицательными $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}_+^2$ определим подмножество $\mathcal{P}_n(Q, \bar{v}) \subset \mathcal{P}_n(Q)$

$$\mathcal{P}_n(Q, \bar{v}) = \{P(x) \in \mathcal{P}_n(Q) : 1 \leq |D(P)| < Q^{4-2v_1}, \quad |D(P)|_p < Q^{-2v_2}\}.$$

В сообщении получены новые результаты о величине $\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{v})$. К настоящему времени глубоко исследован только случай $\bar{v} = (v_1, 0)$ и известно следующее. При $n = 3$ доказано [2]

$$\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{v} = (v_1, 0)) \asymp Q^{4-5v_1/3}, \quad 0 \leq v_1 < 3/5.$$

В случае произвольного n найдена оценка снизу [3]

$$\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{v} = (v_1, 0)) > c_3 Q^{n+1-(n+2)v_1/n}, \quad 0 \leq v_1 < n-1.$$

В p -адическом случае известно только, что $\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{v} = (0, v_2)) > c_4 Q^{n+1-2v_2}$ при $0 < v_2 < 1/2$ [4].

В [5] доказано, что $\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{v} = (v_1, v_1)) > c_5 Q^{n+1-4v_1}$ при $0 \leq v_1 < 1/3$ и $n \geq 3$.

Т е о р е м а 1. Пусть $v_1 + v_2 \leq 3/2$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ и $Q > Q_0(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\#\mathcal{P}_3(Q, \bar{v}) < Q^{4-5(v_1+v_2)/3+\varepsilon}. \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Корни многочлена $P(x)$ можно упорядочить относительно одного из них, пусть α_1 , следующим образом:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3|, \quad |\alpha_2 - \alpha_3| \asymp |\alpha_1 - \alpha_3|.$$

Обозначим

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = Q^{-\rho_2}, \quad |\alpha_1 - \alpha_3| = Q^{-\rho_3}, \quad |\alpha_2 - \alpha_3| \asymp Q^{-\rho_3}.$$

Возьмем достаточно малое число ε_1 и целое число $T = [\varepsilon_1^{-1}] + 1$, где $[a]$ – целая часть $a \in \mathbb{R}$. Определим целые числа l_2, l_3 из неравенств

$$(l_2 - 1)/T \leq \rho_2 < l_2/T, \quad (l_3 - 1)/T \leq \rho_3 < l_3/T,$$

и для упрощения обозначим

$$m_2 = l_2/T, \quad m_3 = l_3/T.$$

Вектор $\bar{m} = (m_2, m_3)$ принимает конечное число значений, зависящее от ε_1 , и не зависящее от Q . Это нетрудно доказать, и доказано в ряде работ [6; 7].

Аналогичную процедуру сделаем и с корнями $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ многочлена $P(x)$ из алгебраического замыкания Q^* поля Q_p . Выберем среди этих корней, пусть γ_1 такой, относительно которого можно упорядочить остальные корни так, что

$$\begin{aligned} |\gamma_1 - \gamma_2|_p &\leq |\gamma_1 - \gamma_3|_p, \quad |\gamma_2 - \gamma_3|_p \asymp |\gamma_1 - \gamma_3|_p, \\ |\gamma_1 - \gamma_2|_p &= Q^{-\lambda_2}, \quad |\gamma_1 - \gamma_3|_p = Q^{-\lambda_3}, \quad |\gamma_2 - \gamma_3|_p \asymp Q^{-\lambda_3}, \\ (k_2 - 1)/T &\leq \lambda_2 < k_2/T, \quad (k_3 - 1)/T \leq \lambda_3 < k_3/T, \\ s_2 &= k_2/T, \quad s_3 = k_3/T. \end{aligned}$$

Опять нетрудно доказать, что вектор $\bar{s} = (s_2, s_3)$ принимает конечное, зависящее от ε_1 и не зависящее от Q , число значений. Для того чтобы многочлен $P(x)$ попадал в класс $\mathcal{P}_3(Q, \bar{v})$, необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$\rho_2 + 2\rho_3 \geq v_1, \lambda_2 + 2\lambda_3 \geq v_2, \quad (4)$$

так как в этом случае

$$|D(P)| \ll Q^{4-2v_1}, |D(P)|_p \ll Q^{-2v_2}. \quad (5)$$

Система неравенств (5) следует из оценок сверху дискриминантов

$$1 \leq |D(P)| = |a_3|^4 |\alpha_1 - \alpha_2|^2 |\alpha_1 - \alpha_3|^2 |\alpha_2 - \alpha_3|^2 \ll Q^{4-2v_1},$$

$$1 \leq |D(P)| |D(P)|_p \ll Q^{4-2v_1} |a_3|_p^4 \prod_{1 \leq i < j \leq 3} |\gamma_i - \gamma_j|_p^2 \ll Q^{4-2(v_1+v_2)}.$$

Для того чтобы выполнялись неравенства (4) достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$m_2 + 2m_3 \geq v_1 + 3\varepsilon_1, s_2 + 2s_3 \geq v_2 + 3\varepsilon_1. \quad (6)$$

Будем дополнительно к неравенствам (6) предполагать

$$m_2 + 2m_3 < v_1 + \varepsilon/8, s_2 + 2s_3 < v_2 + \varepsilon/8. \quad (7)$$

В неравенствах (7) величина $\varepsilon_1 < \varepsilon/256$, и поэтому неравенства (6) и (7) не противоречат друг другу.

Л е м м а 1. Пусть $|P(x)| < Q^{-\tau_1}$, и α_1 – ближайший к x корень. Тогда

$$|x - \alpha_1| \ll \min \left(|P(x)/P'(\alpha_1)|, |P(x)(\alpha_1 - \alpha_2)/P'(\alpha_1)|^{1/2}, |P(x)/a_3|^{1/3} \right) \ll$$

$$\min \left(Q^{-\tau_1-1+\rho_2+\rho_3}, Q^{-(\tau_1+1-\rho_3)/2}, Q^{-(\tau_1+1)/3} \right). \quad (8)$$

Л е м м а 2. Пусть $|P(w)|_p < Q^{-\tau_2}$, и γ_1 – корень $P(w)$, удовлетворяющий неравенству $|w - \gamma_1|_p = \min_{1 \leq i \leq 3} |w - \gamma_i|_p$. Тогда

$$|w - \gamma_1|_p \ll \min \left(Q^{-\tau_2+\lambda_2+\lambda_3}, Q^{-(\tau_2-\lambda_3)/2}, Q^{-\tau_2/3} \right). \quad (9)$$

Леммы 1 и 2 доказаны в [6; 7].

Л е м м а 3. Пусть полиномы $P(u), T(u) \in \mathcal{P}_3(Q)$ имеют одинаковые векторы $\bar{m}, \bar{s}$ и не имеют общих корней в параллелепипеде $I \times K$, $\mu_1 I = Q^{-\eta_1}$, $\mu_2 K = Q^{-\eta_2}$. Далее пусть $P(u)$ и $T(u)$ удовлетворяют системе неравенств

$$\max_{x \in I} (|P(x)|, |T(x)|) < Q^{-\tau_1}, \quad (10)$$

$$\max_{w \in K} (|P(w)|_p, |T(w)|_p) < Q^{-\tau_2}. \quad (11)$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau_1 + \tau_2 + 1 + 2 \sum_{j=1}^2 \max(\tau_1 + 1 - j\eta_1, 0) + 2 \sum_{r=1}^2 \max(\tau_2 - r\eta_2, 0) < 6 + \delta.$$

Лемма 3 доказана в одной метрике, как архимедовой [8], так и неархимедовой [4], только со слагаемыми $\max(\tau_1 + 1 - \eta_1, 0)$, $\max(\tau_2 - \eta_2, 0)$ в правой части. Это не позволяло доказать теорему, поскольку ранее учитывалась только малость первой производной.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а л е м м ы 3. Воспользуемся леммами 1 и 2, и от неравенств (10), (11) перейдем к неравенствам (8) и (9). Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – корни многочлена $P(x)$ в $\mathbb{C}$, и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – корни многочлена $T(x)$ в $\mathbb{C}$. Воспользуемся тем, что полиномы $P(u)$ и $T(u)$ имеют одинаковые векторы $\bar{m}$ и $\bar{s}$. В этом случае неравенства (8), (9) можно переписать в виде

$$|x - \theta_1| \ll \min(Q^{-\tau_1-1+m_2+m_3}, Q^{-(\tau_1+1-m_3)/2}, Q^{-(\tau_1+1)/3}), \quad (12)$$

где вместо θ_1 можно брать как α_1 , так и β_1 . Точку x из интервала I можно выбирать так, что левая часть в (12) будет не менее $c_4 Q^{-\eta_1}$, как при $\theta_1 = \alpha_1$, так и при $\theta_1 = \beta_1$. Это приведет к неравенствам

$$\eta_1 \geq \tau_1 + 1 - m_2 - m_3, \eta_1 \geq (\tau_1 + 1 - m_3) / 2, \eta_1 \geq (\tau_1 + 1) / 3,$$

и неравенствам

$$m_2 + m_3 \geq \tau_1 + 1 - \eta_1, m_3 \geq \tau_1 + 1 - 2\eta_1. \quad (13)$$

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – корни многочлена $P(w)$ в $\mathbb{Q}_p^*$, и ξ_1, ξ_2, ξ_3 – корни многочлена $T(w)$ в $\mathbb{Q}_p^*$. Аналогичные соображения в $\mathbb{Q}_p$ приведут к неравенствам

$$\begin{aligned} |w - \zeta_1|_p &\ll \min(Q^{-\tau_2+s_2+s_3}, Q^{-(\tau_2-s_3)/2}, Q^{-\tau_2/3}), \\ \eta_2 &\geq \tau_2 - s_2 - s_3, \eta_2 \geq (\tau_2 - s_3) / 2, \eta_2 \geq \tau_2 / 3, \\ s_2 + s_3 &\geq \tau_2 - \eta_2, s_3 \geq \tau_2 - 2\eta_2, \end{aligned}$$

где вместо ζ_1 можно брать как γ_1 , так и ξ_1 .

Рассмотрим результат полиномов $P(u)$ и $T(u)$:

$$1 \leq |R(P, T)|_p \ll Q^6 \prod_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} |\alpha_i - \beta_j| \prod_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} |\gamma_i - \xi_j|_p. \quad (14)$$

Оценим сверху

$$L = \prod_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} |\alpha_i - \beta_j|.$$

Из оценок (12) имеем

$$\begin{aligned} |\alpha_1 - \beta_1| &\ll (|x - \alpha_1| + |x - \beta_1|) \ll Q^{-\tau_1-1+m_2+m_3}, \\ |\alpha_1 - \beta_i| &\leq |\alpha_1 - \beta_1| + |\beta_1 - \beta_i| \ll (Q^{-\tau_1-1+m_2+m_3}, Q^{-m_i+\varepsilon_1}), i = 2, 3, \\ |\alpha_i - \beta_1| &\leq |\alpha_1 - \beta_1| + |\alpha_1 - \alpha_i| \ll (Q^{-\tau_1-1+m_2+m_3}, Q^{-m_i+\varepsilon_1}), i = 2, 3, \\ |\alpha_i - \beta_j| &\leq |\alpha_1 - \beta_1| + |\alpha_1 - \alpha_i| + |\beta_1 - \beta_j| \ll (Q^{-\tau_1-1+m_2+m_3}, Q^{-m_i+\varepsilon_1}), i \geq 2, j \geq 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Оценки (15) позволяют получить для L оценку

$$L \ll Q^{-\tau_1-1-2m_2-2m_3+8\varepsilon_1}. \quad (16)$$

Используя оценки (13), из (16) получаем

$$\tau_1 + 1 + 2m_2 + 2m_3 - 8\varepsilon_1 \geq \tau_1 + 1 + 2(\tau_1 + 1 - \eta_1) + 2(\tau_1 + 1 - 2\eta_1) - 8\varepsilon_1. \quad (17)$$

Проделив такую же процедуру в p -адическом случае, имеем

$$\tau_2 + 2s_2 + 2s_3 - 8\varepsilon_1 \geq \tau_2 + 2(\tau_2 - \eta_2) + 2(\tau_2 - 2\eta_2) - 8\varepsilon_1. \quad (18)$$

Из неравенств (17), (18) и (14) следует с учетом $m_i \geq 0, s_i \geq 0, i = 2, 3$,

$$\tau_1 + \tau_2 + 1 + 2 \sum_{j=1}^2 \max(\tau_1 + 1 - j\eta_1, 0) + 2 \sum_{r=1}^2 \max(\tau_2 - r\eta_2, 0) - 16\varepsilon_1 < 6 + \delta.$$

Вернемся к **доказательству теоремы**. Предположим противное, и верно неравенство противоположное (3)

$$\#P_3(Q, \bar{v}) \geq Q^{4-5(v_1+v_2)/3+\varepsilon}.$$

Возьмем интервал $I \subset \mathbb{R}$, $\mu_1 I = Q^{-\sigma_1}$, $\sigma_1 > 0$ и цилиндр $K \subset \mathbb{Q}_p$, $\mu_2 K = Q^{-\sigma_2}$, $\sigma_2 > 0$. Будем говорить, что многочлен $P(u)$ принадлежит параллелепипеду $M = I \times K$, если корни α_1 и γ_1 полинома $P(u)$ принадлежат M . Разложим полином $P(x)$ на интервале в ряд Тейлора в точке α_1 , и оценим сверху значения $|P(x)|$ и модулей всех производных сверху при $\sigma_1 = m_2$:

$$\begin{aligned}
P(x) &= P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2 + P'''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^3 / 6, \\
P(\alpha_1) &= 0, |P'(\alpha_1)(x - \alpha_1)| \ll Q^{1-\rho_2-\rho_3-\sigma_1} \ll Q^{1-2m_2-m_3+3\varepsilon_1}, \\
|P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2| &\ll Q^{1-2m_2-m_3+3\varepsilon_1}, |P'''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^3 / 6| \ll Q^{1-3m_2}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Из оценок (19) для всех $x \in I$ имеем

$$|P(x)| \ll Q^{1-2m_2-m_3+3\varepsilon_1}, |P'(x)| \ll Q^{1-m_2-m_3+3\varepsilon_1}, |P''(x)| \ll Q^{1-m_3+3\varepsilon_1}. \tag{20}$$

Разложим многочлен $P(w)$ в цилиндре K в точке γ_1 , и получим оценки, аналогичные (20), для всех $w \in K$ при $s_2 \in (\sigma_2 - \varepsilon_1 / 4, \sigma_2 + \varepsilon_1 / 4)$

$$|P(w)|_p \ll Q^{-2s_2-s_3+3\varepsilon_1}, |P'(w)|_p \ll Q^{-s_2-s_3+3\varepsilon_1}, |P''(w)|_p \ll Q^{-s_3+3\varepsilon_1}. \tag{21}$$

Возьмем середину отрезка I точку d , и зафиксируем некоторую точку $w \in K$. В этих точках также выполняются неравенства (20), (21). Ясно, что существуют параллелепипеды $M = I \times K$, которым принадлежат не менее

$$c_5 Q^{4-5(v_1+v_2)+\varepsilon-m_2-s_2}$$

полиномов при условиях (20), (21). Дважды воспользуемся принципом ящиков Дирихле. В первом случае поделим значения $P(d)$ на $Q^{\varepsilon/16}$ частей, во втором представим цилиндр K , в котором выполняется первое неравенство в (21), в виде объединения $Q^{\varepsilon/16}$ цилиндров. Получим существование не менее $Q^{7\varepsilon/8}$ полиномов, в которых выполняются неравенства

$$|P(d)| \ll Q^{1-2m_2-m_3+3\varepsilon_1-\varepsilon/16}, |P(w)|_p \ll Q^{-2s_2-s_3+3\varepsilon_1-\varepsilon/16}. \tag{22}$$

Возьмем число

$$s = 4 - 5(v_1 + v_2) / 3 - m_2 - s_2$$

и введем число $s_1 = s / 8$. Поделим множество значений $P(d)$ в (22) и значения производных $P'(d), P''(d), P'''(d)$ из (20) на $Q^{\varepsilon/32}$ частей. Представим цилиндры K_2, K_3, K_4, K_5 , в которых выполняется второе неравенство в (22) неравенства в (21) для производных $P'(w), P''(w), P'''(w)$, в виде объединения цилиндров с мерой Хаара меньшей в $c_6 Q^{\varepsilon/32}$, чем меры цилиндров K_2, K_3, K_4, K_5 . Так как количество полиномов, принадлежащих $I \times K$, не менее $c_7 Q^{7\varepsilon/8}$, то по принципу ящиков Дирихле найдется не менее $c_8 Q^{5\varepsilon/8}$ полиномов, попадающих в 4 интервала и 4 цилиндра с меньшими мерами. В итоге получаем, что не менее чем для $c_9 Q^{5\varepsilon/8}$ многочленов $R_j(u) = P_{j+1}(u) - P_0(u)$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
|R_j(d)| &\ll Q^{1-2m_2-m_3+3\varepsilon_1-\varepsilon/16-s_1}, |R'_j(d)| \ll Q^{1-m_2-m_3+3\varepsilon_1-s_1}, \\
|R''_j(d)| &\ll Q^{1-m_3+3\varepsilon_1-s_1}, |R'''_j(d)| \ll Q^{1-s_1},
\end{aligned} \tag{23}$$

$$|R(w_1)|_p \ll Q^{-2s_2-s_3+3\varepsilon_1-\varepsilon/16-s_1}, |R'(w_1)|_p \ll Q^{-s_2-s_3+3\varepsilon_1-s_1}, |R''(w_1)|_p \ll Q^{-s_3+3\varepsilon_1-s_1}. \tag{24}$$

Разложим полиномы $R_j(u)$ и их производные в ряд Тейлора в точках α_1, w_1 на интервале I и на цилиндре K . Получим выполнение неравенств (23) и (24) с заменой d на x и w_1 на w . Последнее неравенство в (23) показывает, что старший коэффициент b_3 полиномов $R_j(x)$ удовлетворяет неравенству $|b_3| \ll Q^{1-s_1}$. Обозначим $c_{10} Q^{1-s_1}$ через Q_1 , и во всех неравенствах (23), (24) и в равенствах $\mu_1 I = Q^{-\sigma_1}$, $\mu_2 K = Q^{-\sigma_2}$ заменим Q на Q_1 . Последовательно рассматривая $R_j^{(i)}(d)$ от $i = 3$ до $i = 1$, а затем и первое неравенство в (23), получим $H(R_j) < c_{11} Q^{1-s_1}$. Среди $c_{11} Q^{5\varepsilon/8}$ найдется не менее $c(\varepsilon) Q^{5\varepsilon/8}$ полиномов с одинаковыми векторами $\bar{m}', \bar{s}'$. Если среди $c(\varepsilon) Q^{5\varepsilon/8}$ полиномов найдутся хотя бы два без общих корней, то применим к ним лемму 3. Получим противоречие. Если такие два полинома не найдутся, то полиномы $R_j(u)$ приводимые, и один из делителей $R_j(u)$ полином первой степени $R_j(u) = (a_j u + b_j) t_{2j}(u)$. Перейдем от оценок $|R_j(x)|$ и $|R_j(w)|_p$ к оценкам сверху для многочленов первой и второй степеней. Вновь, как, например, в [5; 9], получим противоречие.

Список использованной литературы

1. *Ван дер Варден, Б. Л.* Алгебра / Б. Л. Ван дер Варден. – Москва: Наука, 1976. – 648 с.
2. *Коледа, Д. В.* Об оценке сверху для числа целочисленных многочленов третьей степени с заданной границей для дискриминантов / Д. В. Коледа // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 3. – С. 10–16.
3. *Бересневич, В. В.* Совместные приближения нуля целочисленным многочленом, его производной и малые значения дискриминантов / В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гётце // Докл. НАН Беларусі. – 2010. – Т. 54, № 2. – Р. 26–28.
4. *Bernik, V. I.* On the divisibility of the discriminant of an integral polynomial by prime powers / V. I. Bernik, F. Goetze, O. S. Kukso // Lith. Math. J. – 2008. – Vol. 48. – P. 380–396.
5. *Budarina, N.* On the number of polynomials with small discriminants in the euclidean and p -adic metrics / N. Budarina, D. Dickinson, Jin Yuan // Acta Mathematica Sinica. – 2012. – Vol. 28, Issue 3. – P. 469–476.
6. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 184 с.
7. *Bernik, V. I.* Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
8. *Берник, В. И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arith. – 1983. – Vol. 42, Issue 3. – P. 219–253.
9. *Берник, В. И.* Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН. Сер. матем. – 2015. – Т. 79, № 1. – С. 21–42.

Поступило в редакцию 20.06.2016